

非均匀波导中的声聚焦

郭威³⁾ 杨德森^{1)2)3)†}

1) (哈尔滨工程大学, 水声技术重点实验室, 哈尔滨 150001)

2) (海洋信息获取与安全工业和信息化部重点实验室(哈尔滨工程大学), 哈尔滨 150001)

3) (哈尔滨工程大学, 水声工程学院, 哈尔滨 150001)

(2019年12月9日收到; 2020年2月3日收到修改稿)

理论研究声在非均匀波导中的空间聚焦问题, 利用多模态导纳法构建波导内任意位置处声压与入射声压在模态域的映射关系, 计算使声波聚焦于空间某位置时的最佳入射波, 并画出了相应的聚焦声场. 研究了三种非均匀情况: 水平变截面波导、含散射体波导以及声速垂直变化波导. 结果表明, 当输入最佳入射波时, 在非均匀波导中可以产生良好的单点或多点声聚焦效果, 声波的聚焦过程充分地利用了波导结构及介质非均匀性对声波的散射作用.

关键词: 声聚焦, 非均匀波导, 多模态导纳法**PACS:** 43.20.Mv, 43.20.Fn, 43.20.+g**DOI:** 10.7498/aps.69.20191854

1 引言

声波聚焦在声通信、声成像、无损检测以及超声医学治疗等领域具有重要的应用价值. 目前实现声波聚焦的一种手段是设计特殊的材料和结构, 例如二维声子晶体^[1]、声透镜^[2,3]、负折射声超构材料^[4]等, 或借助热声学手段^[5,6], 改变传播介质的折射率, 控制声波的传播路径, 实现空间聚焦. 该方法已在均匀自由场中产生了良好的声聚焦效应. 然而, 对于声波在非均匀波导中的传播, 由于介质本身的不均匀性及边界的散射作用, 传播过程较自由场中复杂, 控制声波的传播路径也相对困难, 较难应用该手段实现非均匀波导中的声聚焦. 另一种研究波聚焦的方法为相位共轭法 (phase conjugation), 首先应用于光学领域^[7], 以实现光波穿过复杂散射区域后的空间聚焦. 相位共轭法是基于绝热物理系统的时间反转不变性, 对点光源穿过散射区域后产生的透射波进行相位共轭 (时间反转) 处理, 再将处理后的光波作为入射波, 反向穿过散射区域, 最

终在原本的点光源位置处形成聚焦^[8]. 此外, 很多学者将相位共轭法与透射矩阵^[9,10]相结合, 实验测量透射矩阵, 进而给出入射波, 使其穿过散射区域后直接产生空间聚焦^[11,12]或时间空间同时聚焦^[13–16]. Fink 等^[17]将相位共轭法引申到声学领域中, 称为时间反转法 (time reversal), 可实现声波穿过非均匀介质后的空间聚焦^[18], 其优点是无需介质的先验信息即可完成自适应聚焦^[19]. 但相位共轭法多为研究波穿过散射区域后的聚焦^[8–18], 且依赖于实验手段, 相对缺乏系统的理论分析, 而且对在散射区域内部实现聚焦的相关研究也较少.

鉴于上述问题, 本文从均匀刚硬波导入手, 进而研究水平变截面、含散射体以及声速垂直变化三种非均匀波导内的声聚焦问题. 利用一种求解非均匀波导内声场的半解析方法——多模态导纳法^[20], 构建波导中任意位置处的总声场与入射声压的映射关系, 给出声波在该位置处聚焦, 即在该位置声压幅值达到最大值时的入射条件, 并画出对应的声场分布.

† 通信作者. E-mail: dshyang@hrbeu.edu.cn

2 均匀波导内的声聚焦

首先考虑二维笛卡尔坐标系下均匀刚硬波导中的声聚焦问题. 简谐声源 (时间因子 $e^{-i\omega t}$) 位于 $x = 0$ 处. 经由无量纲化处理 $p = \tilde{p}/(\rho c^2)$, $x = \tilde{x}/h$, $y = \tilde{y}/h$, $k = \omega h/c$, 其中 ρ , c , h , ω , k 分别为介质密度、声速、波导高度、角频率及无量纲波数, x, y 分别表示水平方向及垂直方向, 且 $(x, y) \in [0, \infty) \times [0, 1]$, 声压满足无量纲亥姆霍兹方程 $\partial^2 p/\partial x^2 + \partial^2 p/\partial y^2 + k^2 p = 0$ 及边界条件 $\partial_y p|_{y=0,1} = 0$. 声压场的通解可写为

$$p(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{i,n} \psi_n(y) e^{ik_{x,n}x}, \quad (1)$$

式中, $\psi_n(y) = \sqrt{2 - \delta_{n0}} \cos(n\pi y)$, $k_{x,n} = \sqrt{k^2 - (n\pi)^2}$ 分别为本征函数及传播方向波数; $p_{i,n}$ 为入射波的模态展开系数, 即 $p_i = p(0, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{i,n} \psi_n(y)$. (1) 式可视为以加权求和的方式建立 $p_{i,n}$ 与任意位置声压 $p(x, y)$ 的映射关系, 其中权重为 $\psi_n(y) e^{ik_{x,n}x}$.

本文研究的目的是计算单位辐射声功率 (入射声能流) 条件下, 在空间任意位置 (x_0, y_0) 处获得最大声压幅值的最佳入射波, 即计算 p_i 或 $p_{i,n}$ 以获得 $\max_{p_i} |p(x_0, y_0)|$. 在均匀波导中, 由 (1) 式可知, 当 $p_{i,n} = \Lambda(\psi_n(y_0) e^{ik_{x,n}x_0})^*$ 时, 声压在 (x_0, y_0) 处获得最大幅值, 其中上标“*”表示共轭, Λ 是声能流的归一化系数, $p_i = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{i,n} \psi_n(y)$ 即为最佳入射波. 无量纲的入射声能流表达式为

$$\begin{aligned} E_f(0) &= \frac{1}{2k} \text{Im} \left(\int_0^1 p_i^* \partial_x p_i dy \right) \\ &= \frac{1}{2k} \sum_{n=0}^{+\infty} \text{Re}(k_{x,n}) |p_{i,n}|^2. \end{aligned} \quad (2)$$

(2) 式的推导利用了本征函数的正交性 $\int_0^1 \psi_m^* \psi_n dy = \delta_{mn}$. 由于刚硬波导中存在传播模态 ($k_{x,n}$ 为实数) 和衰减模态 ($k_{x,n}$ 为纯虚数), 其中衰减模态不传播能量 (能流分量为 0), 故 (2) 式可由无穷级数化为有限项求和. 将最佳入射波的模态展开系数 $p_{i,n}$ 代入 (2) 式算得声能流的归一化系数:

$$\Lambda = \sqrt{\frac{2k}{\sum_{n=0}^{N_p-1} \text{Re}(k_{x,n}) |\psi_n(y_0)|^2}}. \quad (3)$$

(3) 式中 N_p 表示传播模态数目, 为使不等式 $N_p \leq 1 + k/\pi$ 成立的最大整数. 聚焦点处的声压为

$$\begin{aligned} p(x_0, y_0) &= \Lambda \sum_{n=0}^{+\infty} |\psi_n(y_0)|^2 e^{-2\text{Im}(k_{x,n})x_0} \\ &= \sqrt{2k} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} |\psi_n(y_0)|^2 e^{-2\text{Im}(k_{x,n})x_0}}{\sqrt{\sum_{n=0}^{N_p-1} \text{Re}(k_{x,n}) |\psi_n(y_0)|^2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

该声压即为给定频率时, 在 (x_0, y_0) 处可达到的声压幅值上界. 由 (4) 式可知, 聚焦点处的声压主要来自传播模态的贡献, 衰减模态的作用为保证该声压值在有限频率下收敛.

图 1 为均匀波导中, 入射波频率为 $k = 19.1\pi$ 时, 在 $(x_0, y_0) = (3.2, 0.4)$ 处产生聚焦的声压幅值分布. 通过观察发现, 当聚焦点距离边界较远时, 聚焦点附近的声场与分离常量为 0 时的奇对称 Weber 波束非常相似 [21]. 声波在均匀波导中的聚焦过程充分利用了边界的反射作用.

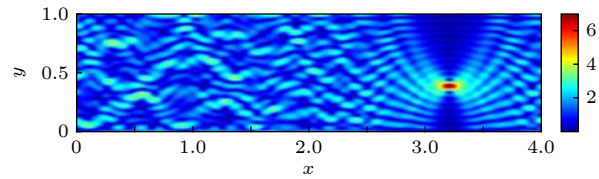


图 1 均匀波导中的声聚焦

Fig. 1. Sound focusing in homogeneous waveguides.

另外, 从 (4) 式可知, 当固定频率以及 x_0 时, 聚焦点处的声压仅由 $\psi_n(y_0) = \sqrt{2 - \delta_{n0}} \cos(n\pi y_0)$ 决定. 根据余弦函数的周期性和偶对称性可得

$$\cos(n\pi y_0) = \cos(n\pi(\pm y_0 + 2m)), \quad (5)$$

其中 m 为任意整数. $(x_0, \pm y_0 + 2m)$ 可看作是聚焦点 (x_0, y_0) 关于波导上下壁面对称产生的虚聚焦点 (类比虚源), 选择虚聚焦点中任意一点研究声聚焦时, 声波仍会在 (x_0, y_0) 处聚焦.

3 非均匀波导中的声聚焦

在均匀波导的声聚焦问题中, 首先建立了任意位置处声压与入射声压的展开系数的映射关系 ((1) 式), 进而求解使 $p(x_0, y_0)$ 达到极值的最佳入射波. 在非均匀波导中, 声场与入射波之间不再是简

单的单向传播的映射关系, 本文采用多模态导纳法 (multimodal admittance method)^[20] 建立任意位置声压与入射波的展开系数的映射算子, 进而研究产生声聚焦的最佳入射波条件并求解声场. 本节讨论水平变截面、含散射体以及声速垂直变化三种非均匀波导中的声聚焦现象.

3.1 水平变截面波导中的声聚焦

对于水平变截面波导, 根据坐标平移, 任意范围 $y \in [\tilde{h}_1(x), \tilde{h}_2(x)]$ 的声传播问题与 $y \in [0, \tilde{h}(x)]$ 的问题等价, 其中 $\tilde{h}(x) = \tilde{h}_2(x) - \tilde{h}_1(x)$. 简化起见, 本文研究 $y \in [0, \tilde{h}(x)]$ 的声聚焦, 对变量进行无量纲化处理 $h(x) = \tilde{h}(x)/\tilde{h}(0)$, $p = \tilde{p}/(\rho c^2)$, $x = \tilde{x}/\tilde{h}(0)$, $y = \tilde{y}/\tilde{h}(0)$, 及 $k = \omega\tilde{h}(0)/c$. 波导示意图如图 2 所示, 当 $x < x_{\max}$ 时, 截面连续变化, 规定此区域为散射区域, 同时存在入射波 p_i 和反射波 p_r ; 当 $x \geq x_{\max}$ 时, 截面为常数, 规定为透射区域, 只存在透射波 p_t .

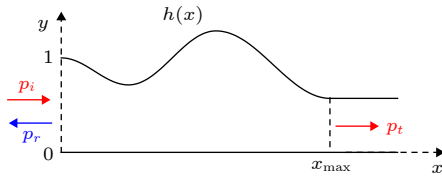


图 2 水平变截面刚硬波导示意图

Fig. 2. Configuration of rigid waveguides with varying cross-sections.

声压满足的亥姆霍兹方程及边界条件为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k^2 p = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=h(x)} = h'(x) \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{y=h(x)}. \quad (7)$$

其中上边界条件由 $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{(\partial/\partial y - h'(x)\partial/\partial x)}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}}$ 得到. 首先对声压及其水平方向的偏导数进行局部模态展开, 作如下定义

$$p(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x) \psi_n(x, y),$$

$$s(x, y) = \partial_x p = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(x) \psi_n(x, y), \quad (8)$$

这里 $\psi_n(x, y)$ 为局部本征函数, 对应均匀波导条件

下上边界等于局部高度 $h(x)$ 时的本征函数, 其表达式为

$$\psi_n(x, y) = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{h(x)}} \cos\left(\frac{n\pi y}{h(x)}\right), \quad (9)$$

其中 $\varepsilon_n = 2 - \delta_{n0}$. 然后, 将 (8) 式代入 (6) 式并投影到局部本征函数 $\psi_m^*(x, y)$, 利用本征函数的正交性 $\int_0^{h(x)} \psi_m^*(x, y) \psi_n(x, y) dy = \delta_{mn}$, 可得耦合偏微分方程组:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}^2 & \mathbf{A}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

其中, $\mathbf{p}(x)$ 和 $\mathbf{s}(x)$ 分别为模态展开系数 p_n 和 s_n 组成的向量, 上标“T”表示转置; \mathbf{I} 为单位阵, $\mathbf{K}(x)$ 为对角阵, 各元素为 $\sqrt{k^2 - (n\pi/h(x))^2}$; 矩阵 \mathbf{A} 的表达式为

$$A_{mn}(x) = \int_0^{h(x)} \psi_m^* \frac{\partial \psi_n}{\partial x} dy = \begin{cases} \sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_n} \frac{(-1)^{m+n} h'(x)}{h(x)} \frac{n^2}{m^2 - n^2}, & m \neq n \\ -\frac{\varepsilon_n h'(x)}{2 h(x)}, & m = n. \end{cases} \quad (11)$$

(10) 式的推导过程利用了正交性的全微分关系

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^{h(x)} \psi_m^* \psi_n dy \right) = 0, \text{ 即}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{A}^T + h' \psi_m^* \psi_n(x, h) = 0.$$

由 (10) 式, 声场的求解问题转化为耦合偏微分方程组的初值问题, 两个初值条件为入射条件和辐射条件. 然而根据辐射条件从右向左积分求解 (10) 式时, 由于衰减模态从右向左是指数发散的, 积分结果不收敛. 因此引入导纳矩阵 \mathbf{Y} , 以规避衰减模态的指数发散问题^[22,23], 稳定求解 (10) 式. 导纳矩阵的定义为 $\mathbf{s} = \mathbf{Y}\mathbf{p}$, 代入 (10) 式, 求得导纳矩阵满足的 Riccati 方程:

$$\partial_x \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^2 + \mathbf{K}^2 - \mathbf{A}^T \mathbf{Y} - \mathbf{Y} \mathbf{A} = 0. \quad (12)$$

\mathbf{Y} 的初条件为 $\mathbf{Y}(x \geq x_{\max}) = i\mathbf{K}(x_{\max})$, 可从 x_{\max} 至 0 积分求得任意 x 处的导纳矩阵. 为建立 x 处声压与入射波声压之间的映射关系, 引入传播算子 $\mathbf{M}(x)$, 定义为 $\mathbf{p}(x) = \mathbf{M}(x)\mathbf{p}(0)$. 代入 (10) 式可得传播算子满足的方程为 $\partial_x \mathbf{M} = (\mathbf{Y} - \mathbf{A})\mathbf{M}$, 初条件为 $\mathbf{M}(0) = \mathbf{I}$, 从 0 至 x_{\max} 积分求解. 导纳矩阵 \mathbf{Y} 和传播算子 \mathbf{M} 可利用四阶 Magnus 积分格式进行数值计算, 详细过程见文献 [24] 和 [25].

定义模态域的反射矩阵 \mathbf{R} 满足 $\mathbf{p}_r(0) = \mathbf{R}\mathbf{p}_i(0)$, 其中 $\mathbf{p}_i(0), \mathbf{p}_r(0)$ 是 $x=0$ 处的入射波和反射波声压的模态展开系数. $x=0$ 处总声压的模态展开系数可写为 $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_i(0) + \mathbf{p}_r(0)$, 又由 $\mathbf{s}(0) = i\mathbf{K}(0)(\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{p}_i(0) = \mathbf{Y}(0)\mathbf{p}(0)$, 可得

$$\mathbf{R} = [i\mathbf{K}(0) + \mathbf{Y}(0)]^{-1} [i\mathbf{K}(0) - \mathbf{Y}(0)]. \quad (13)$$

定义透射矩阵 \mathbf{T} 满足 $\mathbf{p}_t(x_{\max}) = \mathbf{p}(x_{\max}) = \mathbf{T}\mathbf{p}_i(0)$, 其中 $\mathbf{p}_t(x_{\max})$ 为 x_{\max} 处透射波声压的模态展开系数, 根据传播算子 $\mathbf{M}(x)$ 的定义式, 可得

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}(x_{\max})(\mathbf{I} + \mathbf{R}). \quad (14)$$

至此, 反射矩阵 \mathbf{R} , 透射矩阵 \mathbf{T} 以及传播算子 $\mathbf{M}(x)$ 均可计算. 接着可以给出散射区域总声压的模态展开系数 $\mathbf{p}_n(x) = \mathbf{M}(x)(\mathbf{I} + \mathbf{R})\mathbf{p}_i(0)$, 以及透射区域声压的模态展开系数

$$\mathbf{p}_n(x) = \exp(i\mathbf{K}(x_{\max})(x - x_{\max}))\mathbf{T}\mathbf{p}_i(0),$$

再结合 (8) 式, 最终得到变截面波导内任意点 (x_0, y_0) 处声压与入射声压的模态展开系数 $\mathbf{p}_i(0)$ 的映射关系:

$$\begin{aligned} p(x_0, y_0) &= \mathbf{Q}^T(x_0, y_0)\mathbf{p}_i(0), \\ \mathbf{Q}^T(x_0, y_0) &= \begin{cases} \boldsymbol{\Psi}^T(x_0, y_0)\mathbf{M}(x_0)(\mathbf{I} + \mathbf{R}), & x_0 < x_{\max} \\ \boldsymbol{\Psi}^T(x_0, y_0)\exp(i\mathbf{K}(x_{\max})(x_0 - x_{\max}))\mathbf{T}, & x_0 \geq x_{\max}, \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

其中, $\mathbf{Q}^T(x_0, y_0)$ 为映射向量; $\boldsymbol{\Psi}(x_0, y_0) = [\psi_0(x_0, y_0), \psi_1(x_0, y_0), \dots, \psi_{N-1}(x_0, y_0)]^T$ 为 (x_0, y_0) 处局部本征函数构成的向量; N 为模态的截断数, 要求 $N > \max[N_p(x)]$, 即截断数的选取需大于波导中的传播模态数量. (15) 式可写作希尔伯特空间中的向量内积形式, 即 $p(x_0, y_0) = \langle \mathbf{Q}^*(x_0, y_0), \mathbf{p}_i(0) \rangle$, 其中 $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle = \mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_2$, 上标“H”代表共轭转置. 使内积结果最大的 $\mathbf{p}_i(0)$ 就是在 (x_0, y_0) 处产生声聚焦的最佳入射波的模态展开系数, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i(0) &= \Lambda \mathbf{Q}^*(x_0, y_0) = \\ & \Lambda \begin{cases} [\boldsymbol{\Psi}^T(x_0, y_0)\mathbf{M}(x_0)(\mathbf{I} + \mathbf{R})]^H, & x_0 < x_{\max}, \\ [\boldsymbol{\Psi}^T(x_0, y_0)\exp(i\mathbf{K}(x_{\max})(x_0 - x_{\max}))\mathbf{T}]^H, & x_0 \geq x_{\max}, \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

其中 Λ 为声能流的归一化系数, 计算方法见 (2) 式. 因此, 最佳入射波可写为

$$p_i(0, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{i,n}(0) \psi_n(0, y).$$

综上, 可采用多模态导纳法将复杂波导中的声场求解问题转化为计算模态域的展开系数问题, 再引入导纳矩阵 $\mathbf{Y}(x)$ 和传播算子 $\mathbf{M}(x)$, 可以直接构建总声场与入射波的展开系数的映射关系, 这种直接明确的映射关系将空间任意位置处的声压表示为映射向量 $\mathbf{Q}^*(x_0, y_0)$ 与入射波模态展开系数 $\mathbf{p}_i(0)$ 的内积的形式, 求解声聚焦的问题最终转化为求解使该内积 ((15) 式) 达到极值的最佳入射波问题. 需要指出的是, 对于变截面波导, 本文选取的局部本征函数 $\psi_n(x, y)$ 并不满足实际的上边界条件, 也就是 $\psi_n(x, y)$ 在上边界满足的边界条件是 $\partial\psi_n/\partial y = 0$, 而不是真正的边界条件 $\partial\psi_n/\partial n = 0$, 这使 (8) 式的收敛速度不高 ($1/N^2$). 文献 [26] 提出了改进多模态导纳法, 用以提高声场解的收敛性 (提高为 $1/N^4$). 方法为构造一阶新的本征函数 $\psi_{-1}(x, y)$, 使之既与原局部本征函数 $\psi_n(x, y)$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$) 正交, 又在上边界满足非齐次 Neumann 边界条件. 但是, 由于构建的本征函数 $\psi_{-1}(x, y)$ 在传播方向上表现为消逝模态 [26], 且由 (4) 式, 发现消逝模态对声聚焦的作用很小, 因此可忽略 $\psi_{-1}(x, y)$ 对声聚焦的贡献, 故本文选取的局部本征函数 $\psi_n(x, y)$ 足够满足声聚焦分析的要求.

总而言之, 对于非均匀波导, 只要求得散射区域内的导纳矩阵 $\mathbf{Y}(x)$ 和传播算子 $\mathbf{M}(x)$, 进而得到反射矩阵 \mathbf{R} 及透射矩阵 \mathbf{T} , 即可给出声压与入射声压的模态展开系数的映射关系, 最终计算在任意点产生聚焦的最佳入射波.

图 3 给出了利用上述方法计算变截面波导中, 在不同位置处产生聚焦的声场. 入射波频率为 $k = 29.1\pi$, 波导上边界表达式为 $h(x) = 0.8 + 0.2 \cos(2\pi x/3)$, $x_{\max} = 3$. 图 3(a) 和 3(b) 中的聚焦点分别位于透射区域和散射区域, 坐标为 $(x_0, y_0) = (3.2, 0.9)$ 及 $(1.6, 0.2)$. 图 3(c) 及图 3(d) 插图中的蓝色实线分别对应图 3(a) 及图 3(b) 中的入射波形, 均为由 (16) 式计算得到的最佳入射声波, 黑色点线为平面入射波; 主图中的蓝色实线为固定 x_0 时, 声压幅值随高度的变化曲线, 即 $|p(x_0, y)|$; 黑色点线为入射波是平面波时, 对应的 $|p(x_0, y)|$. 如图 3 所示, 当入射声波是最佳入射波时, 不论聚焦点在

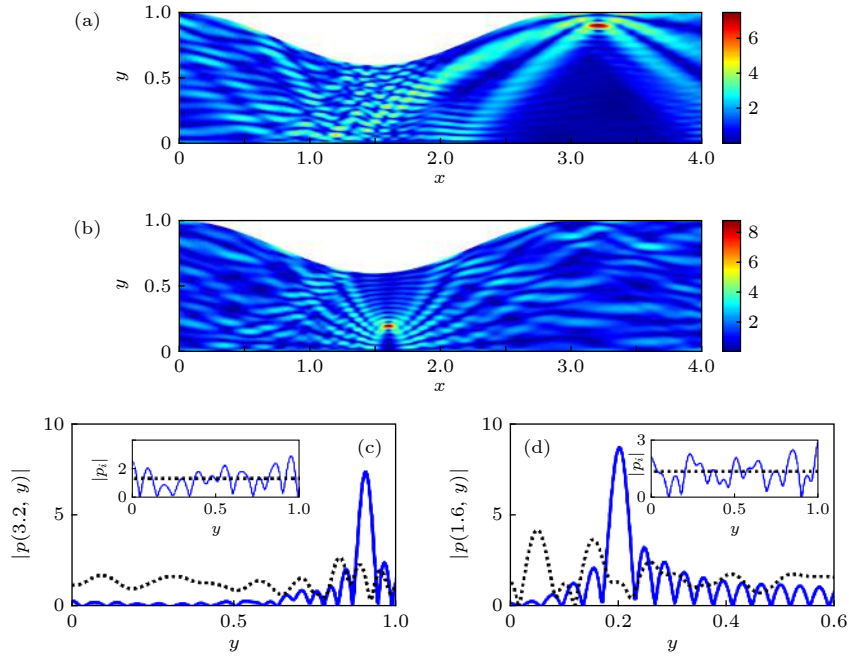


图 3 (a) 和 (b) 为变截面波导分别在 $(x_0, y_0) = (3.2, 0.9)$ (透射区域) 及 $(1.6, 0.2)$ (散射区域) 处产生聚焦的声场; (c) 和 (d) 主图中的蓝色实线分别为 (a) 和 (b) 中 x_0 处的声压幅值随高度方向的分布, 黑色点线为 $p_i = A\psi_0(y)$ (平面波) 时 x_0 处的声压幅值分布; 插图中的蓝色曲线和黑色点线分别为最佳入射波及平面波的幅值曲线

Fig. 3. Acoustic focusing field in the waveguide as calculated by the present method. The foci are located at (a) $(x_0, y_0) = (3.2, 0.9)$ in transmission region and (b) $(1.6, 0.2)$ in scattering region, respectively. The blue solid lines in (c) and (d) are $|p(x_0, y)|$ corresponding to (a) and (b), respectively, and the black dotted lines are $|p(x_0, y)|$ generated by $p_i = A\psi_0(y)$ (plane wave). The insets plot the modulus of the corresponding incident waves.

散射区域还是透射区域, 声波利用边界的散射作用, 均在对应点处发生了聚焦, 并且聚焦点处的声压幅值明显大于入射波是平面波时的声压幅值, 聚焦效果良好.

根据线性叠加原理, 可以实现非均匀波导中的多点声聚焦. 选取多个聚焦点位置, 利用 (16) 式分别获得对应的最佳入射波. 然后将这些入射波求和构建新的入射波并将其输入至波导中, 对应声场则产生多点声聚焦效应. 图 4(a) 给出多点声聚焦的声场, 其中频率的选取及波导结构与图 3 一致, 聚焦点位于 $(3.2, 0.9)$ 及 $(3.2, 0.1)$. 图 4(b) 画出了叠加后的总入射声压的幅值分布. 图 4(c) 中的黑色虚线、红色点划线和蓝色实线分别为只在 $(3.2, 0.1)$ 处产生单点聚焦、只在 $(3.2, 0.9)$ 处产生单点聚焦和同时在 $(3.2, 0.1)$ 和 $(3.2, 0.9)$ 处产生双点聚焦时 $x = 3.2$ 处的声压幅值随 y 的分布. 可以看出双点聚焦时各个聚焦点处的声压幅值均低于单点聚焦的情况, 这是符合能量守恒定律的. 双点聚焦时各个聚焦点处的声压幅值均明显大于其他位置处的声压幅值, 说明输入计算得到的总入射波, 可以实现良好的多点声聚焦效果.

3.2 含散射体波导中的声聚焦

简单起见, 考虑波导中仅存在一个散射体时的声聚焦问题, 波导模型如图 5 所示, 散射体边界为 $[y = a(x), y = b(x)]$, 波导主介质的密度及声速为 ρ_1, c_1 , 散射体内部介质的密度及声速为 ρ_2, c_2 , 且 ρ_1, ρ_2, c_1, c_2 均为常量. 波导介质区域与散射体占据区域分别用 Ω_1 和 Ω_2 表示. 声压满足的无量纲亥姆霍兹方程为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k^2(1 + \eta\delta(x, y))^2 p = 0, \quad \delta(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{在 } \Omega_1 \text{ 内,} \\ 1, & \text{在 } \Omega_2 \text{ 内,} \end{cases} \quad (17)$$

其中, 波数 $k = \omega h/c_1$, $1 + \eta = c_1/c_2$ 为折射率. 边界条件和连续性条件分别为

$$\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0, \quad p_{\partial\Omega_2^+} = p_{\partial\Omega_2^-}, \quad \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_2^+} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_2^-}. \quad (18)$$

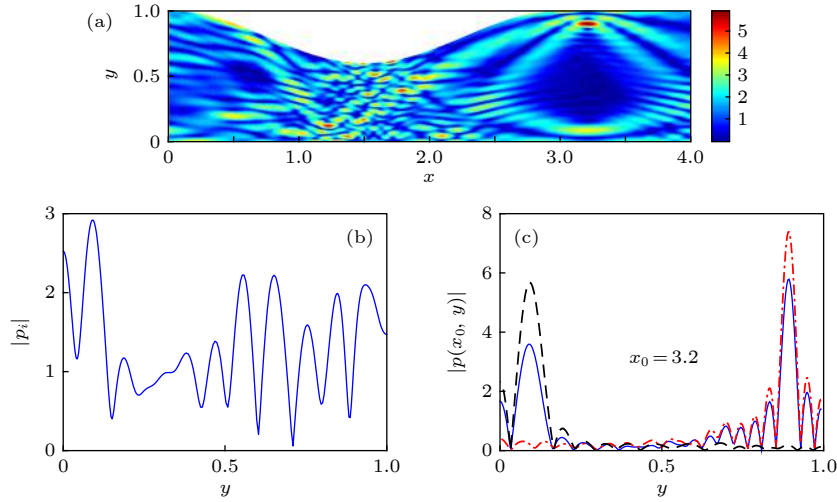


图 4 (a) 变截面波导中的双点聚焦声场, 聚焦点为 $(3.2, 0.9)$ 及 $(3.2, 0.1)$; (b) 最佳入射声压幅值分布; (c) 蓝色实线为 (a) 中声场在 $x = 3.2$ 处的声压幅值分布; 红色点划线表示声波在 $(3.2, 0.9)$ 处单点聚焦时的声压幅值分布, 与图 3(c) 中蓝色曲线一致; 黑色虚线为声波在 $(3.2, 0.1)$ 处单点聚焦时的声压幅值分布. 频率和波导几何参数与图 3 一致

Fig. 4. (a) Sound two-point focusing field in the waveguide with varying cross-section, the foci are located at $(3.2, 0.9)$ and $(3.2, 0.1)$; (b) modulus of the optimal incident pressure; (c) the blue solid line represents $|p(3.2, y)|$ in (a); the red dot-dashed line shows $|p(3.2, y)|$ when the wave focus only at $(3.2, 0.9)$, which is same as the blue solid line in Fig. 3(c); and the black dashed line shows $|p(3.2, y)|$ when the wave focus only at $(3.2, 0.1)$. The frequency and geometries of the waveguide are same as Fig. 3.

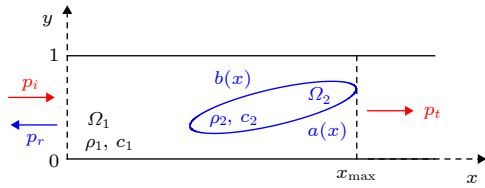


图 5 含散射体刚硬波导示意图

Fig. 5. Configuration of rigid waveguides involving a scatterer.

根据多模态导纳法, 首先将声压用模态展开为

$$p(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x) \psi_n(y), \quad \text{其中}$$

$$\psi_n(x, y) = \sqrt{\varepsilon_n} \cos(n\pi y), \quad \varepsilon_n = 2 - \delta_{n0}.$$

然后将方程 (18) 变换为模态展开系数 $p_n(x)$ 满足的模态域方程^[20]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} \right) = (-\mathbf{K}^2 + \mathbf{F}) \mathbf{p}. \quad (19)$$

(19) 式中 \mathbf{K} 与 (10) 式中一致, \mathbf{E} 和 \mathbf{F} 的表达式为

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{I} + (\rho_1/\rho_2 - 1) \mathbf{C}(x),$$

$$\mathbf{F}(x) = (\rho_1/\rho_2 - 1) \mathbf{D}(x)$$

$$-k^2 \left[(\rho_1/\rho_2)(1 + \eta)^2 - 1 \right] \mathbf{C}(x), \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} C_{mn}(x) &= \int_{a(x)}^{b(x)} \psi_m^* \psi_n \, dy \\ &= \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n y}{2} [\text{sinc}((m-n)\pi y) \\ &\quad + \text{sinc}((m+n)\pi y)] \Big|_{y=a(x)}^{y=b(x)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{mn}(x) &= \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial \psi_m^*}{\partial y} \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \, dy \\ &= \frac{\pi^2 mn \varepsilon_m \varepsilon_n y}{2} [\text{sinc}((m-n)\pi y) \\ &\quad - \text{sinc}((m+n)\pi y)] \Big|_{y=a(x)}^{y=b(x)}. \quad (21) \end{aligned}$$

令 $\mathbf{s} = \mathbf{E} \partial \mathbf{p} / \partial x = \mathbf{Y} \mathbf{p}$, (19) 式可写成耦合偏微分方程组形式:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E}^{-1} \\ -\mathbf{K}^2 + \mathbf{F} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

此时导纳矩阵 \mathbf{Y} 与传播算子 \mathbf{M} 满足的方程和初条件分别为

$$\begin{aligned} \partial_x \mathbf{Y} &= -\mathbf{Y} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{Y} - \mathbf{K}^2 + \mathbf{F}, \quad \mathbf{Y}(x_{\max}) = \mathbf{i} \mathbf{K}, \\ \partial_x \mathbf{M} &= \mathbf{E}^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{M}, \quad \mathbf{M}(0) = \mathbf{I}. \quad (23) \end{aligned}$$

二者依然可利用四阶 Magnus 积分格式进行数值求解^[24,25]. 同样地, 依照 (13)—(16) 式, 可计算得到含散射体波导内任意位置处产生声聚焦的最佳入射声压.

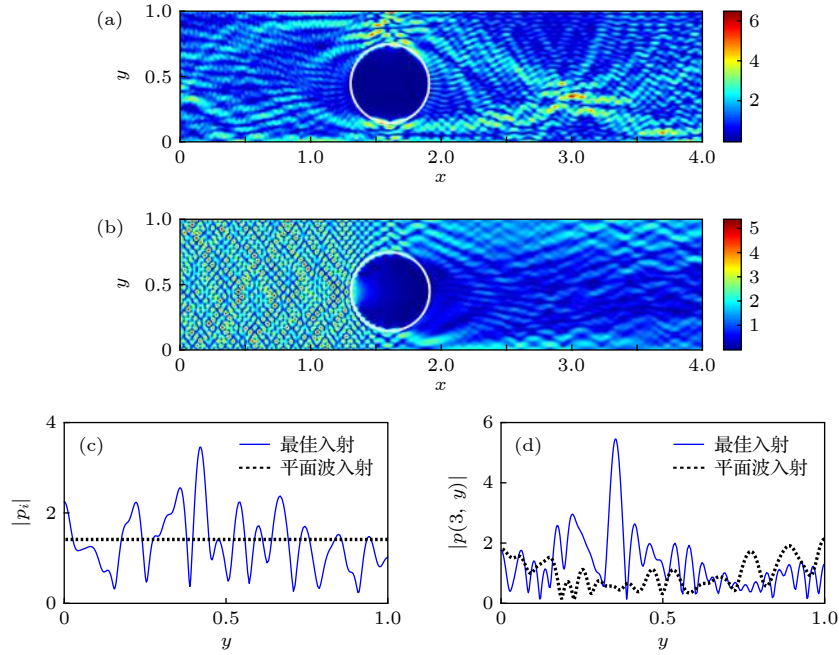


图 6 (a) 含散射体波导中的聚焦声场, 聚焦点位于 (3, 0.35); (b) $p_i = A\psi_0(y)$ (平面波) 入射时的声场; (c) 产生 (a) 中声聚焦的最佳入射波 (蓝色实线) 与入射平面波 (黑色点线) 的幅值分布; (d) 蓝色实线与黑色点线分别为 (a) 与 (b) 中 $x = 3$ 处的声压幅值分布

Fig. 6. (a) Sound focusing field in the waveguide with a scatterer. The focus is located at (3, 0.35); (b) sound field generated by a plane wave $p_i = A\psi_0(y)$; (c) modulus of the pressure of optimal incident wave in (a) and that of the plane incident wave in (b); (d) $|p(3, y)|$ in (a) (blue solid line) and (b) (black dotted line).

图 6 给出了计算含散射体波导中声聚焦的算例. 图 6(a) 为在 (3, 0.35) 处产生聚焦的声场 (声压幅值分布), 输入的人射波是由 (16) 式计算得到的最佳入射波 (图 6(c) 中蓝色实线), 图 6(b) 是平面波 (图 6(c) 中黑色点线) 入射时的声场. 图 6(d) 中的蓝色实线为图 6(a) 中声场在 $x = 3$ 处的声压幅值分布, 黑色点线对应图 6(b) 在 $x = 3$ 处的声压幅值分布. 入射波频率均为 $k = 29.1\pi$, 散射体为圆形, 圆心位于 (1.6, 0.45), 半径为 0.3. 散射体的介质参数设为 $\rho_1/\rho_2 = 0.01$, $\eta = -0.99$ ($c_1/c_2 = 0.01$), 近似刚硬, 因此散射体近似看作对声波仅有反射作用. 可以看出, 刚硬散射体的尺寸较大, 对声波有强烈的反向散射作用, 但是当输入计算得到的最佳入射波时, 声波利用散射体的散射和边界的反射作用, 仍然可在目标点处发生聚焦.

3.3 声速垂直变化波导中的声聚焦

考虑波导中介质参数随空间位置连续变化的非均匀情况, 对应的典型波导为浅海波导, 表现为声速沿垂直方向的连续变化, 且海面为软边界. 此时声压满足的亥姆霍兹方程及边界条件为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c_1^2(y)} p = 0, \quad p|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=h} = 0. \quad (24)$$

对声场解进行模态展开, 令

$$p(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x) \psi_n(y),$$

其中 $\psi_n(y)$ 变为 $\psi_n(y) = \sqrt{2/h} \sin[(n + 0.5)\pi y/h]$, 将展开式代入 (24) 式并投影到局部本征函数 $\psi_m^*(y)$, 利用正交性, 可得入射声压在任意点 (x_0, y_0) 处产生的声压为

$$p(x_0, y_0) = \Psi^T(y_0) \exp(ix_0 \mathbf{K}) \mathbf{p}_i(0), \quad (25)$$

其中 $\mathbf{p}_i(0)$ 为入射声压 p_i 的模态展开系数, \mathbf{K} 的表达式为

$$K_{mn} = \sqrt{\int_0^h \psi_m^* \frac{\omega^2}{c_1^2(y)} \psi_n dy - \delta_{mn} \left(\frac{(n + 0.5)\pi}{h} \right)^2}, \quad (26)$$

其计算方法参照文献 [27]. 由 (25) 式可知, 在 (x_0, y_0) 产生声聚焦的最佳入射波的模态展开系数为

$$\mathbf{p}_i(0) = [\Psi^T(y_0) \exp(ix_0 \mathbf{K})]^H. \quad (27)$$

由于声速垂直变化波导在传播方向上介质参数不变, 声聚焦现象与均匀波导中的聚焦现象类似, 这里不再赘述.

接下来考虑在声速垂直变化及散射体共同作用下的复杂波导声聚焦问题, 模型类似图 5, 其中声速 $c_1(y)$ 与 $c_2(y)$ 变为 y 的函数. 此时声压满足的亥姆霍兹方程为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c_1^2(y)}(1 + \eta(y)\delta(x, y))^2 p = 0,$$

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{在 } \Omega_1 \text{ 内} \\ 1, & \text{在 } \Omega_2 \text{ 内} \end{cases},$$

$$p|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y}\bigg|_{y=h} = 0, \quad p_{\partial\Omega_2^+} = p_{\partial\Omega_2^-},$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega_2^+} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega_2^-}. \quad (28)$$

对 (28) 式的求解依然基于多模态导纳法, 详细的方程推导, 映射算子 $\mathbf{M}(x)$ 及透射矩阵 \mathbf{T} 的构建和计算见文献 [27]. 利用映射算子及透射矩阵, 参照 (13)–(15) 式的分析过程, 构建任意点 (x_0, y_0) 处声压与入射声压的模态展开系数 $p_i(0)$ 的映射关系, 其中矩阵 \mathbf{K} 的表达式由 (26) 式给出. 最后根据 (16) 式计算产生声聚焦的最佳入射条件.

图 7(a) 给出利用上述方法计算的浅海波导中同时存在声速垂直变化和散射体时的聚焦声场, 聚

焦点位于 $(35h, 0.1h)$, 对应最佳入射波幅值分布见图 7(c) 插图. 入射波频率为 $f = \omega/2\pi = 200\text{Hz}$, 波导深度 $h = 100\text{m}$, 散射体成山状, 边界表达式为 $a(x) = h - 0.5h \exp[-(x - 20h)^2/18h^2]$, $b(x) = h$, 范围为 $[8h, 32h]$. 海水介质密度 $\rho_1 = 1000\text{kg/m}^3$, 声速为典型浅海负声速梯度 $c_1 = 1530 - 0.1y$ (m/s)^[28], 如图 7(b) 所示, 散射体介质的密度和声速为 $\rho_2 = 2\rho_1$ 及 $c_2 = 2c_1$ (或 $\eta = -0.5$). 图 7(c) 给出了图 7(a) 中声场在 $x = 35h$ 处的声压幅值随深度的变化曲线 (蓝色实线), 并与输入第一阶展开模态 $p_i = \Lambda\psi_0(y)$ (图 7(c) 插图内黑色虚线) 时在 $x = 35h$ 处获得的声压 (黑色虚线) 作对比, 此时声能流的归一化系数 Λ 由 (29) 式计算:

$$\Lambda^2 \left[\frac{1}{2\omega\rho_1} \text{Im} \left(\int_0^h p_i^* \partial_x p_i dy \right) \right] = 1. \quad (29)$$

在负声速梯度的作用下, 声波在传播时会向海底弯曲, 并且由于海底山状散射体的反向散射作用, 部分声能会被限制在 $x \in [0, 20h]$ 区域, 而选择的聚焦点 $(35h, 0.1h)$ 既位于透射区域, 又处在海面附近, 直觉上声波似乎难以传播至聚焦点所在区域, 但输入计算得到的对应目标点的最佳入射波时, 实现了在该点良好的声聚焦现象. 由于散射体不再近似刚硬, 在图 7(a) 中可以发现散射体内部存在声压分布, 且密度和声速的不同改变了声波的波长. 最佳

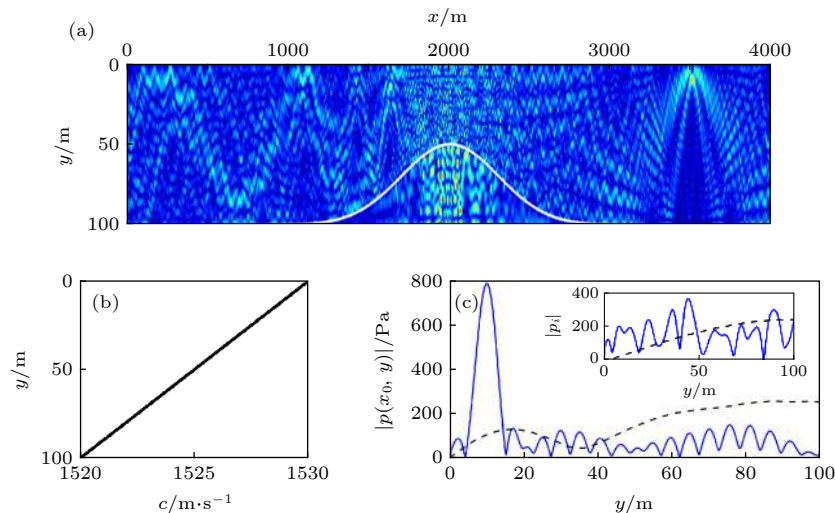


图 7 (a) 负声速梯度含散射体浅海波导中的声聚焦, 波导深度 $h = 100\text{m}$, 聚焦点 $(35h, 0.1h)$ 位于透射区域; (b) 声速垂直变化情况; (c) $x = 35h$ 处声压幅值随深度的变化曲线 (蓝色实线) 以及 $p_i = \Lambda\psi_0(y)$ (非平面波) 入射时产生的声压 (黑色虚线) 对比, 插图中为最佳入射波及 $p_i = \Lambda\psi_0(y)$ 的幅值分布

Fig. 7. (a) Sound focusing field in the waveguide with negative sound-speed gradient and a scatterer. The focus is located at $(35h, 0.1h)$, where $h = 100\text{m}$ is the depth; (b) the sound speed profile; (c) $|p(35h, y)|$ (blue solid line) compared with that generated by $p_i = \Lambda\psi_0(y)$. The inset plots the modulus of the optimal incident pressure (blue solid line) and $\Lambda\psi_0(y)$ (black dashed line).

入射声波在实现聚焦的传播过程中充分地利用了边界的反射、散射体的散射以及声速梯度变化引起的介质折射率变化等因素, 最终在目标点处获得了最大声压.

4 讨论

基于多模态导纳法, 本文提出在非均匀波导中的任意位置处实现声聚焦的理论分析方法. 多模态导纳法可以简单直观地将亥姆霍兹方程变换为模态域的耦合偏微分方程组, 并能够有效地规避数值积分时衰减模态可能带来的指数发散问题, 是一种准确高效求解非均匀波导声场的手段.

由于实际中难以把计算得到的精确最佳入射波作为输入, 故讨论当稀疏输入最佳入射波时的声聚焦效果. 以图 3(a) 中变截面波导的声聚焦为例, 分别以半波长和单倍波长为间隔对理论得到的最佳入射波 (图 3(c)) 进行空间采样, 获得稀疏入射波 (图 8(c)). 通过数值积分及适当补零得到对应的模态展开系数, 进而计算声场, 结果分别对应图 8(a) 及图 8(b). 两个声场在聚焦点 $x_0 = 3.2$ 处的幅值分布在图 8(d) 中给出, 并与理论值进行对比. 由图 8

可知, 半波长离散得到的稀疏输入产生的聚焦效果与理论情况基本一致, 原因是半波长离散后的输入可包含绝大部分原输入声波的信息 (奈奎斯特采样定律), 从而能够产生良好的聚焦效果. 而以单倍波长离散得到的稀疏输入作为声源时, 该声源只能包含理论最佳入射波的部分信息, 故产生的聚焦效果对比理论情况有所下降, 但依然可观察到明显的聚焦现象. 因此, 在 y 方向稀疏输入最佳入射波时, 通过合理的离散, 仍可实现良好的声聚焦效果.

此外, 考虑当最佳入射波的幅值或相位存在误差时对声聚焦效果产生的影响. 依然以图 3(a) 为例, 首先固定最佳入射波的相位, 构造一个关于 y 的取值在 $[0.5, 1.5]$ 均匀分布的随机函数, 将其与最佳入射波的幅度相乘 (相当于对最佳入射波的幅度叠加了一个上限为 $\pm 50\%$ 的随机偏差) 作为输入 (图 9(c) 红色虚线), 进而求解声场 (图 9(a)). 接着, 固定最佳入射波的幅值, 类似地, 构造一个在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 区间内均匀分布的随机函数叠加到最佳入射波的相位上作为输入 (图 9(c) 黑色点划线) 并求解声场 (图 9(b)). 两个声场在聚焦点 $x_0 = 3.2$ 处的幅值分布在图 9(d) 中给出, 并与无扰动时的理论值对比. 从图 9(a) 和图 9(d) 可以看出, 当最佳

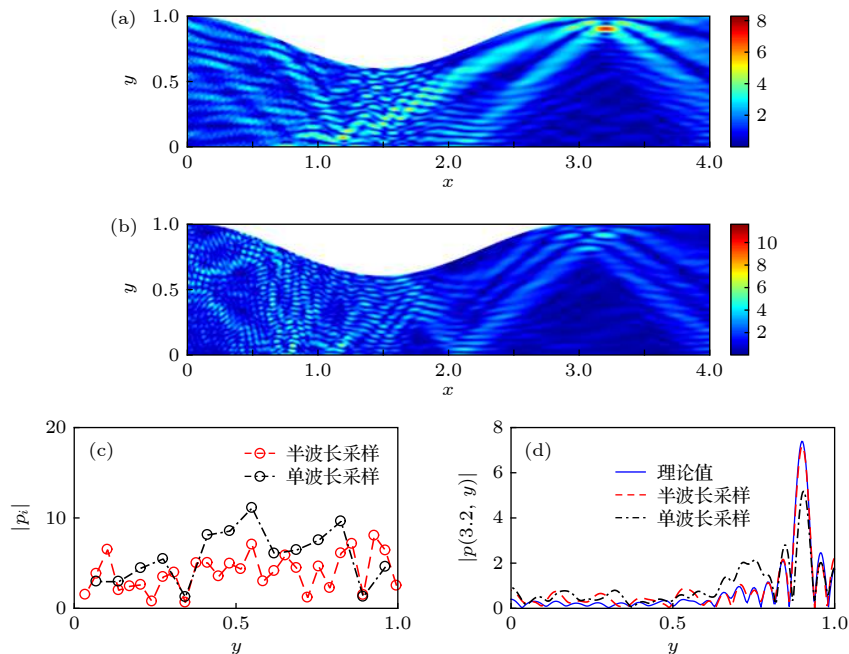


图 8 y 方向稀疏输入对聚焦结果的影响 (a) 对最佳入射波进行半波长采样后的聚焦声场; (b) 对最佳入射波进行单倍波长采样后的聚焦声场; (c) 采样后的入射波幅值分布; (d) 聚焦点 x_0 处的声压幅值分布. 蓝色实线为理论值, 与图 3(c) 中的蓝色曲线一致. Fig. 8. Sound focusing fields when the optimal incident wave is discretized: (a) Half-wavelength spacing; (b) single-wavelength spacing; (c) the moduli of the two spaced incident waves; (d) the red dashed line and the black dot-dashed line are the corresponding $|p(3.2, y)|$ generated by the incident waves in (c). The blue solid line is the theoretical result which is same as that in Fig. 3(c).

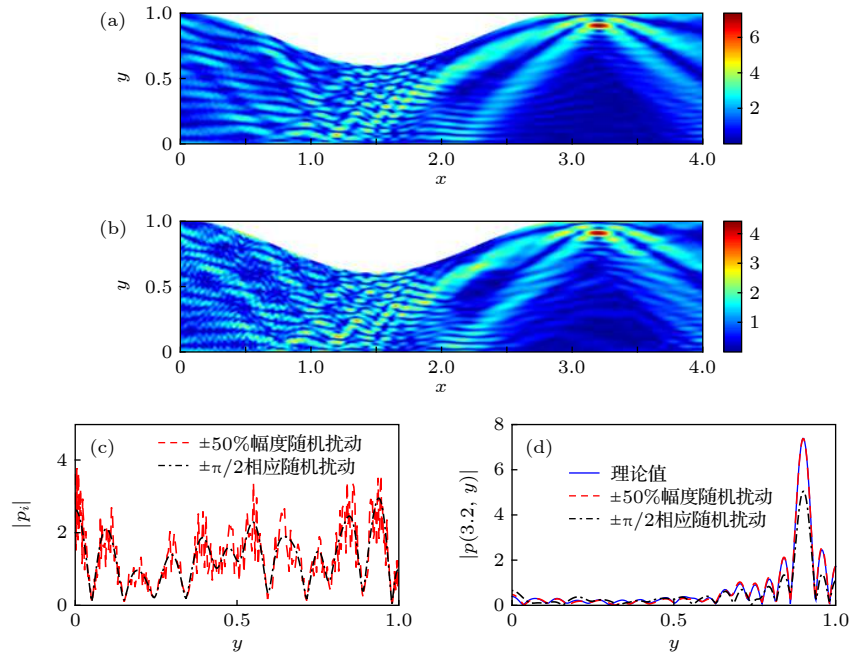


图 9 (a) 最佳入射波的幅值存在随机扰动时的聚焦声场; (b) 最佳入射波的相位存在随机扰动时的聚焦声场; (c) 红色虚线与黑色点划线分别为幅值扰动与相位扰动后的入射波幅值分布; (d) 红色虚线与黑色点划线分别为 (c) 中的入射波在聚焦点 x_0 处产生的声压幅值分布, 蓝色实线为理论值, 与图 3(c) 中的蓝色曲线一致

Fig. 9. Sound focusing fields when (a) the moduli and (b) the arguments of the optimal incident wave are perturbed; (c) the red dashed line is the incident wave with perturbed moduli, and the black dot-dashed line is that with perturbed arguments; (d) the red dashed line and the black dot-dashed line are the corresponding $|p(3.2, y)|$ generated by the incident waves in (c). The blue solid line is the result without perturbation which is same as that in Fig. 3(c).

入射波的幅值存在较大范围随机扰动时, 其产生的聚焦效果与理论情况基本一致. 而根据图 9(b) 和图 9(d), 当最佳入射波的相位存在随机扰动时, 聚焦效果有所下降. 声源存在随机扰动时依然可产生聚焦的原因是波导中的衰减模态能够抑制声波高阶振荡 (与波长对比) 成分的传播, 所以即便入射声波的幅值或相位存在随机误差, 经过衰减模态的修正, 扰动后的入射波依然会在目标位置处实现声聚焦效应. 图 9 表明声聚焦对幅度的扰动具有强鲁棒性, 对相位的扰动兼具一定的稳健性.

另外, 本文实现的声波空间聚焦是输入最佳入射条件时, 相应位置处声压的幅值达到最大. 最佳入射条件通过推导声压场与入射波的映射关系, 即映射向量 $\mathbf{Q}^T(x_0, y_0)$ 给出, 该映射关系在透射区域用透射矩阵描述, 在散射区域由传播算子表征. 在光学领域, 有很多学者研究优化透射理论 (optimal wave transmission), 对透射矩阵进行处理, 实现波的最大能量透射^[29,30]. 本文的方法结合优化透射理论, 可以为实现非均匀波导中全透射聚焦提供可行性, 使波既能全透射 (无反射) 地穿过散射区域, 又能产生空间聚焦.

5 结 论

本文分析了水平变截面、含散射体以及声速垂直变化三种非均匀波导中的声聚焦现象, 从理论上推导出使声波在波导中任意位置处聚焦的入射条件. 采用多模态导纳法, 将声压及其水平方向偏导数用 (局部) 本征模态作为基底展开, 代入亥姆霍兹方程中进行投影, 利用本征模态的正交性, 最终使声压满足的亥姆霍兹方程转化为模态展开系数的耦合偏微分方程组. 引入导纳矩阵和传播算子, 计算反射矩阵和透射矩阵, 给出任意一点处声压与入射声压的映射关系, 将聚焦问题转变为级数求和或希尔伯特空间内积的极值问题, 发生聚焦时的入射波模态展开系数为映射向量的共轭转置. 结果表明, 当入射声波是计算得到的精确的最佳入射声波时, 可在均匀、非均匀波导中实现明显的单点或多点声波聚焦现象. 并且当稀疏输入最佳入射波, 或最佳入射波的幅度或相位存在误差时, 仍可实现较好的声聚焦效果. 声聚焦对幅度的扰动具有强鲁棒性, 对相位的扰动有一定的稳健性. 声聚焦的过程

充分利用了波导的结构及非均匀性对声波的散射作用, 例如边界的反射、散射体或边界起伏带来的前向后向散射以及声速梯度变化引起的介质折射率连续变化等. 该方法在声保密通信、超声医疗及无损检测等领域具有潜在的应用价值.

参考文献

- [1] Gupta B C, Ye Z 2003 *Phys. Rev. E* **67** 036603
- [2] Håkansson A, Cervera F, Sánchez-Dehesa J 2005 *Appl. Phys. Lett.* **86** 054102
- [3] Climente A, Torrent D, Sánchez-Dehesa J 2010 *Appl. Phys. Lett.* **97** 104103
- [4] Guenneau S, Movchan A, Pétursson G, Ramakrishna S A 2007 *New J. Phys.* **9** 399
- [5] Liu C, Sun H X, Yuan S Q, Xia J P 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 174 (in Chinese) [刘宸, 孙宏祥, 袁寿其, 夏建平 2016 *物理学报* **65** 174]
- [6] Liu C, Sun H X, Yuan S Q, Xia J P, Qian J 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 167 (in Chinese) [刘宸, 孙宏祥, 袁寿其, 夏建平, 钱皎 2017 *物理学报* **66** 167]
- [7] Zel'dovich B Y, Popovichev V I, Ragul'skii V V, Faizullov F S 1972 *JETP Lett.* **15** 109
- [8] Papadopoulos I N, Farahi S, Moser C, Psaltis D 2012 *Opt. Express* **20** 10583
- [9] Popoff S M, Lerosey G, Carminati R, Fink M, Boccara A C, Gigan S 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 100601
- [10] Rotter S, Gigan S 2017 *Rev. Mod. Phys.* **89** 015005
- [11] Vellekoop I M, Mosk A P 2007 *Opt. Lett.* **32** 2309
- [12] van Putten E G, Akbulut D, Bertolotti J, Vos W L, Lagendijk A, Mosk A P 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 193905
- [13] Aulbach J, Gjonaj B, Johnson P M, Mosk A P, Lagendijk A 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 103901
- [14] Katz O, Small E, Bromberg Y, Silberberg Y 2011 *Nat. Photonics* **5** 372
- [15] McCabe D J, Tajalli A, Austin D R, Bondareff P, Walmsley I A, Gigan S, Chatel B 2011 *Nat. Commun.* **2** 447
- [16] Mounaix M, Andreoli D, Defienne H, Volpe G, Katz O, Grésillon S, Gigan S 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 253901
- [17] Fink M, Cassereau D, Derode A, Prada C, Roux P, Tanter M, Thomas J L, Wu F 2000 *Rep. Prog. Phys.* **63** 1933
- [18] Derode A, Roux P, Fink M 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 4206
- [19] Yin J W, Hui J, Hui J Y, Sheng X L, Yao Z X 2007 *Acta Acust.* **32** 362 (in Chinese) [殷敬伟, 惠娟, 惠俊英, 生雪莉, 姚直象 2007 *声学学报* **32** 362]
- [20] Maurel A, Mercier J F, Félix S 2014 *J. Acoust. Soc. Am.* **135** 165
- [21] Bandres M A, Gutiérrez-Vega J C, Chávez-Cerda S 2004 *Opt. Lett.* **29** 44
- [22] Pagneux V, Amir N, Kergomard J 1996 *J. Acoust. Soc. Am.* **100** 2034
- [23] Lu Y Y, McLaughlin J R 1996 *J. Acoust. Soc. Am.* **100** 1432
- [24] Pagneux V 2010 *J. Comput. Appl. Math.* **234** 1834
- [25] Lu Y Y 2005 *J. Comput. Appl. Math.* **173** 247
- [26] Maurel A, Mercier J F, Pagneux V 2014 *Proc. R. Soc. A* **470** 20130448
- [27] Li Q, Liu J, Guo W 2020 *Chin. Phys. B* **29** 014303
- [28] Huang Y W 2005 *Ph. D. Dissertation* (Harbin: Harbin Engineering University) (in Chinese) [黄益旺 2005 博士学位论文(哈尔滨: 哈尔滨工程大学)]
- [29] Popoff S M, Lerosey G, Fink M, Boccara A C, Gigan S 2011 *New J. Phys.* **13** 123021
- [30] Kim M, Choi W, Choi Y, Yoon C, Choi W 2015 *Opt. Express* **23** 12648

Sound focusing in inhomogeneous waveguides

Guo Wei³⁾ Yang De-Sen^{1)2)3)†}1) (*Acoustic Science and Technology Laboratory, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China*)2) (*Key Laboratory of Marine Information Acquisition and Security (Harbin Engineering University),
Ministry of Industry and Information, Harbin 150001, China*)3) (*College of Underwater Acoustic Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China*)

(Received 9 December 2019; revised manuscript received 3 February 2020)

Abstract

A method for analytically studying sound focusing in inhomogeneous waveguides is presented. From the viewpoint of acquiring the maximum acoustic pressure at an arbitrary position with normalized energy flux injection, optimal incident waves can be derived based on the multimodal admittance method. The method involves two steps. The first step is to expand the wave solution onto a complete orthogonal basis set so that the Helmholtz equation can be transformed into two sets of first-order coupled differential equations in the modal domain. The second step is to solve the coupled equations numerically by introducing admittance matrices and propagators, which can be used to derive reflection matrices and transmission matrices. Using the multimodal admittance method, one can circumvent the contamination caused by exponentially diverging evanescent modes and acquire stable wave solutions. Then the mapping between the acoustic pressure at an arbitrary position and that of the incident wave can be constructed, and this mapping changes the problem of wave focusing into solving the extrema of inner products in Hilbert space. The optimal incident waves that generate wave focusing at an arbitrary position can be readily computed together with the corresponding wave solutions. In this paper, we study the sound focusing in waveguides with varying cross-sections, scatterers and sound-speed profiles. The results show that the optimal incident waves will take full advantage of wave scattering caused by the boundaries and inhomogeneities during propagation to achieve the maximum pressure at foci, leading to good single-point and multi-point sound focusing performance. In addition, we find when injecting the spatially sampled optimal incident waves or the optimal incident waves with random perturbations, the resultant wave focusing phenomena will be still apparent. The focusing behaviors are highly robust to the perturbations of the moduli of the incident waves and slightly less robust to that of the arguments of the incident waves. Our method is also available for analyzing wave focusing in other kinds of inhomogeneous waveguides. We believe that our research can provide guidance on designing acoustic lenses or metamaterials to focus sound waves in complex media, and can offer inspiration in wave communications, imagings and non-destructive testing.

Keywords: sound focusing, inhomogeneous waveguides, multimodal admittance method**PACS:** 43.20.Mv, 43.20.Fn, 43.20.+g**DOI:** [10.7498/aps.69.20191854](https://doi.org/10.7498/aps.69.20191854)† Corresponding author. E-mail: dshyang@hrbeu.edu.cn