

交错跃迁 Hofstadter 梯子的量子流相*

刘彪¹⁾²⁾ 周晓凡^{1)2)†} 陈刚^{1)2)3)‡} 贾锁堂¹⁾²⁾

1) (山西大学激光光谱研究所, 量子光学与光量子器件国家重点实验室, 太原 030006)

2) (山西大学, 极端光学协同创新中心, 太原 030006)

3) (山东师范大学物理与电子科学学院, 光场调控及应用中心, 济南 250358)

(2019年12月25日收到; 2020年2月10日收到修改稿)

为玻色 Hofstadter 梯子模型引入交错跃迁, 来扩展模型支持的量子流相. 基于精确对角化和密度矩阵重整化群计算发现, 无相互作用时, 系统中包含横流相、涡旋相和纵流相; 横流相来自均匀跃迁时 Hofstadter 梯子模型的 Meissner 相, 纵流相是交错跃迁时才可见的流相. 强相互作用极限下系统的超流区也包含横流相、纵流相和涡旋相, 但存在更多的相变级数; 超流区的横流相、纵流相之间存在相变但 Mott 区的不存在, 把 Mott 区的“横、纵流相”称为 Mott-均匀相, 在 Mott 区只存在均匀相和涡旋相. 跃迁的交错会压缩涡旋相存在的区域, 使 Mott 区最终只剩下均匀相; 跃迁的交错不仅能驱动 Mott-超流相变, 还使磁通的变化也能够驱动系统的 Mott-超流相变. 对这一系统的研究丰富了磁通系统中的量子流相, 同时为研究拓扑流特性提供了模型支持.

关键词: 量子相变, 数值模拟, Hofstadter 梯子, 手性流**PACS:** 05.30.Rt, 21.60.Fw, 05.30.Jp, 74.25.Sv**DOI:** 10.7498/aps.69.20191964

1 引言

打破时间反演对称性的准一维梯子系统因其与量子霍尔效应^[1]、拓扑绝缘体^[2-4]间的联系, 并作为实现手性流^[5]的最小系统, 近年来在凝聚态物理和冷原子量子模拟实验中备受关注. 冷原子实验中用超晶格、数码显微镜分离^[6]从高维晶格中分离晶格^[7-13], 以及基于一维系统用原子内态构建人造维度来构建梯子系统^[14-18]; 使用运动光场、激光辅助跃迁^[7]或拉曼光驱动内态耦合^[14]实现人造磁通^[19], 以此来模拟磁场下的梯子系统. 实验中观察到了手性边界态^[15], 淬火演化中手性流的产生过程^[7], 以及 Meissner 相到涡旋相的流相相变^[8].

Hofstadter 梯子模型是描述准一维梯子晶格

中均匀磁通下全同粒子物理的紧束缚模型. 作为 Hofstadter 模型^[20-22]的准一维情形, 它能用研究一维系统的理论工具来求解, 以展示其强相互作用时的多体物理. 使用玻色化^[23]解析方法和密度矩阵重整化群^[24-26](DMRG)数值方法, 能展示 Hofstadter 梯子在玻色或费米强相互作用时会产生类似二维情形^[27-30]的分数霍尔态^[31-33]. 玻色强相互作用时, 除了超流区, 甚至 Mott 绝缘体也会产生 Meissner 和涡旋流相^[34-36]. 流是系统存在磁通时出现的物理量, Meissner 流以正对着相反的流出现在梯子的边界上, 涡旋流以局部旋涡的形式出现在梯子的内部和边界上, 两种流都具有手性来抵抗外磁场, 并在超导体中有对应的物理现象^[37-39]. Meissner 和涡旋流相存在于 Hofstadter 梯子的无相互作用、超流、Mott 全部的相区中, 是模型中极

* 国家重点研发计划 (批准号: 2017YFA0304203)、国家自然科学基金 (批准号: 11674200, 11804204)、教育部长江学者和创新团队发展计划 (批准号: IRT13076) 和山西省“1331 工程”重点学科建设计划资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xiaofanlaohu@163.com

‡ 通信作者. E-mail: chengang971@163.com

为广泛的性质,然而人们在 Hofstadter 梯子模型中对流相的研究仅限于这两种,所以证明在 Hofstadter 梯子中引入交错跃迁能产生更丰富的流相,从而为流相的广泛研究提供模型支持.

交错跃迁是将 Hofstadter 梯子长方向的跃迁幅度从均匀的改成 t_1, t_2 交错的 (如图 1), 把均匀跃迁改成交错跃迁来自 SSH 模型 [40,41] 的启发,这样做能否在模型中产生新的拓扑效应还是未知的,但能产生更多的流相却是已知的. 我们使用精确对角化 [42] 和密度矩阵重整化群理论地分析了 $t_1 \geq t_2$ 无相互作用和强相互作用的情形,观察到交错的跃迁强度会使 Meissner 相和涡旋相流的图案变形,产生新的流图案,结合相变行为分出的相区域,可将新的相叫作横流相、纵流相和涡旋相,这些流相广泛存在于交错跃迁时的无相互作用和强相互作用超流区. 交错跃迁时 Mott 区的流相拥有很独特的流特征和相变特征,可以将其称为 Mott-均匀相,通过探讨 Mott-均匀相从均匀跃迁到交错跃迁的过渡过程,可以发现交错跃迁对 Mott 相、超流相和涡旋相的存在都有显著影响.

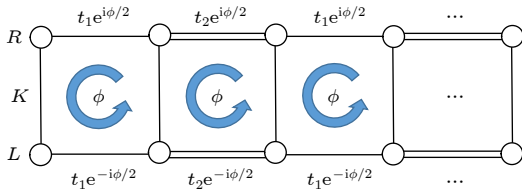


图 1 哈密顿量中跃迁项示意图

Fig. 1. Sketch of the hopping term of the Hamiltonian.

2 哈密顿量和流算符

交错跃迁的 Hofstadter 梯子的哈密顿量为

$$\begin{aligned}
 H = & -t_1 \sum_{l_{\text{odd}}} \left(e^{-i\phi/2} \mathbf{a}_{l_{\text{odd}}+1;L}^+ \mathbf{a}_{l_{\text{odd}};L} \right. \\
 & \left. + e^{i\phi/2} \mathbf{a}_{l_{\text{odd}}+1;R}^+ \mathbf{a}_{l_{\text{odd}};R} + \text{h.c.} \right) \\
 & -t_2 \sum_{l_{\text{even}}} \left(e^{-i\phi/2} \mathbf{a}_{l_{\text{even}}+1;L}^+ \mathbf{a}_{l_{\text{even}};L} \right. \\
 & \left. + e^{i\phi/2} \mathbf{a}_{l_{\text{even}}+1;R}^+ \mathbf{a}_{l_{\text{even}};R} + \text{h.c.} \right) \\
 & -K \sum_l \left(\mathbf{a}_{l;R}^+ \mathbf{a}_{l;L} + \text{h.c.} \right) \\
 & + (U/2) \sum_l \sum_{u=L,R} \mathbf{n}_{l;u} (\mathbf{n}_{l;u} - 1), \quad (1)
 \end{aligned}$$

其中, \mathbf{a} 和 \mathbf{a}^+ 为玻色产生湮灭算符; l 为梯子横栏数; 下标 $l_{\text{odd}}, l_{\text{even}}$ 分别为奇数、偶数横栏数. t_1, t_2 为奇偶键的跃迁系数, $t_1 = t_2$ 为均匀跃迁, $t_1 \neq t_2$ 为交错跃迁, 均匀跃迁时模型为标准的 Hofstadter 梯子. 哈密顿量前三项为跃迁项 (图 1), 第四项为玻色排斥相互作用项.

流是描述模型中各种相的关键物理量 [33], (1) 式中各个键上的流定义为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{j}_{l_{\text{odd}}+1, l_{\text{odd}}; L, L} &= it_1 e^{-i\phi/2} \mathbf{a}_{l_{\text{odd}}+1; L}^+ \mathbf{a}_{l_{\text{odd}}; L} + \text{h.c.}, \\
 \mathbf{j}_{l_{\text{odd}}+1, l_{\text{odd}}; R, R} &= it_1 e^{i\phi/2} \mathbf{a}_{l_{\text{odd}}+1; R}^+ \mathbf{a}_{l_{\text{odd}}; R} + \text{h.c.}, \\
 \mathbf{j}_{l_{\text{even}}+1, l_{\text{even}}; L, L} &= it_2 e^{-i\phi/2} \mathbf{a}_{l_{\text{even}}+1; L}^+ \mathbf{a}_{l_{\text{even}}; L} + \text{h.c.}, \\
 \mathbf{j}_{l_{\text{even}}+1, l_{\text{even}}; R, R} &= it_2 e^{i\phi/2} \mathbf{a}_{l_{\text{even}}+1; R}^+ \mathbf{a}_{l_{\text{even}}; R} + \text{h.c.}, \\
 \mathbf{j}_{l, l; R, L} &= iK \mathbf{a}_{l; R}^+ \mathbf{a}_{l; L} + \text{h.c.} \quad (2)
 \end{aligned}$$

交错跃迁时模型中出现的相在腿间都会有流, 所以均匀跃迁时的腿间是否有流的分相依据不再适用, 需要使用流和密度空间分布均匀性来区分基态是否是涡旋态. 下面定义流的周期 2 不均匀性、密度不均匀性. 流图案沿着梯子长方向周期为 2, 即在各个元胞中一样分布时周期 2 不均匀性为 0, 密度在所有格点相等时密度不均匀性为 0, 二者分别量化为

$$\sum_{u=L,R} (\text{var}\{\langle \mathbf{j}_{l_{\text{odd}}+1, l_{\text{odd}}; u, u} \rangle\} + \text{var}\{\langle \mathbf{j}_{l_{\text{even}}+1, l_{\text{even}}; u, u} \rangle\}) + \text{var}\{\langle \mathbf{n}_{l; u} \rangle\}, \quad (3)$$

其中 $u = L, R$, var 是方差, $\{\}$ 是集合. 流有为 2 的周期性的相被定义为流均匀的相, 密度全格点均匀的相定义为密度均匀的相, 这两个性质在系统中是共生的, 没有这两种均匀性的相则是涡旋相. 最后, 为了区分均匀相中存在的两种相, 还需要定义平均流, 分别为横向手性流 $j_{c//}$ 和纵向手性流 $j_{c\perp}$:

$$\begin{aligned}
 j_{c//} &= \frac{1}{L} \left(\sum_l \langle \mathbf{j}_{l+1, l; L, L} \rangle - \sum_l \langle \mathbf{j}_{l+1, l; R, R} \rangle \right) \\
 &= \frac{2}{L} \frac{\partial \langle \mathbf{H} \rangle}{\partial \phi}, \\
 j_{c\perp} &= \frac{1}{L} \left(\sum_{l_{\text{odd}}} \langle \mathbf{j}_{l_{\text{odd}}, l_{\text{odd}}; R, L} \rangle - \sum_{l_{\text{even}}} \langle \mathbf{j}_{l_{\text{even}}, l_{\text{even}}; R, L} \rangle \right). \quad (4)
 \end{aligned}$$

3 无相互作用

无相互作用 ($U = 0$) 时, 可以将哈密顿量 (1) 式傅里叶变换到动量空间, 得到动量空间哈密顿量:

$$H = \sum_k \mathbf{a}_k^+ H_k \mathbf{a}_k, \quad (5)$$

(5) 式中, $\mathbf{a}_k^+ = (\mathbf{a}_{k;\text{odd};L}^+, \mathbf{a}_{k;\text{even};L}^+, \mathbf{a}_{k;\text{odd};R}^+, \mathbf{a}_{k;\text{even};R}^+)$, $\mathbf{a}_{k;\sigma;u}^+ = \left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right) \sum_{l\sigma} e^{ikl} \mathbf{a}_{l\sigma;u}^+$, σ 为 odd 或 even, u 为 L 或 R , M 为元胞数,

$$\mathbf{H}_k = \begin{pmatrix} 0 & A_k & -K & 0 \\ A_k^* & 0 & 0 & -K \\ -K & 0 & 0 & B_k \\ 0 & -K & B_k^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

其中 $A_k = -t_1 e^{i\phi/2} - t_2 e^{-i\phi/2} e^{-ik}$, $B_k = -t_1 e^{-i\phi/2} - t_2 e^{i\phi/2} e^{-ik}$.

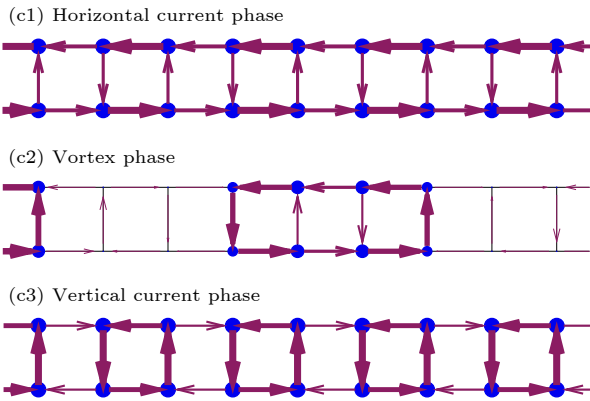
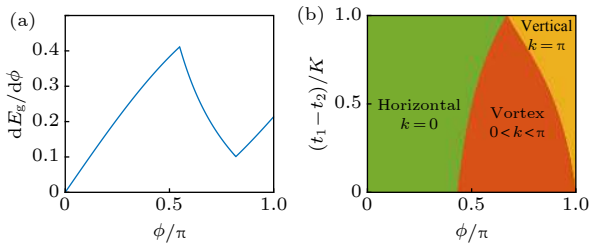


图 2 (a) 用来识别相变的基态能导数的突变, 数据取自 $t_1/K = 1$, $t_2/K = 0.3$; (b) 无相互作用相图; (c1)—(c3) 区分三种相的流图案. 图中箭头表示流, 点表示密度, 箭头的方向和粗细代表流的方向和强度, 点的大小表示密度的大小, 箭头的粗细和点的大小都已经除以当组最大的流或密度归一. 数据取自 $t_1/K = 1$, $t_2/K = 0.3$, $\phi/\pi = 0.1, 0.6, 0.9$, 精确对角化

Fig. 2. (a) Singularities in derivative of ground state energy indicate phase transitions. Data is from $t_1/K = 1$, $t_2/K = 0.3$; (b) phase diagram for non-interacting case; (c1)–(c3) the current pattern used to distinguish the 3 phases. Direction and thickness of an arrow indicate the direction and strength of the current on the plotted bond. The strengths are normalized by the strongest local current. The sizes of the points indicate the density strengths and are normalized by the largest density. The current patterns are from ED calculations for $\phi/\pi = 0.1, 0.6, 0.9$ when $t_1/K = 1$, $t_2/K = 0.3$.

根据基态能突变的相变行为 (图 2(a)), 可以将系统分为三个相: 横流相、涡旋相和纵流相, 分别对应最低能带最小值的不同 k 位置 (图 2(b)). 横、纵流态的流分布都具有 2 的周期, 体密度全格点均匀分布, 横流相横向的流强于纵向的流, 纵流相纵向的流强于横向的流; 涡旋相的流分布不具有为 2 的周期性 (图 2(c1)—图 2(c3)). 横流相和纵流相的基态不简并, 涡旋相的基态是二重简并的. 横流相到涡旋相的相变和纵流相到涡旋相的相变都是二阶相变, 其基态能对参数二阶导不连续. 能引起这些相变的, 可以是交错跃迁, 也可以是磁通 ϕ 或者腿间跃迁系数 K .

横流相、涡旋相和纵流相之间的相变还可用最近邻内积 $|\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|$ 来断定, 最近邻内积是数值上连续均匀扫描模型参数、计算基态时, 最相邻参数基态间内积的模 (文中内积的模简称为内积). 如图 3(a) 所示, 发生相变时, 基态之间的最近邻内积也会突变, 系统进入涡旋相后最近邻内积会突变为 0 并振荡, 最近邻内积能找到和手性流计算能够

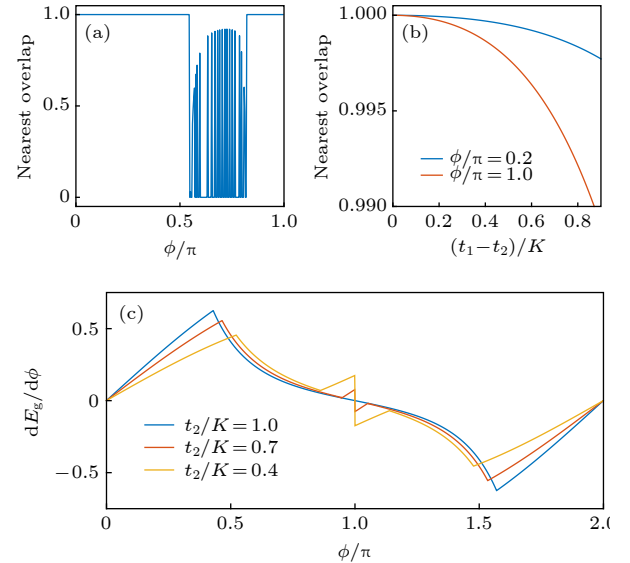


图 3 (a) 无相互作用时扫描 ϕ 计算出的最近邻内积, 数据取自 $t_1/K = 1$, $t_2/K = 0.3$; (b) 保持 $t_1/K = 1$, 逐渐改变 t_2/K 时, 横流相和纵流相的态和 $t_1/K = t_2/K = 1$ 时态的内积; (c) 一般的, 系统在 $\phi = \pi$ 处整个流图案的流会逆转方向, 交错跃迁会让流换向以一阶相变的形式进行, 数据取自 $t_1/K = 1$

Fig. 3. (a) Nearest overlaps from ED calculations. Data is from $t_1/K = 1$, $t_2/K = 0.3$; (b) when $t_1/K = 1$, as t_2/K decays, the overlap with $t_1/K = t_2/K = 1$ state decays from 1 smoothly; (c) generally all local currents in the system reverse sign in $\phi = \pi$. The staggered hopping makes the process the first order phase transition. Data is from $t_1/K = 1$.

得到一致的相变临界点. 此外, 内积能说明交错跃迁时态的起源. 接近 Meissner 的基态与 Meissner 态内积接近 1 而没有突变, 并且之后缓缓变小 (图 3(b)), 结合此时横向手性流的平缓变化, 说明此区域从 $t_1 = t_2$ 到 $t_1 \neq t_2$ 没有相变, 横流相是均匀跃迁 ($t_1 = t_2$) 时的 Meissner 相渐变过来的. Meissner 态连续变化的过程从观察到的流图案上可以理解: 为 t_2 减小时通过梯子长方向的流受到阻隔, 为了依旧能抵抗外磁场, 流改从横栏间经过形成横流态. 同样的推理能说明纵流态是从均匀跃迁时 $\phi = \pi$ 处的单个点渐变过来的, 但事实上这个态以前没有被关注过, 是交错跃迁 ($t_1 \neq t_2$) 扩大了其相区域才使我们注意到它. 另外, 磁通 ϕ 经过 π 时, 流的方向会反向翻转, 和均匀跃迁时的平缓过渡不同的是, 交错跃迁时的流反向过程是剧烈的一阶相变过程 (图 3(c)).

4 强相互作用

有相互作用时, 交错跃迁会产生更为丰富的多体物理效应. 使用 DMRG 方法能计算强相互作用极限 $U \rightarrow \infty$ (hard core Boson, HCB) 下系统的基态, 归纳其全部的量子相. 接下来先展示交错跃迁时的量子相, 再展示其中 Mott 区域独特的量子相从均匀跃迁到交错跃迁的过渡过程.

4.1 交错跃迁时的量子相

选取 $t_1/K = 1$, $t_2/K = 0.3$ 来展示交错跃迁时的量子相, 相图见图 4(a). 此情形下 $n = 0.25$ 的倍数填充会产生 Mott 相, 其余填充为超流相. 超流相之中也分为横流相、纵流相和涡旋相, 对应流和密度的特征和无相互作用时一样. 超流区的中部出现了一个三相汇聚的区域, 靠近 $n = 0$ 的区域横流相需通过涡旋相再到达纵流相, 接近 $n = 0.25$ 的区域横流相直接相变成纵流相. 有趣的是, 横流相直接相变成纵流相的边界在数值上是一条很精确的直线, 此区域内不论填充是多少, 系统在相同的 ϕ 处发生横流相-纵流相相变.

有相互作用时可以用中心荷 (central charge) 识别不同的相. 中心荷描述了无能隙模式 (gapless mode) 的数目, 可以从基态的纠缠熵 (Von Neumann entropy) 分布中拟合得到 [43–45], 为了减小纠缠熵的额外振荡对拟合效果的影响, 根

据文献 [46] 将振荡解释为切割处的跃迁能量, 改进拟合公式:

$$S(j) = \frac{c}{6} \ln [d(j)] + At_j \left\langle e^{-i\phi/2} b_{L;j} b_{L;j+1} + e^{i\phi/2} b_{R;j} b_{R;j+1} + \text{h.c.} \right\rangle + B, \quad (7)$$

其中 $d(j) = (L/\pi) \sin(\pi j/L)$, c 为中心荷, A, B 为待定常数, L 为系统一分为二左边的长度, S 为对应的纠缠熵, 开边界时公式的前导是 $c/6$, 周期边界时是 $c/3$. DMRG 计算纠缠熵比计算局域量需要更大的态数 (如开边界时态数达到了 800); 模型中使用更大的系统尺寸能发现中心荷会趋于变成整数. 将 DMRG 得到的纠缠熵分布数据用上述公式拟合 (如图 4(b)), 得到超流区的横流相 $c = 1$, 涡旋相 $c = 2$, 纵流相 $c = 1$, 这和均匀跃迁时超流-Meissner 相 $c = 1$, 超流-涡旋相 $c = 2$ 的结果是类似的.

超流区横流相-纵流相之间的相变和涡旋相到横、纵流相之间的相变呈现不同的相变类型. 横流相直接相变成纵流相时, 手性流 (正比于基态能量的一阶导) 会直接突变, 因此这是一阶相变 (图 4(c)); 进出涡旋相时, 系统会发生二阶相变. 不论 Mott 还是超流, 和无相互作用时一样, 在交错跃迁、 ϕ 越过 π 时的流换向都会以一阶相变的形式进行. 另外, 内积的计算表明, 超流-横流态是从超流-Meissner 态平缓形变过来的. 但是纵流区靠近流换向相变处 DMRG 难以收敛, 涡旋相区域基态会振荡, 难以证明这两个相起源于均匀跃迁时的相.

图 4(a) 的相图中, Mott 和超流是通过在巨正则系综中扫描 $n(u)$ [36] 得到的, $n = N/(2L)$, u 是化学势. 但交错跃迁时 $n(u)$ 曲线不再有能识别相变的突变 (cusp), 只能使用平均手性流或者最近邻内积 (图 4(d)) 得到各种流相的相边界, 后二者得到的相边界是一致的. 另外在 $0.25 \leq n \leq 0.5$ 的区域内, 相和图 4(a) 中的相大致关于 $n = 0.25$ 线镜像对称, 但相边界稍微有左移. 我们也对 $t_1/K = 1$, $t_2/K = 0.5$ 时的相图进行了同样的计算, 所得的相一致, 只是相边界有移动.

4.2 均匀跃迁到交错跃迁的过渡过程

接下来论述交错跃迁较强时的 Mott 相, 再展示其是如何从均匀跃迁时过渡而来的. 均匀跃迁时, Mott 线出现在 $n = 0.5$ 的整数倍填充上, 其

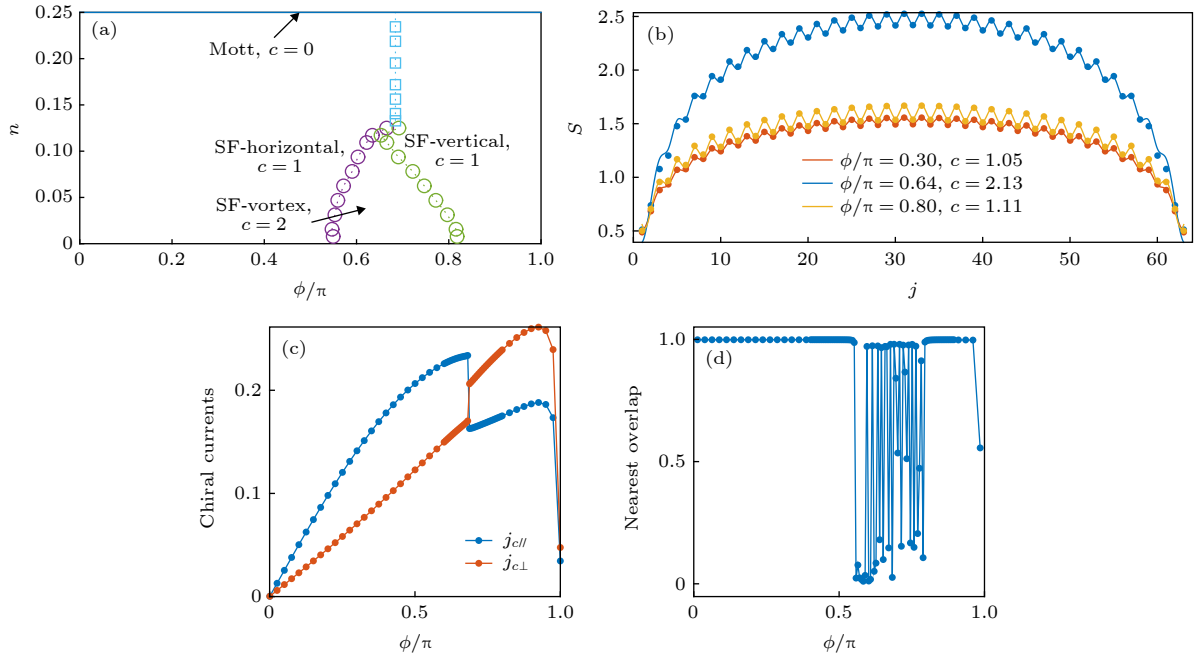


图 4 (a) $t_1/K = 1, t_2/K = 0.3$ 强相互作用极限 (HCB) 相图, $n = N/(2L)$ 为填充; (b) 该相图中三个相对应的纠缠熵分布与拟合结果, $\phi/\pi = 0.3, 0.64, 0.8$ 分别取自横流相、涡旋相和纵流相, 散点是有限尺寸系统中计算的纠缠熵 (S), 实线和中心荷 (c) 是将散点用公式 (7) 拟合的结果. 交错跃迁导致了纠缠熵空间分布的起伏, 数据取自周期边界, $L = 64, N = 12$; (c) 横流相-纵流相相变时横向手性流和纵向手性流的突变, 突变后二者强弱交换; 数据取自 $L = 64, N = 25$, 在手性流的计算中为了减小开边界带来的边界效应, 只截取了中间 $L/2$ 部分; (d) 横流相-涡旋相-纵流相相变; 扫描 ϕ 时, 最近邻内积进入涡旋相时会突变, 并且数值上类似于无相互作用时一样振荡; 数据取自 $N = 4$

Fig. 4. (a) Phase diagram for HCB when $t_1/K = 1, t_2/K = 0.3, n = N/(2L)$; (b) VN entropy and the corresponding fitted central charge for three phases in the phase diagram above. $\phi/\pi = 0.3, 0.64, 0.8$ are from horizontal current, vortex and vertical current phase respectively. The points are VN entropy data in PBC finite system. Solid lines and central charge are fitted from formula (7). The staggered hopping has made the VN entropy also staggered. Data is from $L = 64, N = 12$; (c) horizontal current phase to vertical current phase transition for $L = 64, N = 25$. The average horizontal current and average vertical current will swap their strong and weak relations in the transition point. In order to reduce the boundary effect in average currents, we used the $L/2$ part in the middle of the ladder; (d) horizontal current to vortex and vortex to vertical current phase transition. The nearest overlap shows that in horizontal and vertical current phases the ground state changes smoothly, and numerically oscillates in the vortex phase. Data is from $N = 4$.

$n = 0.5$ Mott 线上存在 Mott-Meissner 相和 Mott-涡旋相. 但交错跃迁时的 Mott 态与之相比很奇怪: $t_1/K = 1, t_2/K = 0.3$ 相图中 $n = 0.25$ Mott 线上不包含涡旋相, 和均匀跃迁时不同, 这条线上只存在一个相, 这个相中心荷为 0, 流和密度均匀; 另外从流的图案和相变特征来看, 这个 Mott 相不分横、纵流相, 其基态从横流态不经相变地变成前面定义的纵流态 (图 5(c)), 这也和交错跃迁时的超流区不同, 令人不解. 因此改变 t_1, t_2 的差, 观察这条 Mott 线是如何从均匀跃迁时转变过来的.

转变过程涉及超流 (SF)-Mott 相变, 需要引入物理量电荷能隙 Δ (chargegap), 电荷能隙是系统产生粒子-空穴对所需的能量 [47], 超流-Mott 相变能用电荷能隙是否为 0 展示. 在热力学极限下, 超

流区电荷能隙为 0, Mott 区非 0. 将有限尺寸 DMRG 得到的电荷能隙外推到热力学极限, 通过观察电荷能隙发现, 取 $n = 0.25$ 填充, 系统在 t_1, t_2 差别大时为 Mott 相, t_1, t_2 差别小时为超流相, 交错跃迁的变强导致了超流到 Mott 的相变 (图 5(a)). 交错跃迁越强电荷能隙越大, 这和无相互作用时能带能隙的经验是一致的 [48]. 是否是涡旋相是用第 2 节 (3) 式中流的周期 2 均匀性来衡量的 (图 5(b)). 涡旋相只存在于交错跃迁弱的区域, 而交错跃迁足够强, 如之前论述的 $t_1/K = 1, t_2/K = 0.3$ 时, 系统将不存在涡旋相. 尽管超流区中横、纵流相间以一阶相变分隔, 但在 Mott 区二者间不存在相变 (如图 5(c)), 所以将 Mott 区的这些均匀相称为 Mott-均匀相.

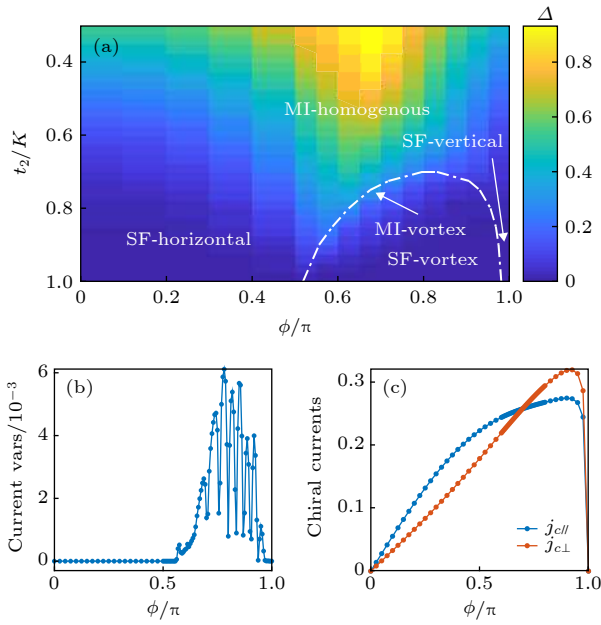


图 5 (a) $n = 0.25$ 相图, $t_1/K = 1$, 虚线圈出的是 vortex 相; (b) 相图中均匀相与涡旋相是用量化的流的周期 2 不均匀性区分的, 数据取自 $t_1/K = 1$, $t_2/K = 0.9$; (c) $t_1/K = 1$, $t_2/K = 0.3$ 的 $n = 0.25$ Mott 线, 系统基态平缓地从横流相变成纵流相, 这个过程中流图案的周期一直为 2

Fig. 5. (a) Phase diagram for $n = 0.25$ filling when $t_1/K = 1$; (b) the homogenous phase and vortex phase are distinguished from the inhomogeneity of densities and currents. Data is from $t_1/K = 1$, $t_2/K = 0.9$; (c) the $n = 0.25$ Mott line for $t_1/K = 1$, $t_2/K = 0.3$. The average vertical current surpasses the average horizontal current smoothly, during the process the current patterns have perfect periodicity of 2 and the density is homogenous.

由于数值上难以用电荷能隙得到清晰的 Mott-超流相边界, 下面进一步通过取散点计算中心荷来确定 $n = 0.25$ Mott、超流模糊边界两边各种流相的存在. 可以发现 Δ 小的深处的均匀相 $c = 1$, Δ 大的深处的均匀相 $c = 0$, Δ 大的深处的涡旋相 $c = 1$, Δ 小的深处的涡旋相 $c = 2$ (表 1), 这和均匀跃迁时的超流-Meissner、Mott-Meissner、Mott-涡旋相、超流-涡旋相的中心荷 [36] 规律——各种流相在 Mott 中的中心荷比在超流中少 1——是一致的. 系统在超流区存在横、纵流相, 涡旋相的基础上, 在 Mott 区额外分出了 Mott-均匀和 Mott-涡旋相. $n = 0.25$ 情形中, 交错跃迁弱时改变磁通 ϕ , 系统存在丰富的相变行为, 其中改变磁通能引起 Mott-超流相变, 还是均匀跃迁时不存在的现象. 但交错跃迁强时, 系统就只剩下 Mott-均匀相, 改变 ϕ 不再产生相变了.

表 1 在有代表性的区域取点, 精确计算中心荷 (c) 来验证各个流相的存在, 系统取周期边界来减小纠缠熵振荡. 表格列出了散点在相图中的位置, 对这些点的电荷能隙和流相性质的判断, 以及对应的中心荷判据, $L = 64-100$, $t_1/K = 1$

Table 1. PBC central charges (c) are accurately checked in several points in typical regions. The table has listed the points' position in the phase diagram, the judged charge gap and current phase properties, and the corresponding central charge evidence, $L = 64-100$, $t_1/K = 1$.

$(t_2/K, \phi/\pi)$	Region in phase diagram	c
(0.9000, 0.1000)	$\Delta = 0$, not vortex	1.00
(0.9000, 0.8000)	$\Delta = 0$, vortex	2.00
(0.8500, 0.5000)	$\Delta > 0$, not vortex	0.01
(0.8500, 0.6125)	$\Delta > 0$, vortex	0.98
(0.8000, 0.9750)	$\Delta = 0$, not vortex	1.02

5 总结

本文研究交错跃迁时 Hofstadter 梯子模型的流相, 着重关注系统与均匀跃迁时的不同. 无相互作用时, 系统会产生横流相、纵流相、涡旋相三种相, 横流相、纵流相是跃迁变得交错的过程中态连续变化产生的. 强相互作用时超流区也分为这些相, 但拥有更丰富的相变类型; 以 $n = 0.25$ 为例来展示交错跃迁时的 Mott 相, 能发现涡旋相仅仅存在于交错跃迁弱的区域, 交错跃迁的变强会渐渐压缩涡旋相存在的区域, 导致最终产生的 Mott 区不包含涡旋相; 这个 Mott 区不存在相变来区分横流相、纵流相, 因此叫作 Mott-均匀相; 交错跃迁除了本身能驱动 Mott-超流相变外, 还使系统改变磁通时能驱动 Mott-超流相变. 对这一模型的研究丰富了流相的种类, 为实现人造规范场的各种新颖平台 [19,49,50] 中手性流的进一步的研究提供了基础.

参考文献

- [1] Thouless D J, Kohmoto M, Nightingale M P, DenNijs M 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 405
- [2] Kane C L, Mele E J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 146802
- [3] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045
- [4] Qi X L, Zhang S C 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1057
- [5] Hügel D, Paredes B 2014 *Phys. Rev. A* **89** 023619
- [6] Zupancic P, Preiss P M, Ma R C, Lukin A, Tai M E, Rispoli M, Islam R, Greiner M 2016 *Opt. Express* **24** 13881
- [7] Tai M E, Lukin A, Rispoli M, Schittko R, Menke T, Borgnia D, Preiss P M, Grusdt F, Kaufman A M, Greiner M 2017 *Nature* **546** 519

- [8] Atala M, Aidelsburger M, Lohse M, Barreiro J T, Paredes B, Bloch I 2014 *Nat. Phys.* **10** 588
- [9] Aidelsburger M, Atala M, Lohse M, Barreiro J T, Paredes B, Bloch I 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 185301
- [10] Miyake H, Siviloglou G A, Kennedy C J, Burton W C, Ketterle W 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 185302
- [11] Aidelsburger M, Lohse M, Schweizer C, Atala M, Barreiro J T, Nascimbène S, Cooper N R, Bloch I, Goldman N 2015 *Nat. Phys.* **11** 162
- [12] Jiménez-García K, LeBlanc L J, Williams R A, Beeler M C, Perry A R, Spielman I B 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 225303
- [13] Struck J, Ölschläger C, Weinberg M, Hauke P, Simonet J, Eckardt A, Lewenstein M, Sengstock K, Windpassinger P 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 225304
- [14] Celi A, Massignan P, Ruseckas J, Goldman N, Spielman I B, Juzeliūnas G, Lewenstein M 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 043001
- [15] Mancini M, Pagano G, Cappellini G, Livi L, Rider M, Catani J, Sias C, Zoller P, Inguscio M, Dalmonte M, Fallani L 2015 *Science* **349** 1510
- [16] Cooper N R, Rey A M 2015 *Phys. Rev. A* **92** 021401
- [17] Pagano G, Mancini M, Cappellini G, Lombardi P, Schäfer F, Hu H, Liu X J, Catani J, Sias C, Inguscio M, Fallani L 2014 *Nat. Phys.* **10** 198
- [18] Stuhl B K, Lu H I, Ayccock L M, Genkina D, Spielman I B 2015 *Science* **349** 1514
- [19] Aidelsburger M 2015 *Artificial Gauge Fields with Ultracold Atoms in Optical Lattices* (Switzerland: Springer) pp27–44
- [20] Azbel M Y 1964 *Sov. Phys. JETP* **19** 634
- [21] Harper P G 1955 *Proc. Phys. Soc. London, Sect. A* **68** 874
- [22] Hofstadter D R 1976 *Phys. Rev. B* **14** 2239
- [23] Giamarchi T 2004 *Quantum Physics in One Dimension* (Clarendon: Oxford) p29
- [24] Dolfi M, Bauer B, Keller S, Kosenkov A, Ewart T, Kantian A, Giamarchi T, Troyer M 2014 *Comput. Phys. Commun.* **185** 3430
- [25] White S R 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 2863
- [26] Schollwöck U 2011 *Ann. Phys.* **326** 96
- [27] Tsui D C, Stormer H L, Gossard A C 1982 *Phys. Rev. Lett.* **48** 1559
- [28] Palmer R N, Jaksch D 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 180407
- [29] Hafezi M, Sørensen A S, Demler E, Lukin M D 2007 *Phys. Rev. A* **76** 023613
- [30] Cooper N R, Dalibard J 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 185301
- [31] Strinati M C, Cornfeld E, Rossini D, Barbarino S, Dalmonte M, Fazio R, Sela E, Mazza L 2017 *Phys. Rev. X* **7** 021033
- [32] Cornfeld E, Sela E 2015 *Phys. Rev. B* **92** 115446
- [33] Petrescu A, Piraud M, Roux G, McCulloch I P, Le Hur K 2017 *Phys. Rev. B* **96** 014524
- [34] Petrescu A, Le Hur K 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 150601
- [35] Petrescu A, Le Hur K 2015 *Phys. Rev. B* **91** 054520
- [36] Piraud M, Heidrich-Meisner F, McCulloch I P, Greschner S, Vekua T, Schollwöck U 2015 *Phys. Rev. B* **91** 140406
- [37] Geim A K, Dubonos S V, Lok J G S, Henini M, Maan J C 1998 *Nature* **396** 144
- [38] Bardeen J 1955 *Phys. Rev.* **97** 1724
- [39] Abrikosov A A 1957 *Sov. Phys. JETP* **5** 11 74
- [40] Su W P, Schrieffer J R, Heeger A J 1979 *Phys. Rev. Lett.* **42** 1698
- [41] Su W P, Schrieffer J R, Heeger A J 1983 *Phys. Rev. B* **28** 1138
- [42] Zhang J M, Dong R X 2010 *Eur. J. Phys.* **31** 591
- [43] Calabrese P, Cardy J 2009 *Phys. A* **42** 504005
- [44] Holzhey C, Larsen F, Wilczek F 1994 *Nucl. Phys. B* **424** 443
- [45] Vidal G, Latorre J I, Rico E, Kitaev A 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 227902
- [46] Roux G, Capponi S, Lecheminant P, Azaria P 2009 *Eur. Phys. J. B* **68** 293
- [47] Kühner T D, White S R, Monien H 2000 *Phys. Rev. B* **61** 12474
- [48] Asbóth J K, Oroszlány L, Pályi A 2016 *Lect. Notes Phys.* **919** 87
- [49] Sheikhan A, Brennecke F, Kollath C 2016 *Phys. Rev. B* **94** 061603
- [50] Feng Y L, Zhang K, Fan J T, Mei F, Chen G, Jia S T 2018 *Sci. China: Phys. Mech.* **61** 123011

Current phases in Hofstadter ladder with staggered hopping*

Liu Biao¹⁾²⁾ Zhou Xiao-Fan^{1)2)†} Chen Gang^{1)2)3)‡} Jia Suo-Tang¹⁾²⁾

1) (*State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, Institute of Laser Spectroscopy, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

2) (*Collaborative Innovation Center of Extreme Optics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

3) (*Center of Light Manipulations and Applications, College of and Electronics, Shandong Normal University, Jinan 250358, China*)

(Received 25 December 2019; revised manuscript received 10 February 2020)

Abstract

Hofstadter ladder describes a Boson ladder under a uniform magnetic field and supports nontrivial energy band and fractional quantum Hall states. Staggered hopping is illuminated from the SSH model and proved to have non-trivial effects on current phases. We introduce staggered hopping on Hofstadter ladder to study the novel current phases. Exact diagonalization (ED) and density matrix renormalization group (DMRG) methods have been employed to study the current phases of the ladder in noninteraction and strong interaction (hard core boson) cases. By observing energy singularities and the new flux patterns when increasing the staggered hopping strength, we extend Meissner and vortex phase to horizontal current phase, vertical current phase and vortex phase. The horizontal current phase has stronger chiral currents in horizontal direction, which is the long direction of the ladder. The vertical current phase has stronger chiral currents in vertical direction. The above two phases do not break translational invariance while the vortex phase does. The current patterns of horizontal current phase are proved to be continuously deformed from the Meissner phase, and the vortex phase has similar signatures. The vertical current phase is only visible when the hopping is staggered. These phases generally exist in noninteraction regimes and interacting superfluid regimes. We have defined new quantities (i.e. current inhomogeneity and nearest overlap) to characterize different quantum phases. In noninteraction case, the horizontal current phase go through the vortex phase to enter the vertical current phase by second order phase transitions, but in strong interaction case such a change can be directly made in a first order phase transition. The direct transition is made in higher fillings with almost identical flux. Surprisingly, the three phases turn into only two phases in Mott regimes, and the phase transition between the horizontal current phase and the vertical current phase has disappeared. We call the new phase as Mott-homogenous phase. The staggered hopping has exotic effects in strong interaction case. For $n = 0.25$ filling, the staggered hopping shrinks the region of vortex phases and produces Mott-SF transition. When the staggered hopping is weak, the system achieves Mott-SF transition just by varying the flux. This research can enrich current phases in lattice systems and illuminate further studies on chiral currents.

Keywords: quantum phase transition, numerical simulation, Hofstadter ladder, chiral current

PACS: 05.30.Rt, 21.60.Fw, 05.30.Jp, 74.25.Sv

DOI: 10.7498/aps.69.20191964

* Project supported by the National Key Research and Development Program of China (Grant No. 2017YFA0304203), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11674200, 11804204), the Program for Changjiang Scholars and Innovative Research Team in University of Ministry of Education of China (Grant No. IRT13076), and the Plan for Shanxi “1331 Project” Key Subjects Construction, China.

† Corresponding author. E-mail: xiaofanlaohu@163.com

‡ Corresponding author. E-mail: chengang971@163.com