

专题：统计物理和复杂系统

复杂网络上的部分同步化：奇异态、遥同步与集团同步*

王振华 刘宗华†

(华东师范大学物理与电子科学学院, 上海 200241)

(2019年12月26日收到; 2020年2月14日收到修改稿)

近年来, 复杂网络上耦合振子的部分同步化引起了人们极大的关注, 其潜在或背后的原因是部分同步化斑图在大脑网络中广泛存在, 并很可能与大脑的认知或记忆等功能有密切的联系. 本文对这些进展进行简单的总结与归纳, 并按照学者们研究的不同侧重点, 将其分成三方面来进行介绍, 即奇异态、遥同步与集团同步化. 着重强调这三种情形各自出现的条件、常用的研究模型、检测的方法以及侧重解释的生物现象等方面, 并对它们三者之间的相互关系及今后的研究方向做一些简单的探讨.

关键词: 复杂网络, 奇异态, 遥同步, 集团同步**PACS:** 89.75.Hc, 05.45.Xt, 68.18.Jk**DOI:** 10.7498/aps.69.20191973

1 引言

混沌通常被认为是有害的现象, 直到 1990 年美国海军实验室的 Pecora 和 Carroll^[1] 发现两个全同的混沌系统实际上是可以同步化的, 从而导致了混沌系统的一个极其重要的应用——保密通信^[2]. 源于这个应用, 两个耦合系统间的混沌同步化受到了极大的关注, 并发现了一系列的同步化方式, 如完全同步、相同步、延迟同步及广义同步等. 随后, 这些研究被推广到了多个耦合系统的情形, 包括耦合映像格子的时空同步化等. 这些同步化的一个共同特征是耦合的各子系统间行为一致, 是作为一个整体来表现同步特征的.

实际上, 除了这些整体同步化外, 还存在着以非整体行为的方式体现的同步化. 比如, 在猫的视觉皮层中, 分布在不同空间位置的神经元与它们的振荡响应 (40—60 Hz) 是同步的^[3]. 然而, 这个现象直至十年之后, 也就是 2000 年左右, 才引起了

人们的广泛关注, 被称为部分同步化. 部分同步主要讨论两个振子以上但总振子数目不是太大的情形. 此时只有部分态变量是同步的, 而其他态变量并不与它们同步, 因此系统的轨道将收敛到一个由同步变量定义的不变线性子空间^[4–7]. 比如考虑由三个振子 x, y, z 组成的耦合混沌系统, 部分同步可以发生在振子 x 与 y 之间或 x 与 z 之间, 而第三个振子并不与这两者同步. 部分同步化已获得了实验验证^[8,9].

上述研究, 无论是同步还是部分同步, 包含的子系统数目都不大, 通常只有 2—6 个子系统. 另外, 这些耦合的连接方式是均匀的, 比如最近邻连接、规则连接或者全连等, 而不涉及复杂的网络结构, 因此在理解大脑的各种同步斑图方面帮助不大. 最近, 部分同步的研究有了长足的进展, 不仅仅是子系统数目扩大到成百上千的规模, 而且连接的方式也推广到多种多样^[10,11], 从分组连接到复杂网络连接, 甚至到了多层网络连接^[12,13]. 基于这些研究, 人们发现复杂网络上的部分同步可以展现出

* 国家自然科学基金 (批准号: 11675056, 11835003) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhliu@phy.ecnu.edu.cn

复杂多变、多姿多彩的斑图,这就对大脑斑图的多样性给出了一种可能的机制.我们知道,大脑皮层的大尺度同步^[14]与网络神经元子集同步放电^[15,16]均与认知过程密切相关,且额叶脑区内任务相关的 α 波同步与顶底加工(top-down processing)的需求也高度相关^[17].另外,神经活动的同步斑图还与大脑无序紧密相关.比如,癫痫发作时,特定脑区会变得高度同步,其他部分则不同步^[18].而在失去了部分脑细胞导致的帕金森氏病中,同步活动将会在特定的脑区缺失^[19].因此,复杂网络上部分同步化的研究为理解大脑的高级功能,如认知与记忆等打开了一扇新的窗口,亟待进一步深入下去.

由于复杂网络上部分同步的复杂性,历史上,不同的研究小组从不同的角度得到了不同的发现,并依据具体出现条件的不同而将其分别命名为奇异态、遥同步及集团同步等.奇异态是最先命名的,描述的是同步振子与无序振子的共存现象,可对半脑睡眠与首晚效应等生物现象做出合理的解释.遥同步是最后命名的,描述的是不直接相连的振子之间通过中心节点发生同步但却不与中心节点上的振子同步的现象,可用于帮助理解大脑分布式计算的内在机制.而集团同步化居中,描述的是复杂网络上的部分振子因具有某种对称性而形成同步集团的现象,可帮助理解大脑同步斑图的多样性.虽然这三种部分同步化状态发现的初始时间略有不同,但对它们研究的进展并没有绝对的先后,而是交替前行、相互促进的.实际上,这三种部分同步化状态并不是完全独立的,甚至有时描述的是同一种现象或斑图.本文将对这些进展进行综述,并对它们间的相互关系进行简单的讨论.

2 奇异态

奇异态描述的是同步与无序这一对矛盾体共存的特殊情形,是Abrams与Strogatz^[20]于2004年命名的.其英文名字为Chimera state,代表希腊神话中的一种狮头、羊身、蛇尾的喷火怪物.这个名字取得非常好,不仅仅在于它把这个领域做“热”了,更重要的是它描述了一大类生物系统半脑睡眠现象的微观机制.来自于实验探测的EEG数据表明,在一些鸟类与海洋哺乳动物的睡眠过程中,它们的一半大脑是同步的,而另一半大脑是非

同步的,这就使得一半大脑比另一半具有更强的警觉性,从而减少睡眠时所受到的外部攻击,称为“半脑睡眠”^[21,22].众所周知,人类早期住在山洞而没有房子保护时也需要提防野兽的攻击,因而这种警觉性或许到目前应该还有某些残留痕迹.这种推断直到2016年才被实验证实,称为“首晚效应”^[23].说的是当人们出差到异地时,第一晚的睡眠通常不踏实,而是表现为左边半脑觉醒的次数要远大于右边半脑,但第二晚以后会恢复正常.

另一方面,奇异态的研究也拓展并丰富了非线性动力学及耦合振子理论.长期以来,人们一直相信同步与非同步的共存是限制在非均匀振子网络中的,其中具有相似频率的振子可以发生同步,而那些偏离平均频率较大的振子则保持不相关的漂移.因此,当发现全同振子在相同的耦合方式下也可以分离成为同步与漂移的两组,即奇异态时,就从根本上令人感到吃惊,因为全同振子通常是作为整体,表现为要么同步要么非同步的.这样,作为一种新的动力学状态的奇异态就实质性地拓展了我们对从同步到混乱的转变或相反的转变的认识.

事实上,奇异态这种现象在其命名的两年前就由Kuramoto与Battogtokh^[24]在Ginzburg-Landau方程中注意到了,但当时并没有引起人们足够的重视,这也从一个侧面说明了命名的重要性.在这个发现中,一个极其重要的因素是,不同于以往的全局耦合或最近邻耦合,甚至也不同于随机耦合,作者采用了一种随距离衰减的指数耦合,称为非局域耦合(nonlocal coupling).虽然这种非局域耦合没有局域或全局耦合那么受到重视,但它其实也有广泛的应用,比如在约瑟夫逊结、化学振子、蜗牛壳模式的神经网络及眼优势条纹中等. Abrams与Strogatz^[20]继承了这个非局域耦合的思路,但代之以Kuramoto相振子模型.此外,他们还将指数衰减的耦合核改为余弦耦合核,使得模型可以解析求解.

研究奇异态最常用到的是Kuramoto相振子模型,这个模型因只含振荡的相位特征却没有涉及振荡的振幅而被认为是描述自然界各种振荡行为最简单的模型. Abrams与Strogatz^[20]考虑的模型就是这样一个相振子环,其方程为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \omega - \int_{-\pi}^{\pi} G(x-x') \sin[\phi(x,t) - \phi(x',t) + \alpha] dx', \quad (1)$$

这里 $\phi(x, t)$ 为振子在位置 x 时间 t 时的相, 角度 $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ 为可调参数. 耦合核 $G(x - x')$ 假定取如下形式:

$$G(x) = \frac{1}{2\pi}(1 + A \cos x), \quad (2)$$

其中 $0 \leq A \leq 1$. 引入序参量来对局部振子的有序与无序进行描述. 令 Ω 代表旋转框架的角频率, $\theta = \phi - \Omega t$ 代表振子相对于这个框架的相, 于是有

$$R(x, t)e^{i\Theta(x, t)} = \int_{-\pi}^{\pi} G(x - x')e^{i\theta(x', t)} dx', \quad (3)$$

其中 R 为序参量, Θ 为局部平均相. 此时, 方程 (1) 变为

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \omega - \Omega - R \sin[\theta - \Theta + \alpha]. \quad (4)$$

稳态时, R 与 Θ 将独立于时间, 而只依赖于空间. 作参数变换: $\beta = \pi/2 - \alpha$ 与 $\Delta = \omega - \Omega$. 图 1(a) 为方程 (4) 的快照, 其中靠近 $x = \pm\pi$ 的振子是锁相与相关的, 即它们以相同的瞬时频率运动并处于近似的同相. 同时, 图 1(a) 中间的分散振子是漂移与无序的. 图 1(b) 则给出了对应图 1(a) 的序参量曲线, 证实同步态具有较高的 R 值, 而无序态具有较小的 R 值. 图 1(c) 则为对应的局部平均相 $\Theta(x)$.

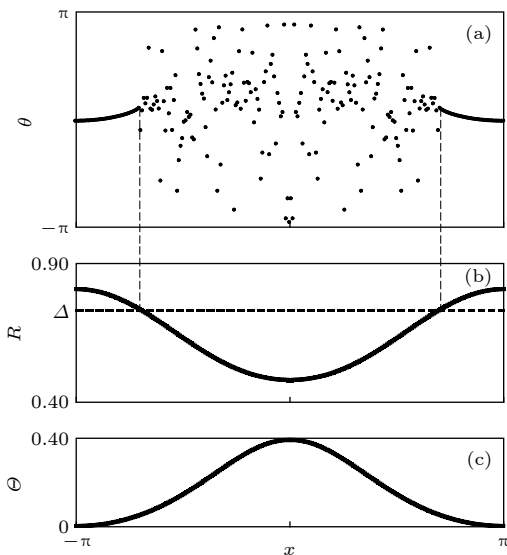


图 1 (a) 奇异态的斑图, 参数: $A = 0.995$, $\beta = 0.18$, $N = 256$ 个振子; (b) 来自于方程 (3) 的局部相关度 $R(x)$, 锁相的振子满足 $R(x) \geq \Delta$; (c) 局部平均相 $\Theta(x)$. 改编自文献 [20]
 Fig. 1. (a) Phase pattern for a chimera state, parameters: $A = 0.995$, $\beta = 0.18$, $N = 256$ oscillators; (b) local phase coherence $R(x)$, computed from Eq. (3), locked oscillators satisfy $R(x) \geq \Delta$; (c) local average phase $\Theta(x)$. Figure adapted from Ref. [20].

随后, Abrams 等 [25] 于 2008 年提出了一个仅包含两组相互作用的振子集团且精确可解的奇异态模型. 这个模型人为地将振子分成大小相等的两组, 各组内与组间的耦合方式完全一样, 通过初值条件选取的不同, 使得它们一个处于同步态, 而另一个处于无序态. 通过 Ott 与 Antonsen [26] 的降维方法, 他们得到了关于奇异态稳定性、动力学及分岔的精确解. 其模型如下 [25]:

$$\frac{d\theta_i^\sigma}{dt} = \omega + \sum_{\sigma'=1}^2 \frac{K_{\sigma\sigma'}}{N_{\sigma'}} \sum_{j=1}^{N_{\sigma'}} \sin(\theta_j^{\sigma'} - \theta_i^\sigma - \alpha), \quad (5)$$

其中 $\sigma = 1, 2$, N_σ 为第 σ 组内的振子数目. 因假定全同振子, 因此频率 ω 与相延迟 α 对所有振子都是一样的. 组内的耦合强度设定为 $K_{11} = K_{22} = \mu > 0$, 组间的耦合强度则取为 $K_{12} = K_{21} = \nu > 0$, 且 $\mu > \nu$, 即组内的耦合大于组间的耦合. 这有点类似于上面的随距离衰减的非局域耦合. 对时间做标度变换, 可设定 $\mu + \nu = 1$. 进一步为方便寻找奇异态存在的区域, 定义参数 $A = \mu - \nu$ 与 $\beta = \pi/2 - \alpha$.

对于随机选择的初值, 方程 (5) 很容易走向同步态. 但当初值设置在奇异态附近时, 比如一组为近似同步的初值, 另一组为随机初值, 则能观察到奇异态 [25]. 图 2 为奇异态的动力学, 只画了非同步那一组的序参量, 其满足 $r(t) = |\langle e^{i\theta_j(t)} \rangle|$. 从图 2(a)—图 2(c) 可见, 对应不同的参数值 A , 序参量分别呈现常数值、小振动及大振荡行为, 分别表示稳定的奇异态、呼吸奇异态及长周期呼吸子.

当取其他的 β 时, 也可能出现稳定的奇异态与呼吸奇异态, 但所需的耦合强度差 A 会有所不同. 借助于 OA 降维方法, Abrams 等 [25] 得到了依赖于参数 β 与 A 的解析解, 并给出了各稳定区域间的边界曲线. 图 3 是相应的相图.

上述奇异态一旦形成, 便不再改变, 因此是稳定的奇异态. 为了实现海豚与鸟类在睡眠中出现的交替奇异态, Ma 等 [27] 引入了一个周期性的延迟信号来描述变化的外部环境. 具体做法是将方程 (5) 改写为

$$\frac{d\theta_i^\sigma}{dt} = \omega_i + \sum_{\sigma'=1}^2 \frac{K_{\sigma\sigma'}}{N_{\sigma'}} \sum_{j=1}^{N_{\sigma'}} \sin(\theta_j^{\sigma'}(t) - \theta_i^\sigma(t) - \alpha) + A \sin[\Omega(t - \tau_\sigma)], \quad (6)$$

其中 A 与 Ω 分别为外部信号的振幅与频率, τ_σ 代

表系统对环境的响应时间. 考虑到睡觉半脑与清醒半脑对外界应该有不同的响应, 可令 $\tau_1 = 0$ 与 $\tau_2 \neq 0$. 耦合参数取为 $\mu = 5$ 与 $\nu = -4$. 负耦合 $\nu = -4$ 来自于组间的相互作用, 不同于组内的相互

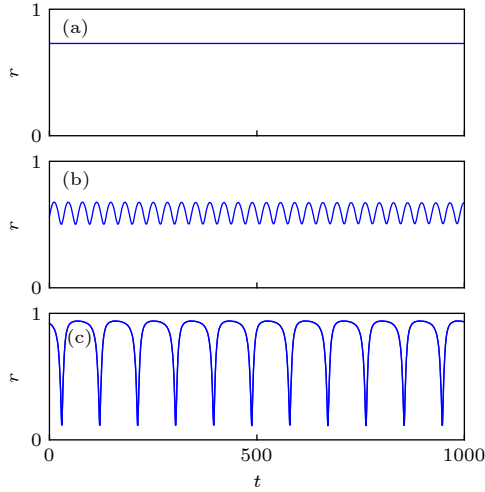


图 2 序参量 r 随时间的变化, 其中参数 $N_1 = N_2 = 128$, $\beta = 0.1$ (a) $A = 0.20$, 稳定奇异态; (b) $A = 0.28$, 呼吸奇异态; (c) $A = 0.35$, 长周期呼吸子. 初值条件取为靠近奇异态, 结果为丢掉了 2000 个暂态时间单位后的情形. 改编自文献 [25]

Fig. 2. Order parameter r versus time. In all three panels, $N_1 = N_2 = 128$ and $\beta = 0.1$: (a) $A = 0.20$, stable chimera; (b) $A = 0.28$, breathing chimera; (c) $A = 0.35$, long period breather. Numerical integration began from an initial condition close to the chimera state, and plots shown begin after allowing a transient time of 2000 units. Figure adapted from Ref. [25].

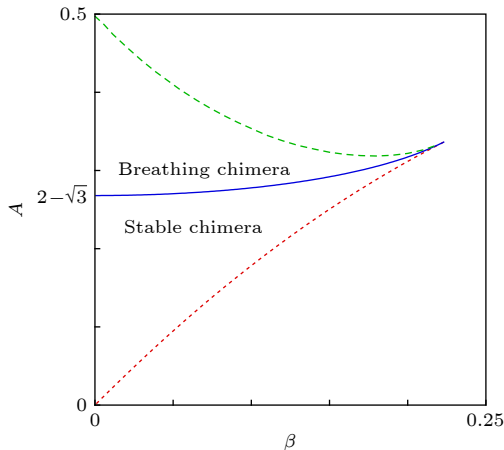


图 3 奇异态的稳定性相图 分岔曲线: 鞍-节分岔 (点划线)、超临界 Hopf 分岔 (实线), 两者都是解析发现的; 同宿分岔 (虚线), 数值发现的. 改编自文献 [25]

Fig. 3. Stability diagram for chimera states. Bifurcation curves: saddle-node (dotted line) and supercritical Hopf (solid line), both found analytically; homoclinic (dashed line), found numerically. Figure adapted from Ref. [25].

作用, 其依据是视交叉上核中左右振荡组之间是反相同步 [28]. 另外, 由于真实大脑中神经元的非全同, 可令 ω_i 随机均匀地分布在 $[1 - \delta, 1 + \delta]$, 其中 δ 代表振子的多样性. Ma 等 [27] 发现, 对一个固定的 δ , 存在一个阈值 A_0 , 以便 $A \geq A_0$ 时可以出现交替的奇异态. 比如当 $\delta = 0.1$ 时, 有 $A_0 = 0.2$, 且随着 δ 的增加, A_0 会逐渐降低. 图 4 给出了 $N_1 = N_2 = 128$ 与 $\delta = 0.1$ 时的结果, 其中图 4(a) 代表 $A = 1$, $\Omega = 1$ 与 $\tau_2 = 1.5$ 的情形; 图 4(b) 为 $A = 1$, $\Omega = 0.5$ 与 $\tau_2 = 1.5$ 的情形; 图 4(c) 为 $A = 1.5$, $\Omega = 1$ 与 $\tau_2 = 1.5$ 的情形; 图 4(d) 为 $A = 1$, $\Omega = 1$ 与 $\tau_2 = 3.0$ 的情形. 从图 4 可见, 交替奇异态存在于所有的四种情形中, 表明交替奇异态对信号参数具有鲁棒性.

当网络结构不是全连网, 而是二维或三维规则格子甚至复杂网络时, 奇异态会表现出多种多样性, 其斑图丰富多彩 [29–33]. Zhu 等 [34] 研究了复杂网络情形, 发现此时的斑图会比较混乱, 但如果按振子的有效频率进行重新排序, 则仍可见清晰的同步与无序共存. 详细的信息可见综述文献 [10, 11, 35].

有鉴于此, 为了定量刻画奇异态, Kemeth 等 [36] 于 2016 年引入了一个特征分类方法来测量奇异态. 其基本思想是测量空间关联, 即对于具有局部或非局部耦合拓扑的系统, 采用局部曲率来测量空间关联. 据此, 一维系统时局域曲率可由二阶导数测量, 一维以上的系统则由拉普拉斯算子来完成. 具体步骤如下.

i) 对于包含空间数据 f 的每一个时间步或快照, 我们用分立的拉普拉斯算子 D 来计算每个节点的局部曲率. 以一维情形为例, 对时间 t 时的快照, 我们计算

$$\hat{D}f = f(x + \Delta x, t) - 2f(x, t) + f(x - \Delta x, t). \quad (7)$$

以图 5(a) 所示的快照为例, 按方程 (7) 计算出的 $|\hat{D}f|$ 如图 5(b) 所示, 其中 D_m 代表 \hat{D} 的最大值. 对相振子系统, 可将这个算子用于复平面的数据, 即相振子处于一个常数振幅 A 的圆环上. D_m 代表特定振子的曲率, 其两个邻居都在相平面中转移 180° , 即两个邻居振子在圆环上都处于相对立的位置. 在连续极限下, D_m 收敛到 $4A$. 在同步化区域, $\lim_{N \rightarrow \infty} |\hat{D}| = 0$. 因此, 通过这个变换, 同步化区域被投影到 x -轴, 而在非相关区域 $|\hat{D}|$ 有限且显示明显的涨落.

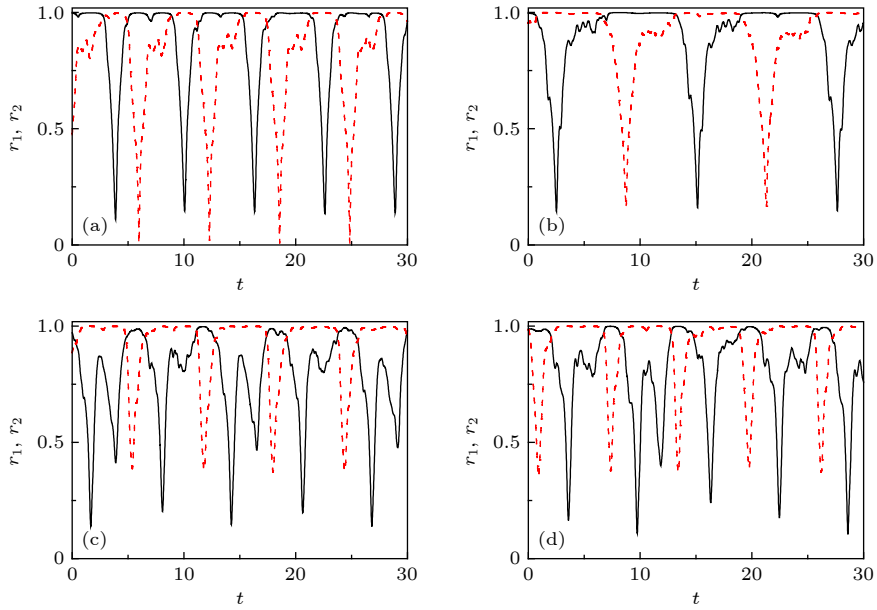


图 4 外部信号诱导的交替奇异态 (a) $A = 1, \Omega = 1$ 与 $\tau_2 = 1.5$; (b) $A = 1, \Omega = 0.5$ 与 $\tau_2 = 1.5$; (c) $A = 1.5, \Omega = 1$ 与 $\tau_2 = 1.5$; (d) $A = 1, \Omega = 1$ 与 $\tau_2 = 3.0$. 改编自文献 [27]

Fig. 4. Alternating chimera states induced by external signals: (a) $A = 1, \Omega = 1$ and $\tau_2 = 1.5$; (b) $A = 1, \Omega = 0.5$ and $\tau_2 = 1.5$; (c) $A = 1.5, \Omega = 1$ and $\tau_2 = 1.5$; (d) $A = 1, \Omega = 1$ and $\tau_2 = 3.0$. Figure adapted from Ref. [27].

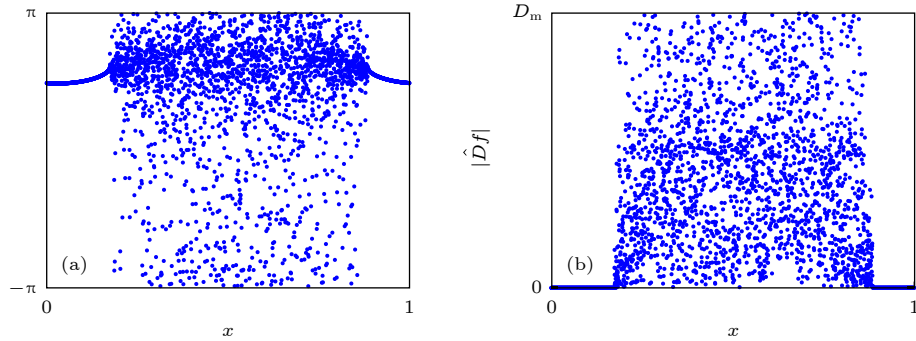


图 5 (a) 来自于 Kuramoto 模型的快照; (b) 将拉普拉斯算子用于 (a) 中的数据后得到的局部曲率的绝对值. 改编自文献 [36]

Fig. 5. (a) Snapshot of the Kuramoto model; (b) absolute value of the local curvature obtained by applying the discrete Laplace operator on the data set shown in (a). Figure adapted from Ref. [36].

ii) 计算 $|\hat{D}|$ 的归一化几率密度函数 $g(|\hat{D}| = 0)$ 代表每个时间步实现中空间关联区域所占的相对大小. 对于完全同步的系统有 $g(|\hat{D}| = 0) = 1$, 而完全无序的系统则有 $g(|\hat{D}| = 0) = 0$. 当 $g(|\hat{D}|)$ 取 0—1 之间的值时, 就表示同步与无序的共存.

iii) 考虑到数值模拟中的误差涨落, Kemeth 等 [36] 建议只要局部曲率的绝对值小于最大曲率的百分之一就应该被当作相关态, 其他的为非相关态. 为此, 他们引入关联测度

$$g_0(t) = \int_0^\delta g(t, |\hat{D}|) d|\hat{D}|, \quad (8)$$

其中 $\delta = 0.01D_m$. 实际计算中可用 $g_0(t)$ 的时间平均值来衡量奇异态.

奇异态概念最直接的应用就是神经系统, 特别是大脑网络, 目前这方面的研究很丰富 [37–44]. 不同于一维的相振子模型, 神经元系统通常由二维或三维模型来表示, 此时的相互作用由耦合矩阵表示. 研究中比较常用到的是 FitzHugh-Nagumo (FHN) 神经元模型. Omelchenko 等 [37] 为 FHN 模型引入了一种旋转耦合, 并发现了多奇异态. 他们将 N 个神经元放置在一个圆环上, 每个神经元与其最近邻的 $2R$ 个神经元发生耦合. 其动力学方程如下:

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{du_k}{dt} &= u_k - \frac{u_k^3}{3} - v_k + \frac{\sigma}{2R} \sum_{j=k-R}^{k+R} [b_{uu}(u_j - u_k) \\ &\quad + b_{uv}(v_j - v_k)], \\ \frac{dv_k}{dt} &= u_k + a_k + \frac{\sigma}{2R} \sum_{j=k-R}^{k+R} [b_{vu}(u_j - u_k) \\ &\quad + b_{vv}(v_j - v_k)], \end{aligned} \quad (9)$$

其中 u_k 与 v_k 分别表示快变量与慢变量, ϵ 为一个小小参数, 这里取为 0.05. 依赖于阈值 a_k , 每个单独的 FHN 振子显示振荡 ($|a_k| < 1$) 或可激 ($|a_k| > 1$) 行为, 这里取 $a_k \in (-1, 1)$. 为简单起见, 他们将耦合取为旋转矩阵

$$B = \begin{pmatrix} b_{uu} & b_{uv} \\ b_{vu} & b_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad (10)$$

此耦合依赖于相参数 $\phi \in [-\pi, \pi]$.

令 $r = R/N$, 则参数 r 与 σ 就将决定系统的行为. 图 6(a)—图 6(d) 给出了参数 r 与 σ 分别取 $(0.33, 0.1)$, $(0.33, 0.19)$, $(0.33, 0.23)$ 及 $(0.33, 0.28)$ 时变量 u_k 的快照. 为方便比较, 同时给出了每个振子的平均相速度 $\omega_k = 2\pi M_k / \Delta T$, 其中 M_k 为时间间隔 ΔT 内完成的圈数. 常数 ω_k 代表锁相区域. 从

图 6(a)—图 6(d) 可见, 随着耦合强度 σ 的增加, 奇异态从单一的非相关区域变成了两个非相关区域, 即观察到了多奇异态^[37]. 类似地, 图 6(e)—图 6(h) 给出了从单一的非相关区域变成三个非相关区域的情形.

在大脑网络方面的应用主要是将网络结构考虑成不同大小的真实脑皮层网^[13,45–47], 然后研究这些特定网络结构下的奇异态. 值得一提的是, Kang 等^[13] 发现了对应“首晚效应”或半脑睡眠的奇异态. 他们使用的脑皮层网络数据含有 998 个节点、17865 条边^[48,49], 但其中含有 9 个孤立的没有边的节点. 去掉这些孤立节点后, 网络只有 989 个节点, 其中右半脑含有 496 个节点 ($i = 1–496$), 左半脑含有 493 个节点 ($i = 497–989$). 考虑到左右半脑只能通过胼胝体连接, 脑皮层网实际上是个双层网络, 它的 17865 条边可分成右半脑内的 8037 条边、左半脑内的 7773 条边以及连接左右半脑的 2055 条边.

考虑到通过胼胝体的连边与半脑内的连边具有不同的信号传播速度, Kang 等^[13] 提出了一个双层网模型 (A, B 层) 并让层内与层间的耦合强度不同, 分别由 λ_{in} 与 λ_{out} 表示. A 层的方程为

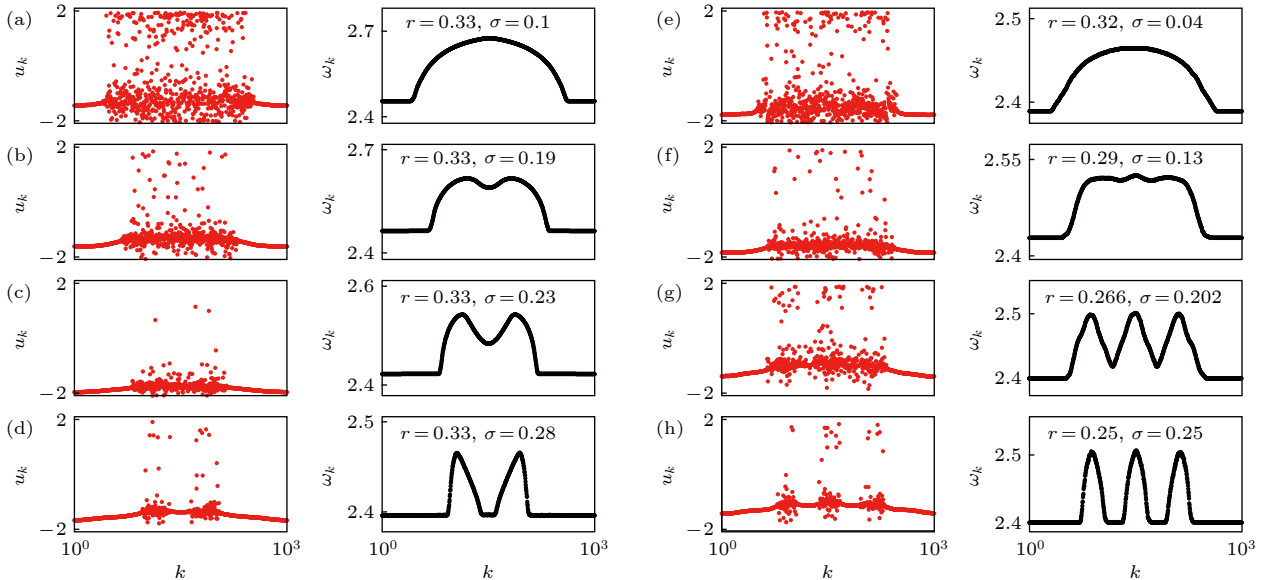


图 6 单一的非相关区域变成多个非相关区域的情形 (a)—(d) 变成两个非相关区域; (e)—(h) 变成三个非相关区域. 在每个子图中, 左列代表变量 u_k 的快照, 右列为对应的平均相速度. 改编自文献^[37]

Fig. 6. Transition from a classical chimera state with one incoherent domain to multichimera states with two (a)–(d), and three (e)–(h) incoherent domains. In each panel the left column shows snapshot of variables u_k , and the right column shows the corresponding mean phase velocities. Figure adapted from Ref. ^[37].

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{u}_i^a &= u_i^a - \frac{(u_i^a)^3}{3} - v_i^a \\ &+ \frac{\lambda_{in}}{k_{in,i}^a} \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_{ij} [d_{uu}(u_j^a - u_i^a) + d_{uv}(v_j^a - v_i^a)] \\ &+ \frac{\lambda_{out}}{k_{out,i}^a} \sum_{j=1}^N (\mathbf{AB})_{ij} [d_{uu}(u_j^b - u_i^a) + d_{uv}(v_j^b - v_i^a)], \\ \dot{v}_i^a &= u_i^a + a + \frac{\lambda_{in}}{k_{in,i}^a} \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_{ij} [d_{vu}(u_j^a - u_i^a) + d_{vv}(v_j^a - v_i^a)] \\ &+ \frac{\lambda_{out}}{k_{out,i}^a} \sum_{j=1}^N (\mathbf{AB})_{ij} [d_{vu}(u_j^b - u_i^a) + d_{vv}(v_j^b - v_i^a)], \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $k_{in,i}^a$ 与 $k_{out,i}^a$ 分别代表层内与层间的节点度, \mathbf{A}_{ij} 与 $(\mathbf{AB})_{ij}$ 代表层内与层间的耦合矩阵, $\epsilon = 0.05$, $a = 0.5$. 旋转矩阵 \mathbf{D} 取方程 (10) 一样的形式. 相应地, B 层的方程为

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{u}_i^b &= u_i^b - \frac{(u_i^b)^3}{3} - v_i^b \\ &+ \frac{\lambda_{in}}{k_{in,i}^b} \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_{ij} [d_{uu}(u_j^b - u_i^b) + d_{uv}(v_j^b - v_i^b)] \\ &+ \frac{\lambda_{out}}{k_{out,i}^b} \sum_{j=1}^N (\mathbf{AB})_{ij} [d_{uu}(u_j^a - u_i^b) + d_{uv}(v_j^a - v_i^b)], \\ \dot{v}_i^b &= u_i^b + a + \frac{\lambda_{in}}{k_{in,i}^b} \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_{ij} [d_{vu}(u_j^b - u_i^b) + d_{vv}(v_j^b - v_i^b)] \\ &+ \frac{\lambda_{out}}{k_{out,i}^b} \sum_{j=1}^N (\mathbf{AB})_{ij} [d_{vu}(u_j^a - u_i^b) + d_{vv}(v_j^a - v_i^b)]. \end{aligned} \quad (12)$$

这个双层网模型可展示不同的状态, 包括同步化、无序及奇异态. 图 7 给出了四个典型的状态, 其中上层为网络 A 、下层为网络 B 、子图为它们对应的动力学. 非常有趣的是, 图 7(c) 与图 7(g) 显示出网络 A 无序而网络 B 同步, 为典型的半脑睡眠现象, 从而再现了“首晚效应”.

除了这些数值模拟与理论研究外, 奇异态已被数个实验证实 [50–54]. 比如 Martens 等 [52] 简单地使用了两个摆座、一根弹簧和一些全同的节拍器实现了奇异态. 随着弹簧弹力系数的增大, 一个摆座上的节拍器全同步, 另一个摆座的节拍器会出现各种不同的非协同行为. 该实验无需精妙耦合计算和时间延迟, 且能容易地拓展至其他物理模型.

Gambuzza 等 [53] 则使用电路实验模拟了 FHN 模型的奇异态, 发现了一种静止态和同步态混合的奇异态.

3 遥同步

大量的证据表明, 人脑的信息处理是分布式的, 并由具有社区结构的复杂网络承担 [55]. 一个脑区的信息可为其他脑区用来进行认知计算, 这种跨多个脑区的处理过程称为信息的分散与整合 [56]. 在这个分散与整合的过程中, 有一种特殊的信息传递方式—遥同步, 指不直接相连的两个节点通过连接一个公共的邻居而相互间发生同步, 但却不与那个公共邻居同步 [57]. 其证据是在采集的多电极大脑数据中, 无论是 β 带 (14–30 Hz) 还是 γ 带 (40–80 Hz) 都有各脑区间神经活动的长程同步. 由于这些远距离脑区间轴向传导延迟可达到几十毫秒, 这种远距离的同步放电很可能是中继振子介导的 [58]. 事实上, 中继神经元广泛存在于我们的神经系统中, 比如丘脑、脊髓和外侧膝状体. 例如, 丘脑就负责视觉信号从视网膜到视觉皮质的转播. 目前, 遥同步已在部分实验中得到证实 [59].

遥同步是 Bergner 等 [57] 在研究星形网的相同步时引入的. 他们考虑的模型如下:

$$\frac{du_n}{dt} = (\alpha + i\omega_n - |u_n|^2)u_n + \frac{\kappa}{d_n^n} \sum_{m=1}^N g_{nm}(u_m - u_n), \quad (13)$$

其中 u_n 是复数, α 为霍普夫分岔参数, ω_n 为振子未耦合时的本征频率, κ 为耦合强度, d_n^n 为节点的入度, (g_{nm}) 为邻接矩阵. 图 8 为他们研究遥同步时的星形网示意图.

以 $N = 5$ 为例, Bergner 等 [57] 取中心节点的频率 $\omega_1 = 2.5$, 4 个叶子节点的频率为 $\{\omega_n\}_{n=2}^5 = \{0.975, 0.992, 1.008, 1.025\}$, 即中心节点的频率远大于叶子节点的频率. 令 $u_n = x_n + iy_n$, 并引入相位 $\phi_n = \tan^{-1}(y_n/x_n)$, 则可定义

$$r_{nm} = |\langle e^{i(\phi_n(t) - \phi_m(t))} \rangle_t|, \quad (14)$$

其中 $\langle \cdot \rangle_t$ 代表时间平均, r_{nm} 为节点 n 与 m 之间的局部序参量. 为了检验遥同步, 可引入两个序参量. 一个用来测量中心节点与叶子节点间的关联

$$r_{direct} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=2}^N r_{1n},$$

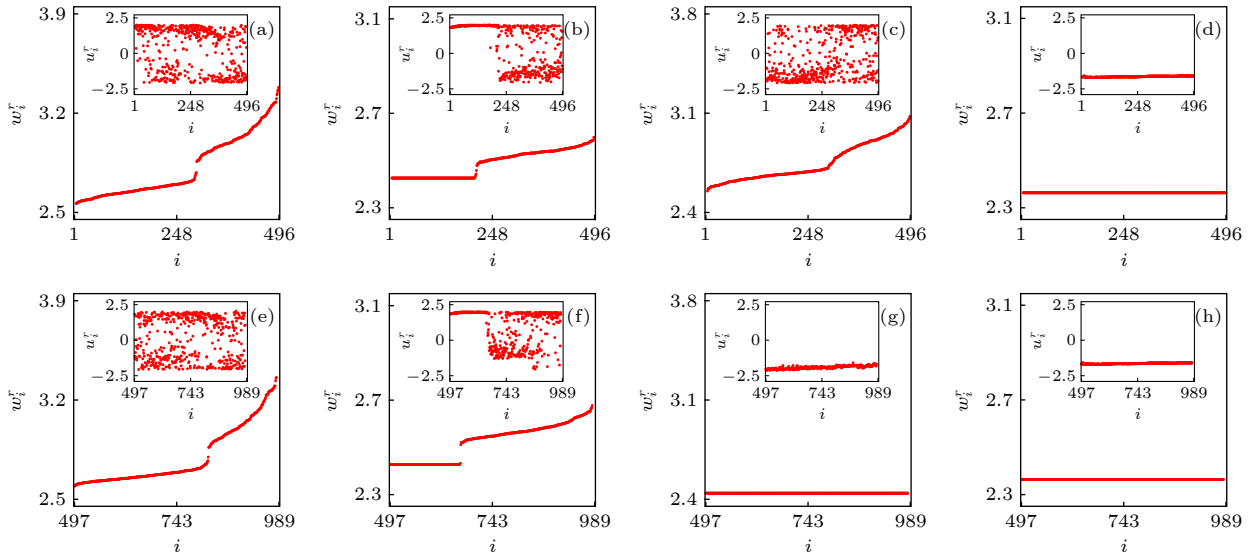


图 7 大脑皮层网中的四个典型的行为. 参数为 $\alpha = \pi/2 - 0.1$, 上层为网络 A、下层为网络 B、子图为它们对应的动力学 u_i (a) 与 (e) 的耦合参数为 ($\lambda_{in} = 0.1, \lambda_{out} = 0.3$); (b) 与 (f) 的耦合参数为 ($\lambda_{in} = 0.1, \lambda_{out} = 1.8$); (c) 与 (g) 的耦合参数为 ($\lambda_{in} = 0.4, \lambda_{out} = 3.5$); (d) 与 (h) 的耦合参数为 ($\lambda_{in} = 4.0, \lambda_{out} = 3.5$). 改编自文献 [13]

Fig. 7. Four typical behaviors in the cerebral cortex with $\alpha = \pi/2 - 0.1$ where the up and down panels represent the two hemispheres, respectively, and the insets are their corresponding dynamics of u_i at a moment t . The parameters are $\lambda_{in} = 0.1$ and $\lambda_{out} = 0.3$ in panels (a) and (e) of disorder; $\lambda_{in} = 0.1$ and $\lambda_{out} = 1.8$ in panels (b) and (f) of chimera state; $\lambda_{in} = 0.4$ and $\lambda_{out} = 3.5$ in panels (c) and (g) of an emergent state conceptually similar to the state of unihemispheric sleep; and $\lambda_{in} = 4.0$ and $\lambda_{out} = 3.5$ in panels (d) and (h) of synchronization. Figure adapted from Ref. [13].

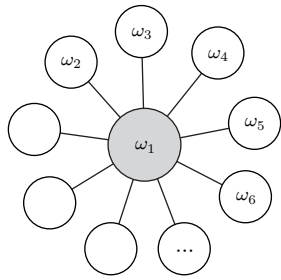


图 8 用于遥同步的星形网示意图. 改编自文献 [57]

Fig. 8. Graphic visualization of a hub network motif (star motif). Figure adapted from Ref. [57].

另一个则用来测量叶子节点间的关联

$$r^{\text{indirect}} = \frac{2}{(N-1)(N-2)} \sum_{n=2, m>n}^N r_{nm},$$

图 9 给出了这两个序参量对耦合强度 κ 的依赖性, 可见叶子节点间关联的增加要远快于中心节点与叶子节点间的关联. 叶子节点在 κ 大约为 0.47 时达到完全同步, 而中心节点与叶子节点间的完全同步要推迟到 $\kappa \approx 0.74$.

为了明白遥同步的机制, Bergner 等 [57] 将模型进一步简化为只有三个节点的情形: 两个叶子节点 1 与 2, 由中心节点 3 间接连接. 为了实现节点 1 与 2 的相互同步, 节点 1 的活动需要传递给节

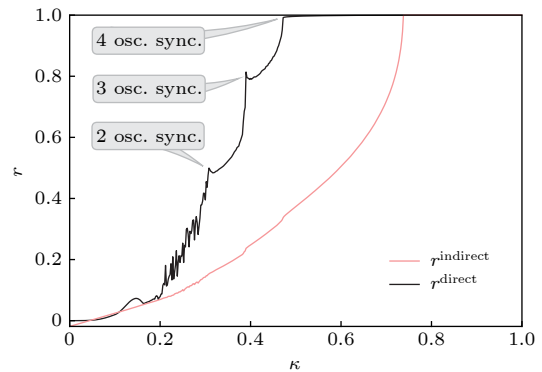


图 9 相同步的过程. 相同步的建立清晰可见, 其中的三个标注分别表明两个、三个与四个叶子节点间的同步化. 改编自文献 [57]

Fig. 9. Transition to PS for the hub motif. From the plot the onset of RS is clearly visible. The three annotations indicate synchronization between two, three, and four peripheral oscillators, respectively. Figure adapted from Ref. [57].

点 2, 反之亦然. 这就意味着节点 3 的动力学必须保证节点 1 与 2 的活动的传递尽可能不被改变, 为此需要满足两个条件: 首先, 为了不让中心节点与叶子节点同步, 节点 3 的吸引子的平均时间尺度应该与节点 1 与 2 的吸引子有很大的不同. 此外, 节点 1 与 2 的区别不应太大, 以便它们能够通过弱相互作用同步. 其次, 为了得到经过节点 3 的传递,

节点 3 的扰动必须不能衰减得太快. 将中心节点在其极限环 ($|u_0|^2 = \alpha$) 附近作线性化并保持其他两个叶子节点非接触, 可得如下方程:

$$\begin{aligned} \frac{du_h}{dt} &= (-2\alpha + i\omega_h)u_h + \frac{1}{2}\kappa(u_1 + u_2 - 2u_h), \\ \frac{du_{1,2}}{dt} &= (\alpha + i\omega_{1,2} - |u_{1,2}|^2)u_{1,2} + \kappa(u_h - u_{1,2}). \end{aligned} \quad (15)$$

这是两个 Stuart-Landau 振子通过一个线性过滤器耦合的方程. 通过拉普拉斯变换可将这个过滤器的传递函数写为

$$H_h(\omega) = \frac{\kappa}{i\omega + 2\alpha + \kappa - i\omega_h}, \quad (16)$$

于是, 中心节点可被一个有效耦合取代并有

$$\frac{du_{1,2}}{dt} = (\alpha + i\omega_{1,2} - \kappa - |u_{1,2}|^2)u_{1,2} + \kappa H_h(\omega_{2,1})u_{2,1}. \quad (17)$$

从这个角度, 我们可以解释两个主要的特点: 首先, 由于 $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} H_h = 0$, 叶子节点间的有效耦合强度下降为零, 从而有效解耦而不能同步. 其次, 通过检验方程 (16), 可看清楚耦合强度对中心节点的频率的依赖性. 中心节点越快, 则有效耦合强度越低.

叶子节点实际上是对称的, 因此 Nicosia 等 [60] 研究了网络对称性对出现遥同步的影响. 他们考虑的是带相参数的全同的 Kuramoto 相振子, 其相参数使得相连的振子保持特定的相差, 从而阻碍完全同步. 发现耦合网络的对称性起着重要作用, 具有相同对称性的两个节点可以同步化, 即使它们相距遥远. 这种遥同步是由网络的对称性导致的. Zhang 等 [61] 则进一步研究了这种对称性与遥同步的关系, 将星形网的遥同步推广到了网络的情形, 称为非相干介导远程同步. 具体地, 将 N 个节点组织成三组 A, B 与 C , 其中 A 与 B 相连, B 与 C 相连, 但 A 与 C 不相连, 见图 10 所示. 假定 B 组至少有两个节点, 且每个组内的节点与连边形成一个相连的子网. 他们发现那两个非连续的 A 与 C 同步而中间 B 组与它们无关, 且镜像对称性是这种遥同步发生的机制, 比如 A 组中的节点 1 与 C 组中的节点 N 就具有镜像对称性而会完全同步.

基于大脑中的遥同步现象, Kang 等 [62] 讨论了第 2 节中那个真实脑皮层网络上遥同步的可能性, 发现对全同振子很难观察到遥同步. 但若考虑大脑中信号速度的有限而加进延迟时, 遥同步则成为可能. 具体地, 考虑真实脑皮层网络上每个节点为

Stuart-Landau 振子, 满足如下方程:

$$\dot{u}_j = (\alpha + i\omega - |u_j|^2)u_j + \varepsilon \sum_{k=1}^N \mathbf{W}_{jk}(u_k(t-\tau) - u_j(t)), \quad (18)$$

其中 $i = \sqrt{-1}, j = 1, 2, \dots, N = 989$, \mathbf{W}_{jk} 为权重链接矩阵 [48,49]; $\sqrt{\alpha}$ 与 ω 分别为未耦合时振子的振幅与自然频率; ε 为耦合强度; τ 为时间延迟. 在数值模拟中, 将方程 (18) 改写为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= (\alpha - x_i^2 - y_i^2)x_i - \omega y_i \\ &+ \varepsilon \sum_{j=1}^N \mathbf{W}_{ij}(x_j(t-\tau) - x_i(t)), \\ \dot{y}_i &= \omega x_i + (\alpha - x_i^2 - y_i^2)y_i \\ &+ \varepsilon \sum_{j=1}^N \mathbf{W}_{ij}(y_j(t-\tau) - y_i(t)), \end{aligned} \quad (19)$$

其中 x_i 与 y_i 分别代表 u_i 的实部与虚部. 这里固定 $\alpha = 1.0$ 与 $\omega = 2.0$. 图 11 给出了 $\tau = 0.5$ 与 $\varepsilon = 0.1$ 时的六个典型的遥同步斑图, 相似的斑图也可在其他的参数 τ 与 ε 处发现. 图 11 的第二列与第三列清楚地表明每一个斑图都有两个或更多的中心节点, 与第一列的斑图只有一个中心节点形成了鲜明的对比.

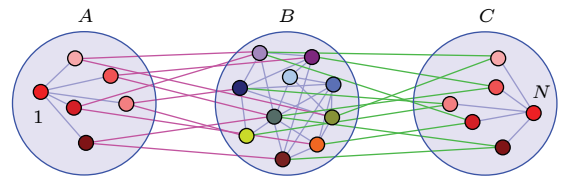


图 10 A 与 C 组之间的遥同步由 B 组的介导来完成. 节点的颜色代表了它们的状态, 可见节点 1 与 N 是完全同步的, 而 B 组中节点的动力学是无关联的. 改编自文献 [61]

Fig. 10. Remote synchronization between node groups A and C mediated by incoherence in group B . The colors of the nodes schematically represent their states, indicating that nodes 1 and N are identically synchronized, while the dynamics of the nodes in B are incoherent. Figure adapted from Ref. [61].

图 11 的发现也不同于文献 [57] 中的遥同步斑图, 因此有必要进一步挖掘. 图 11 的第二列与第三列的一个公共特征是它们的两个中心节点是由一些公共叶子节点相连的. 由此, Kang 等 [62] 提出了一个新的遥同步框架, 见图 12, 其中红、蓝、粉红数字分别代表中心节点、叶子节点与公共叶子节点. 这个模型揭示, 当公共叶子节点的耦合强度较小时, 只能形成单个中心节点的遥同步. 但当公共

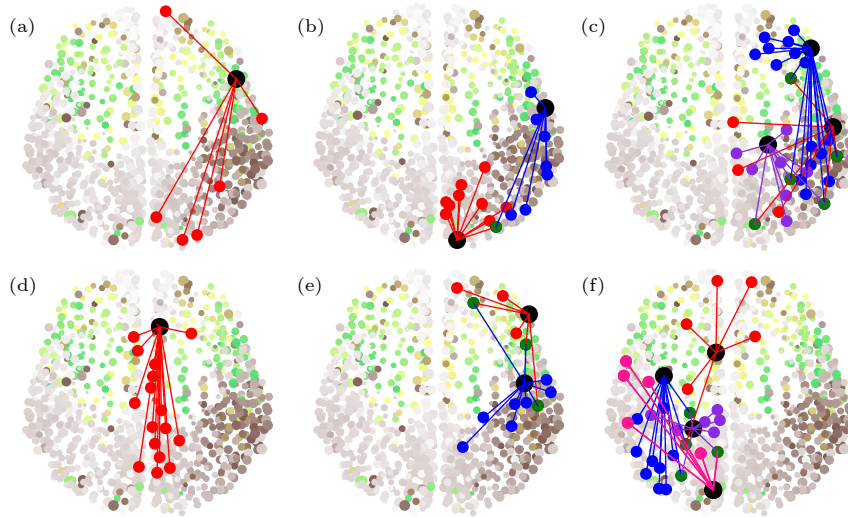


图 11 参数取 $\tau = 0.5$ 与 $\varepsilon = 0.1$ 时的六个典型的遥同步斑图. 每个斑图都是按如下条件挑选的: (i) 在中心节点与叶子节点间没有同步化; (ii) 所有的叶子节点均相互同步化. 改编自文献 [62]

Fig. 11. Six typical patterns of RS for $\tau = 0.5$ and $\varepsilon = 0.1$. Each pattern is chosen by the conditions: (i) There is no synchronization between the hub and its peripheral nodes; (ii) all the peripheral nodes are synchronized each other. Figure adapted from Ref. [62].

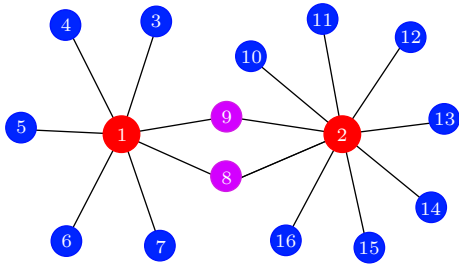


图 12 具有两个中心节点的遥同步新框架示意图, 其中红、蓝、粉红数字分别代表中心节点、叶子节点与公共叶子节点. 改编自文献 [62]

Fig. 12. A schematic figure of the new framework of RS with two hubs, where the nodes with red, blue and pink numbers represent the hub, leaf and common leaf nodes, respectively. Figure adapted from Ref. [62].

叶子节点的耦合强度较大时, 两个遥同步集团可以合并成一个较大的遥同步集团, 此时那两个中心节点同步成为一个同步集团, 而所有的叶子节点成为另一个同步集团. 详情见原文, 这里不展开讨论了.

此外, 还有其他的一些关于遥同步的研究, 比如 Gambuzza 等 [63] 研究了多层网上的遥同步, Punetha 等 [64] 研究了二分网上带时间延迟的遥同步, Leyva 等 [65] 研究了多层对称网络上的遥同步等.

4 集团同步

集团同步表示网络中特定集团内的振子将同步到相同的轨道而不同集团之间的行为则互不相

同. 这种同步集团可以出现在成群的动物中, 其网络为邻居间的视觉连接, 或者由局部通讯网连接的成群的无人驾驶汽车. 集团同步也可以出现在电力网中, 这将是出问题的征兆, 即失去全局同步. 最近的研究表明, 网络拓扑的对称性与同步动力学集团的形成有重要关系 [66–70], 并已为较多的实验证实 [71–74], 王新刚 [70] 对此有一个较全面的综述.

为了说明耦合振子网络中的对称性与集团的概念, 图 13(a) 展示了一个四节点网络, 其中振子是全同的、耦合是双向的 [73]. 这个网络总共有六个对称. 图 13(b) 给出了图 13(a) 中交换节点 1 与 2 的一个反射, 网络结构保持不变. 图 13 (c) 展示了旋转 120° 的网络, 其与原始结构 (图 13(a)) 不可区分. 这些对称性可由邻接矩阵 \mathbf{A} 的对称性来表示, 其元素为 $A_{ij} = 1$ 如果节点 i 与节点 j 相连, 否则 $A_{ij} = 0$. 网络的动力学可写为

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) + \sigma \sum_j A_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}_j), \quad (20)$$

其中 $i = 1, \dots, N$, \mathbf{x}_i 为振子 i 的动力学矢量, \mathbf{F} 为振子的矢量场, \mathbf{H} 为耦合函数. 这个动力学方程也可写成拉普拉斯耦合的形式

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) + \sigma \sum_j L_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}_j), \quad (21)$$

其中拉普拉斯矩阵 $\mathbf{L} = \{L_{ij}\}$, $L_{ij} = A_{ij} - \delta_{ij} \sum_j A_{ij}$. 此时, 矩阵 \mathbf{L} 每行之和等于零, 即节点 i 的输入被对角自耦合平衡了.

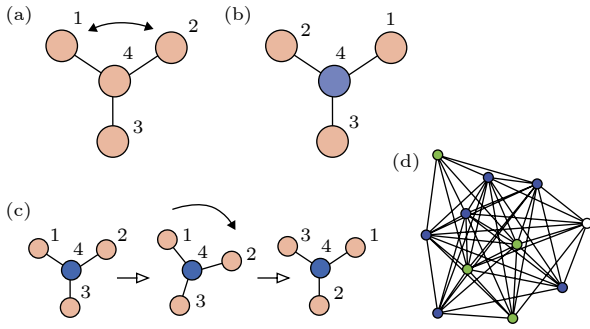


图 13 网络中对称性的例子 (a) 四个全同振子通过三根连线耦合的网络; (b) 一个反射操作后的同一网络; (c) 一个旋转操作后的同一网络; (d) 一个 11 个节点的网络有三个集团 (蓝、绿、白). 改编自文献 [73]

Fig. 13. Examples of symmetries in networks: (a) A network of four identical oscillators coupled through three identical links; (b) the same network after a reflection operation; (c) the same network after a rotation operation; (d) an 11-node network showing three clusters (blue, green, and white). Figure adapted from Ref. [73].

在图 13(a) 的网络中, 节点 1, 2 与 3 有相同的运动方程, 因此如果它们从相同的初始条件出发, 就将被永久地保持同步化. 节点 4 不能与任何其他

节点置换且也不与它们同步, 因此在图 13(b) 与图 13(c) 中将其标为不同的颜色. 这是网络中对称性与动力学间的亲密关系, 它将网络分成了两个集团 1, 2, 3 与 4. 文献 [73] 讨论了对于给定的网络, 如何发现所有可能的集团同步斑图. 其主要结论是邻接矩阵的对称性对应动力学的对称性, 当它们从一个同步态出发, 可置换的节点集构成的集团就将保持同步, 即每个集团的同步态是动力学流不变的. 图 14 给出了所有允许的斑图, 其中属于相同集团的节点标成了同一种颜色.

文献 [68] 指出, 基于集团的坐标变换可以更简单且更快地计算网络的对称性. 图 15 是关于 24 个节点的网络上的 9 个对称性集团, 其中每个集团中的节点具有相同的稳定性, 而不同的集团则稳定性不同, 且这些同步集团可唯一确定. 此外, Dahms^[66] 等考虑了时间延迟对全同振子网络上集体行为的影响, 发现延迟耦合确实可以诱导出不同的同步集团, 且允许集团同步的耦合矩阵在本征值谱上也显示了非常类似的对称性.

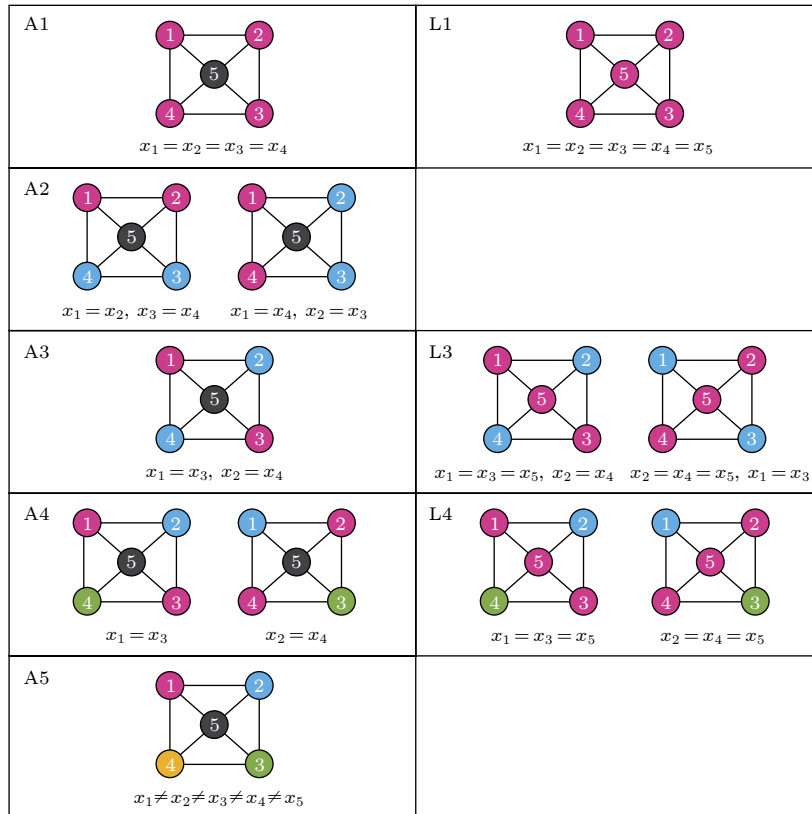


图 14 五个节点的网络中的集团斑图 左边: 当网络连接为邻接矩阵 (方程 (20)) 时所有可能的斑图; 右边: 当网络连接为拉普拉斯矩阵 (方程 (21)) 时额外的斑图. 改编自文献 [73]

Fig. 14. Patterns of clusters in a five-node network. Left: All possible patterns displayed when the network connectivity is given by the adjacency matrix (Eq. (20)); right: Additional patterns displayed when the network connectivity is given by the Laplacian matrix (Eq. (21)). Figure adapted from Ref. [73].

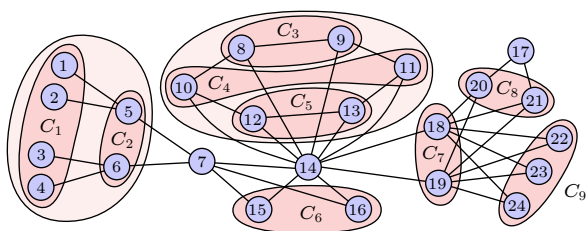


图 15 24 个节点构成的网络中对称集团的分组. 改编自文献 [68]

Fig. 15. Grouping of symmetry clusters in a CS pattern for a 24-node network. Figure adapted from Ref. [68].

5 讨论与展望

至此, 我们完成了对奇异态、遥同步与集团同步这三种部分同步态研究进展的介绍. 从这些研究可见, 它们三者之间既有联系, 也有区别. 首先, 它们三者都是介于完全同步与完全无序之间的中间态, 承担着从无序到同步的过渡任务. 但这种中间态并不是通常那种大家逐渐靠近、序参量逐渐增大的二级相变过程, 而是在位形空间中形成两种性质截然不同的状态且相互共存, 这就比较神奇, 从而成为了它的反直观之处, 同时也成就了它用于解释大脑斑图的特质. 这个特质在奇异态中表现为相互连接的同步组与非同步组的共存, 也可以是分开的多个同步组与非同步组的共存; 在遥同步中表现为不直接相连的分散振子成为了同步态, 而与它们相连的振子, 尤其是中心节点, 却不与它们同步; 在集团同步中表现为具有网络对称性的节点达成了同步, 而不同对称性的集团则成为不同的同步集团, 同步的振子之间可以存在连接, 也可以没有直接连接. 这些不同的表观形式其实可以看成是同一种现象的不同表述, 就像量子力学中不同的表象一样, 供我们在不同的环境下有选择地使用.

除了在表观形式上不相同之外, 它们三者出现的条件也不相同. 奇异态最初要求的条件是非局域耦合, 由衰减核描述. 然后这个条件推广为初始条件的不同, 但非局域耦合的要求适当放宽, 不再要求各个振子的耦合对象均有些不同, 而改为各组内个体耦合的对象完全相同, 但不同组间个体耦合的对象不相同. 再然后进一步推广为延迟系统, 此时所有个体耦合的对象可以完全相同. 遥同步主要讨论的是朗道振子系统, 本质原因是朗道振子可作为线性滤波器来传递不直接相连的节点间的耦合信息, 从而使中心节点周围的叶子节点达到同步. 遥

同步最初是在星形网上进行讨论的, 现已拓展至复杂网络乃至真实的脑网络. 集团同步最初要求的是网络位置完全对称, 这就导致对称性相同的节点具有完全一样的动力学方程, 从而可达到完全同步的动力学行为. 后来这个条件推广为输入量相同即可, 因为所谓对称性保证的实际上是耦合贡献的等同.

事实上, 这三种部分同步并不是完全独立的, 而是都可看成某种局部对称性的体现. 例如奇异态中同步组内的振子实际上具有相同的对称性, 遥同步中围绕中心节点的叶子也具有完全对称的地位, 集团同步就更不用说了, 它的定义就源自对称性. 按照这个局部对称性的特点, 我们其实可以抛开直接相连或不直接相连的具体细节, 而将这三者统称为局部同步态的涌现. 在这个意义上, 就不难理解在某些系统中可以同时出现多种部分同步态. 比如图 11 中的遥同步振子与其他的非同步振子一起就构成了奇异态, 图 12 中的遥同步振子因结构对称也可当作集团同步. 同理, 对于图 15 中的那些同步集团中的振子, 如果它们不直接相连的话, 就是遥同步了, 比如 C_2 中的振子 5 与 6. 这种同时具有多个属性的部分同步在大脑皮层网络中非常普遍, 或者说大脑皮层网就是一个典型的呈现各种各样部分同步的系统.

这三种部分同步态的研究意义就在于它们可以被很好地用来解释大脑高级功能的物理机制, 包括感知、学习与记忆等. 现在已经知道大脑神经网络具有典型的复杂网络特征, 包括度分布的异质性、小世界特征及社团结构等. 正是由于这些特征, 才保证了大脑认知活动期间广泛的斑图, 从而保障了大脑高级功能的实施. 当大脑接收到不同的信号或刺激时, 相应的动力学斑图就会被启动, 或者实现从一个斑图到另一个的转换. 具体表现就是我们观察到的对应奇异态的首晚效应、对应遥同步的分布式计算及对应集团同步的斑图多样性等.

虽然这三种部分同步的研究取得了不错的结果, 在大脑机制的阐述方面也取得了重要的进展, 但对大脑及大脑运行机制的研究依然是个长期而艰巨的任务, 还有许多开放的问题等着我们进一步研究. 下面是根据我们自己的研究经验建议的几个开放问题.

1) 如何将这三种部分同步得到的现有结论充分地用于探索大脑功能的机制, 比如认知、记忆与信号传播等方面.

2) 现有研究大多局限于单层网络. 由于大脑的社区结构特征, 多层复杂网络上的部分同步更值得期待. 文献 [13] 是这样的一个例子, 但更进一步、更深入的探讨还很缺乏.

3) 如何能跳开结构层面的分析, 从更深的层面来揭示出一些更本质的东西, 比如从本征值谱分析的角度来进行分析等. 这方面的一个先期探索是关于本征模与模块化结构间的内在联系 [75].

4) 如何根据这三种部分同步的特征来控制各种神经疾病如帕金森氏病、癫痫、阿尔茨海默病、精神分裂症与脑肿瘤等.

5) 除了这三种典型的部分同步外, 是否还存在其他的部分同步态或者根本就不能归结为部分同步但却是脑功能所必须的状态? 如果有的话, 如何去揭示它们?

我们期待部分同步化的研究在大脑神经元网络的机制与应用方面发挥越来越重要的作用. 希望本综述起到抛砖引玉的作用, 激励出更多、更好的工作.

参考文献

- [1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Liu Z H 2018 *Chaotic Dynamics Foundation and Its Applications in Brain Functions* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [刘宗华 2018 混沌动力学基础及其在大脑功能方面的应用 (北京: 科学出版社)]
- [3] Gray C M, Konig P, Engel A K, Singer W 1989 *Nature* **338** 334
- [4] Hasler M, Maistrenko Y, Popovych O 1998 *Phys. Rev. E* **58** 6843
- [5] Hu G, Zhang Y, Cerdeira H A, Chen S 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 3377
- [6] Zhang Y, Hu G, Cerdeira H A, Chen S, Braun T, Yao Y 2001 *Phys. Rev. E* **63** 026211
- [7] Fu C, Lin W, Huang L, Wang X 2014 *Phys. Rev. E* **89** 052908
- [8] Heisler I A, Braun T, Zhang Y, Hu G, Cerdeira H A 2003 *Chaos* **13** 185
- [9] Kumar P, Verma D K, Parmananda P 2017 *Phys. Lett. A* **381** 2337
- [10] Panaggio M J, Abrams D M 2015 *Nonlinearity* **28** R67
- [11] Majhi., Bera B K, Ghosh D, Perc M 2019 *Phys. Life Rev.* **28** 100
- [12] Majhi S, Perc M, Ghosh D 2016 *Sci. Rep.* **6** 39033
- [13] Kang L, Tian C, Huo S, Liu Z 2019 *Sci. Rep.* **9** 14389
- [14] Roelfsema P R, Engel A K 1997 *Nature* **385** 157
- [15] Vogels T P, Abbott L F 2005 *J. Neurosci.* **25** 10786
- [16] Diesmann M, Gewaltig M, Aertsen A 1999 *Nature* **402** 529
- [17] Benedek M, Bergner S, Konen T, Fink A, Neubauer A C 2011 *Neuropsychologia* **49** 3505
- [18] Ayala G F, Dichter M, Gummit R J, Matsumoto H, Spencer W A 1973 *Brain Res.* **52** 1
- [19] Levy R, Hutchison W D, Lozano A M, Dostrovsky J O 2000 *J. Neurosci.* **20** 7766
- [20] Abrams D M, Strogatz S H 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 174102
- [21] Rattenborg N C, Amlaner C J, Lima S L 2000 *Neurosci. Biobehav. Rev.* **24** 817
- [22] Mathews C G, Lesku J A, Lima S L, Amlaner C J 2006 *Ethology* **112** 286
- [23] Tamaki M, Bang J W, Watanabe T, Sasaki Y 2016 *Curr. Biol.* **26** 1190
- [24] Kuramoto Y, Battogtokh D 2002 *Nonlinear Phenom. Complex Syst.* **5** 380
- [25] Abrams D M, Mirollo R, Strogatz S H, Wiley D A 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 084103
- [26] Ott E, Antonsen T M 2008 *Chaos* **18** 037113
- [27] Ma R, Wang J, Liu Z 2010 *Europhys. Lett.* **91** 40006
- [28] Indic P, Schwartz W J, Paydarfar D 2008 *J. R. Soc. Interface* **5** 873
- [29] Omelchenko O E, Wolfrum M, Yanchuk S, Maistrenko Y L, Sudakov O 2012 *Phys. Rev. E* **85** 036210
- [30] Maistrenko Y, Sudakov O, Osiv O, Maistrenko V 2015 *New J. Phys.* **17** 073037
- [31] Yeldesbay A, Pikovsky A, Rosenblum M 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 144103
- [32] Sethia G C, Sen A, Atay F M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 144102
- [33] Tian C, Cao L, Bi H, Xu K, Liu Z 2018 *Nonlinear Dyn.* **93** 1695
- [34] Zhu Y, Zheng Z, Yang J 2014 *Phys. Rev. E* **89** 022914
- [35] Zheng Z G, Zhai Y 2020 *SCIENTIA SINICA Physica, Mechanica & Astronomica* **50** 010505 (in Chinese) [郑志刚, 翟云 2020 中国科学: 物理学 力学 天文学 **50** 010505]
- [36] Kemeeth F P, Haugland S W, Schmidt L, Kevrekidis I G, Krischer K 2016 *Chaos* **26** 094815
- [37] Omelchenko I, Omelchenko E, Hovel P, Scholl E 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 224101
- [38] Hizanidis J, Kanas V G, Bezerianos A, Bountis T 2014 *Int. J. Bifurcation Chaos* **24** 1450030
- [39] Sakaguchi H 2006 *Phys. Rev. E* **73** 031907
- [40] Olmi S, Politi A, Torcini A 2010 *Europhys. Lett.* **92** 60007
- [41] Santos M S, et al. 2017 *Chaos, Solitons Fractals* **101** 86
- [42] Hizanidis J, Kouvaris N E, Zamora-Lopez G, Diaz-Guilera A, Antonopoulos C G 2016 *Sci. Rep.* **6** 19845
- [43] Tian C, Bi H, Zhang X, Guan S, Liu Z 2017 *Phys. Rev. E* **96** 052209
- [44] Tian C, Zhang X, Wang Z, Liu Z 2017 *Front. Phys.* **12** 128904
- [45] Chouzouris T, Omelchenko I, Zakharova A, et al. 2018 *Chaos* **28** 045112
- [46] Bansal K, Garcia J O, Tompson S H, Verstynen T, Vettel J M, Muldoon S F 2019 *Sci. Adv.* **5** eaau8535
- [47] Huo S, Tian C, Kang L, Liu Z 2019 *Nonlinear Dyn.* **96** 75
- [48] Hagmann P, et al. 2008 *PLoS Biol.* **6** 1479
- [49] Honey C J, et al. 2009 *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **106** 2035
- [50] Tinsley M R, Nkomo S, Showalter K 2012 *Nat. Phys.* **8** 662
- [51] Nkomo S, Tinsley M R, Showalter K 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 244102
- [52] Martens E A, Thutupalli S, Fourriere A, et al. 2013 *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **110** 10563
- [53] Gambuzza L V, Buscarino A, Chossari S, et al. 2014 *Phys. Rev. E* **90** 032905
- [54] Totz J F, Rode J, Tinsley M R, Showalter K, Engel H 2018 *Nat. Phys.* **14** 282
- [55] Ito T, Kulkarni K R, Schultz D H, Mill R D, Chen R H, Solomyak L I, Cole M W 2017 *Nat. Commun.* **8** 1027

- [56] Sporns O 2013 *Curr. Opin. Neurobiol.* **23** 162
- [57] Bergner A, Frasca M, Sciuto G, Buscarino A, Nganga E J, Fortuna L, Kurths J 2012 *Phys. Rev. E* **85** 026208
- [58] Vicente R, Gollo L L, Mirasso C R, Fischer I, Pipa G 2008 *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **105** 17157
- [59] Minati L 2015 *Chaos* **25** 123107
- [60] Nicosia V, Valencia M, Chavez M, Diaz-Guilera A, Latora V 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 174102
- [61] Zhang L, Motter A E, Nishikawa T 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 174102
- [62] Kang L, Wang Z, Huo S, Tian C, Liu Z 2020 *Nonlinear Dyn.* **99** 1577
- [63] Gambuzza L V, Frasca M, Gomez-Gardenes J 2015 *Europhys. Lett.* **110** 20010
- [64] Punetha N, Ujjwal S R, Atay F M, Ramaswamy R 2015 *Phys. Rev. E* **91** 022922
- [65] Leyva I, Sendina-Nadal I, Sevilla-Escoboza R, Vera-Avila V P, Chholak P, Boccaletti S 2018 *Sci. Rep.* **8** 8629
- [66] Dahms T, Lehnert J, Scholl E 2012 *Phys. Rev. E* **86** 016202
- [67] Jalan S, Singh A, Acharyya S, Kurths J 2015 *Phys. Rev. E* **91** 022901
- [68] Cho Y S, Nishikawa T, Motter A E 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 084101
- [69] Siddique A B, Pecora L, Hart J D, Sorrentino F 2018 *Phys. Rev. E* **97** 042217
- [70] Wang X G 2020 *SCIENTIA SINICA Physica, Mechanica & Astronomica* **50** 010503 (in Chinese) [王新刚 2020 中国科学: 物理学 力学 天文学 **50** 010503]
- [71] Williams C R S, Murphy T E, Roy R, Sorrentino F, Dahms T, Scholl E 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 064104
- [72] Pecora L M, Sorrentino F, Hagerstrom A M, Murphy T E, Roy R 2014 *Nat. Commun.* **5** 4079
- [73] Sorrentino F, Pecora L M, Hagerstrom M, Murphy T E, Roy R 2016 *Sci. Adv.* **2** e1501737
- [74] Cao B, Wang Y F, Wang L, Yu Y Z, Wang X G 2018 *Front. Phys.* **13** 130505
- [75] Wang R, Lin P, Liu M, Wu Y, Zhou T, Zhou C 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 038301

SPECIAL TOPIC—Statistical physics and complex systems

Partial synchronization in complex networks: Chimera state, remote synchronization, and cluster synchronization*

Wang Zhen-Hua Liu Zong-Hua[†]*(School of Physics and Electronic Science, East China Normal University, Shanghai 200241, China)*

(Received 26 December 2019; revised manuscript received 14 February 2020)

Abstract

In recent years, the study of partial synchronization of coupled oscillators in complex networks has attracted great attention. The underlying reason is both the extensive existence of the patterns of partial synchronization in brain network and their close relationship to brain functions of cognition and memory. In this paper, we briefly review the research progress in this field. According to the researches by different groups, we classify them as three types, i.e. chimera state, remote synchronization, and clustering synchronization. We mainly discuss the conditions of these three states, as well as their models, detections, and their applications in biology. We discuss the relationship among the three types of states and give some outlooks for future studies.

Keywords: complex network, chimera state, remote synchronization, cluster synchronization**PACS:** 89.75.Hc, 05.45.Xt, 68.18.Jk**DOI:** 10.7498/aps.69.20191973

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11675056, 11835003).

† Corresponding author. E-mail: zhliu@phy.ecnu.edu.cn