

经由脉冲式爆炸连接的复合式张弛振荡*

宋锦 魏梦可 姜文安 张晓芳 韩修静[†] 毕勤胜

(江苏大学土木工程与力学学院, 镇江 212013)

(2019年11月29日收到; 2020年1月17日收到修改稿)

张弛振荡现象普遍存在于自然科学以及工程技术的各个领域, 探索张弛振荡的可能路径是张弛振荡研究的重要问题之一. 最近, 一种名为“脉冲式爆炸”(pulse-shaped explosion, PSE) 的可以诱发张弛振荡的新机制被相继报道. PSE 意味着平衡点和极限环表现出了与参数变化相关的脉冲式急剧量变, 这导致系统出现急剧转迁现象, 进而诱发张弛振荡. 本文以多频激励 Mathieu-van der Pol-Duffing 系统为例, 探讨了复合式的张弛振荡现象. 当参数激励和外部激励存在相位差时, 快子系统包含了两个不同的向量场部分, 由此得到了系统的双稳定特性. 特别地, 在狭小的参数范围内, 分岔会随着 PSE 的产生而产生, 这使得 PSE 更具复杂性. 基于此, 揭示了两种复合式的张弛振荡, 其特征是每一周期的演化过程包含了由 PSE 连接的两个张弛振荡簇. 我们的研究深化了对 PSE 及张弛振荡复杂动力学行为的理解.

关键词: 张弛振荡, 脉冲式爆炸, 频率转换快慢分析, 多频激励, 分岔机理

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.69.20191812

1 引言

从生物到化学, 从物理到大气科学, 多尺度耦合效应问题^[1-4] 普遍存在, 例如神经元系统的信息传递^[5]、生物代谢过程中的变构效应^[6]、输电塔与塔线之间的耦合振动问题^[7] 以及减速器系统的复杂振动问题^[8] 等. 一般地, 多尺度耦合作用下的非线性系统往往能够表现出复杂的动力学特性, 如张弛振荡. 张弛振荡是一类复杂的振荡模式, 其特征是在每一周期的演化过程中可以观测到大幅振荡和小幅振荡的相互交替.

张弛振荡的动力学机理问题是张弛振荡研究的重要问题之一. 从 1963 年诺贝尔奖获得者 Hodgkin 和 Huxley^[9,10] 在研究神经元放电过程建立的数学模型开始, 张弛振荡就逐渐受到了学者们的关注, 而后 Rinzel 提出的快慢分析法^[11,12] 为研究张弛振

荡提供了理论框架. 快慢分析法在使用时需将多尺度系统分解为维数较低的快、慢子系统. 然而, 在系统降维分解的过程中, 通常会涉及到信息损失, 损失的信息可采用双尺度数学^[13] 加以分析. 基于快慢分析法, 诸如 Canard 现象^[14-16], Shilnikov 同宿轨的失稳^[17-20], Hopf 分岔^[21-24] 以及经由延迟分岔的慢通道效应^[25-27] 等多种路径先后被揭示与张弛振荡的产生有关.

“脉冲式爆炸”(pulse-shaped explosion, PSE) 是最近报道的一种可以诱发张弛振荡的新机制, 其特征是在平衡点/极限环的解支上出现了与参数的变化相关的脉冲状的急剧量变^[28]. 现有的研究表明, PSE 的产生通常与不同激励的频率关系有关; 特别地, 激励频率比增加能够导致 PSE 数量的增加^[29]. 本文考虑一个由 Mathieu^[30,31] 和 van der Pol-Duffing 振荡器^[32-35] 耦合的非线性方程, 即 Mathieu-van der Pol-Duffing 方程 (MVD):

* 国家自然科学基金 (批准号: 11572141, 11632008, 11772161, 11872188) 和江苏省高校“青蓝工程”和江苏大学“青年英才培育计划”项目资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: xjhan@mail.ujs.edu.cn

$$\begin{aligned} & \ddot{x} + [1 + \beta_1 \cos(\omega t)](x + \delta x^3) - \gamma \dot{x}(\alpha - x^2) \\ & = \beta_2 \cos(\omega t + \theta), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\beta_1 \cos(\omega t)$ 和 $\beta_2 \cos(\omega t + \theta)$ 为系统的参数激励和外部激励, 且激励频率 ω 远小于系统的固有频率 ω_0 . 系统 (1) 是一类典型的非线性振动方程, 可采用同伦摄动法^[36]、变分迭代法^[37] 以及指数函数法^[38] 等等多种解析方法加以分析. 特别地, 幅频关系问题是非线性振动研究的重要问题, 系统 (1) 的振动频率可以采用文献^[39] 提出的最简方法加以估算. 此外, 注意到系统 (1) 含有多个参数, 参数的变化往往会引起系统行为的定性变化^[40], 而不同参数之间的耦合作用关系可以考虑采用双参数同伦摄动法^[41] 加以探讨.

本文聚焦于系统 (1) 的 PSE 及其诱导的张弛振荡. 我们发现, 在一定的条件下系统会产生复合式的张弛振荡 (见图 1). 我们分析系统在相位差作用下的双稳定性和 PSE 现象, 由此揭示复合型张弛振荡的产生机制. 研究表明, 系统在每个周期的演化过程中, 先后产生了由 PSE 连接的两个张弛振荡簇, 由此形成了所谓的复合式的张弛振荡.

2 相位差下的双稳定性和 PSE 现象

注意到本文所考虑的激励频率远远小于系统的固有频率. 因此, 系统的激励项 $\cos(\omega t)$ 和 $\cos(\omega t + \theta)$ 在较慢的尺度上演化, 而原系统在较快的尺度上演化, 即系统 (1) 是一个典型的含有两个慢变量的快慢系统. 根据文献^[42] 提出的分析方法, 即频率转换快慢分析法, 可将系统 (1) 转化为仅含一个慢变量的快慢系统. 然后, 通过分析转化后的快慢系统, 进而可以揭示原系统中张弛振荡的动力学机制.

下面, 采用频率转换快慢分析法对系统 (1) 进行分析. 令外部激励 $\cos(\omega t + \theta) = w$ 为基准慢变量. 对于固定的相位差 $\theta = -\pi/2$, 可得 $\cos(\omega t + \theta) = \sin(\omega t) = w$. 另一方面, 注意到 $\cos(\omega t) = \pm\sqrt{1-w^2}$, 故转化后的快慢系统的快子系统可以表示为:

$$\begin{cases} \ddot{x} + (1 + \beta_1 \sqrt{1-w^2})(x + \delta x^3) \\ \quad - \gamma \dot{x}(\alpha - x^2) = \beta_2 w, & (2a) \\ \ddot{x} + (1 - \beta_1 \sqrt{1-w^2})(x + \delta x^3) \\ \quad - \gamma \dot{x}(\alpha - x^2) = \beta_2 w. & (2b) \end{cases}$$

对于 (2a) 式来说, $\omega t \in \left(2n\pi - \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$,

其中 n 为整数; 而对于 (2b) 式来说, $\omega t \in \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$, 其中 n 为整数.

显然, 快子系统 (2) 的平衡点可以表示为 $E(x, 0)$, 其中 x 由方程

$$\begin{cases} (1 + \beta_1 \sqrt{1-w^2})(x + \delta x^3) - \beta_2 w = 0 & (3a) \\ (1 - \beta_1 \sqrt{1-w^2})(x + \delta x^3) - \beta_2 w = 0 & (3b) \end{cases}$$

的实根决定. 在本文的研究中, 取定参数 $\delta > 0$ 和 $\beta_1 > 0$. 在方程 (3a) 中, 注意到关系式

$$\Delta = \frac{\beta_2^2 w^2}{4\delta^2(1 + \beta_1 \sqrt{1-w^2})^2} + \frac{1}{27\delta^3} > 0$$

恒成立, 因此子系统 (2a) 始终存在一个平衡点. 而对于方程 (3b), 当 $(1 - \beta_1 \sqrt{1-w^2}) \neq 0$ 时,

$$\Delta = \frac{\beta_2^2 w^2}{4\delta^2(1 - \beta_1 \sqrt{1-w^2})^2} + \frac{1}{27\delta^3} > 0$$

恒成立. 此时, 子系统 (2b) 存在唯一的平衡点. 特别地, 当 $(1 - \beta_1 \sqrt{1-w^2}) = 0$, 即 $w = \pm\sqrt{\frac{\beta_1^2 - 1}{\beta_1^2}}$ 时, 快子系统 (2b) 不存在平衡点.

2.1 相位差下的双稳定性

当系统仅含一个吸引子时, 系统表现出所谓的单稳定性; 而当两个或两个以上吸引子共存时, 便得到了双稳定性或多稳定性^[43,44]. 对于本文所考虑的系统来说, 在相位差的作用下, 其快子系统被分解为由方程 (2a) 和 (2b) 决定的两个部分. 而每个向量场部分都可能会产生吸引子, 因此相位差的存在可能会诱发快子系统的双稳定性.

为了揭示相位差下的双稳定性, 作出快子系统 (2) 关于 (w, α) 参数平面的分岔集 (见图 2), 系统参数的取值与图 1 相同. 此外, 为了清晰地展示各向量场部分的稳定性和分岔行为, 将分岔集切分为对应于子系统 (2a) 和 (2b) 的两个部分, 并分别绘制于图 2(a) 和图 2(b) 中.

如图 2 所示, 参数平面 (w, α) 被直线 $\alpha = 0.466$ 和 $\alpha = 0.333$ 划分为 A, B, C 三个区域. 首先, 考虑参数 α 属于区域 A 的情形 (即 $\alpha > 0.466$). 以 $\alpha = 1.5$ 时的情形为例, 当 w 从 -1 开始逐渐增大时 (对应图 2(a)), 系统仅含唯一的一个吸引子, 即极限环吸引子 (见图 3(a1)), 且该吸引子无分岔行为的发生. 当 w 增大到 1 之后, 便逐渐减小. 此时, 系统从向量场 (2a) 切换到 (2b). 随着 w 的逐渐减小, w 将依

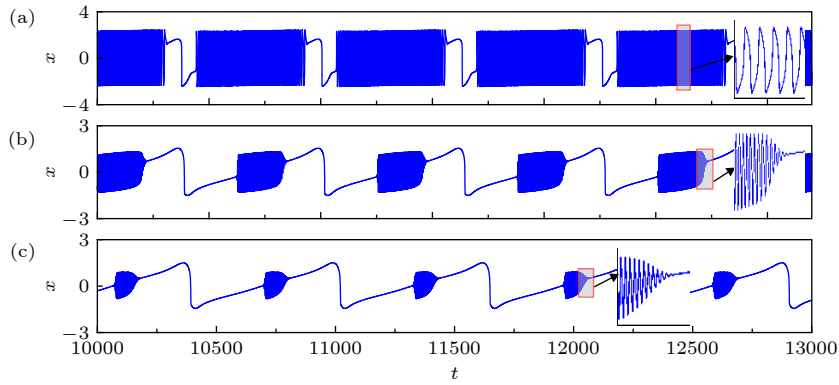


图 1 系统 (1) 中典型的复合式张弛振荡 (a) $\alpha = 1.5$; (b) $\alpha = 0.4$; (c) $\alpha = 0.2$. 其他参数固定在 $\gamma = 4$, $\delta = 1.00$, $\beta_1 = 0.99$, $\beta_2 = 1$, $\omega = 0.01$ 和 $\theta = -\pi/2$

Fig. 1. Typical compound relaxation oscillations in system (1): (a) $\alpha = 1.5$; (b) $\alpha = 0.4$; (c) $\alpha = 0.2$. Other parameters are fixed at $\gamma = 4$, $\delta = 1$, $\beta_1 = 0.99$, $\beta_2 = 1$, $\omega = 0.01$ and $\theta = -\pi/2$.

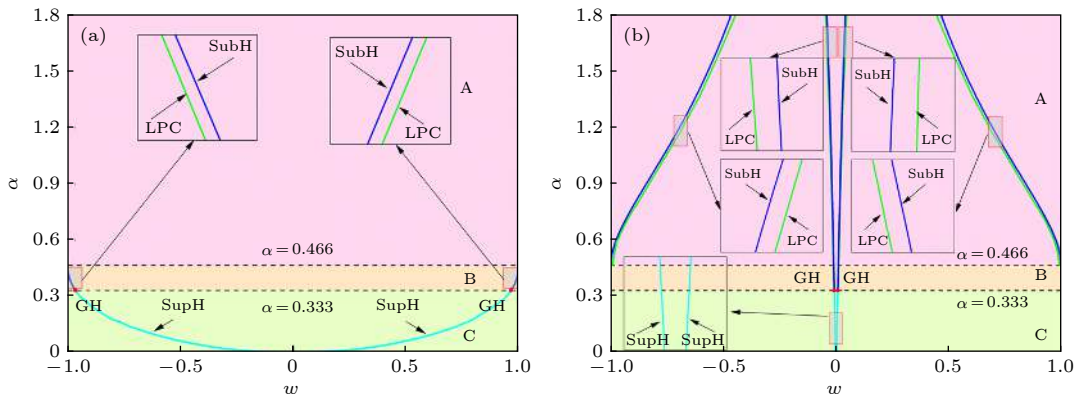


图 2 (a) 子系统 (2a) 和 (b) 子系统 (2b) 在参数平面 (w, α) 上的分岔集. 其中 GH 为广义 Hopf 分岔, SubH 为亚临界 Hopf 分岔, SupH 为超临界 Hopf 分岔, LPC 为极限环的分岔. 系统参数的取值与图 1 相同

Fig. 2. Bifurcation sets of the subsystem (2a) (a) and (2b) (b) in the parameter plane (w, α) . Here GH represent the generalized Hopf bifurcation, SubH represent the subcritical Hopf bifurcation, SupH represent the supercritical Hopf bifurcation, LPC represent the limit point cycle bifurcation. The values of system parameters are the same as those in Fig. 1.

次穿越 8 条分岔曲线, 发生 8 次分岔 (见图 3(a2)).

然后, 以 $\alpha = 0.4$ 为例, 考虑参数 α 属于区域 B 时 (即 $0.333 < \alpha < 0.466$) 的情形. 当 w 从 -1 逐渐增大时, 系统将先后产生 4 次分岔, 即极限环的 fold 分岔, 亚临界 Hopf 分岔, 亚临界 Hopf 分岔, 极限环的 fold 分岔 (见图 3(b1)). 随后, w 开始减小, 系统切换到了向量场 (2b). 接着, 与区域 B 中的 4 条分岔曲线相关的 4 种分岔行为依次发生 (见图 3(b2)).

最后, 考虑参数 α 属于区域 C 时 (即 $\alpha < 0.333$) 的情形. 以 $\alpha = 0.2$ 为例, 当系统由向量场 (2a) 支配时, w 将两次穿越超临界 Hopf 分岔值 (见图 3(c1)); 而当系统由向量场 (2b) 支配时, w 也将两次穿越超临界 Hopf 分岔值 (见图 3(c2)).

综上, 相位差的存在使得快子系统被切割为 (2a) 和 (2b) 两部分. 图 3 给出了子系统 (2a) 和

(2b) 在各参数区域中典型的稳定性和分岔行为. 可以发现, 不论是子系统 (2a), 还是 (2b), 它们均表现出了单稳态的动力学特性. 另一方面, 注意到子系统 (2a) 和 (2b) 联合构成了快子系统 (2), 因此快子系统 (2) 呈现出了因相位差的存在而诱发的双稳定性.

2.2 相位差下的 PSE 现象

考虑到系统 (2b) 中, β_1 在 1 附近时存在临界峰值. 为了更加深入地揭示系统的 PSE 行为, 固定参数 $\alpha = 1.5$, 其他系统参数同图 1(a). 对转换后的快子系统 (2b) 作关于 (w, β_1) 参数平面的分岔集 (如图 4 所示), 的确, 当 β_1 在 1 附近时系统会产生不同的分岔行为. 为了定性分析快子系统 (2b) 的分岔行为, 固定其他参数, 仅改变 β_1 , 分别取定 β_1

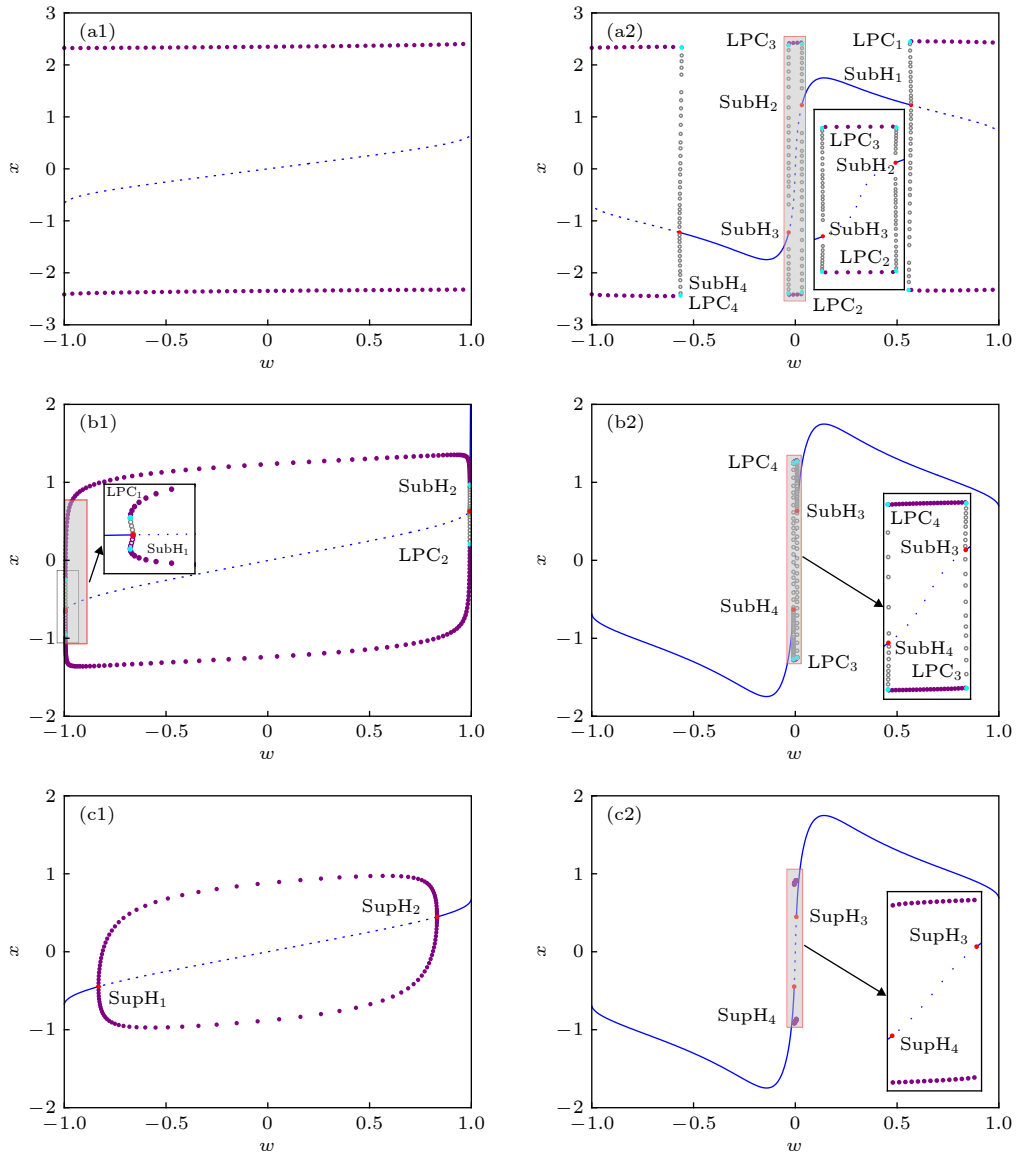


图 3 快子系统 (2) 在 A, B, C 各区域中典型的稳定性和分岔行为 (a1), (a2) $\alpha = 1.5$; (b1), (b2) $\alpha = 0.4$; (c1), (c2) $\alpha = 0.2$. 其他参数的取值与图 1 相同

Fig. 3. Typical stability and bifurcation behaviors of the fast subsystem (2) in the areas A, B and C: (a1), (a2) $\alpha = 1.5$; (b1), (b2) $\alpha = 0.4$; (c1), (c2) $\alpha = 0.2$. The values of other parameters are the same as those in Fig. 1.

分别为 1.1, 1, 0.99 作关于 (w, x) 相平面的分岔图, 如图 5(a), 图 5(b) 和图 3(a2) 所示.

由于临界峰值的存在, 且临界值为 $w = \pm\sqrt{(\beta_1^2 - 1)/\beta_1^2}$, 代入可知, 当 $\beta_1 = 1.1$ 时, 临界值为 $w = \pm 0.4166$, 当稳定的平衡线出现在临界值附近时, 平衡点发生急剧的转迁, 在极短的时间, 极短的空间内迅速趋于无穷, 这导致出现急剧陡峭的平衡点迅速离开原曲线, 也称吸引子的急速逃逸. 而当 $\beta_1 = 1$ 时, 临界值为 $w = 0$, 此时系统存在一个发散点, 当稳定的平衡线靠近临界值 0 时, 平衡点发生急剧的转迁, 平衡点迅速趋于无穷, 且临界线左右方向相反. 当 $\beta_1 = 0.99$ 时, 发散区域消失,

平衡线合二为一. 即在给定系统参数情况下, 仅改变参数 β_1 从 1.1 到 1 再到 0.99 时, 穿越三个不同区域, 在临界峰值处, 左右两条平衡线逐渐合二为一, 产生了正负双向脉冲式爆炸, 即正负双向 PSE 现象.

3 复合型张弛振荡

已经分析了相位差下系统的双稳定性和 PSE 现象. 本部分探讨与此相关的张弛振荡的产生. 两类复合式的张弛振荡模式, 即“subHopf/fold-cycle”型和“subHopf/subHopf”型将被揭示.

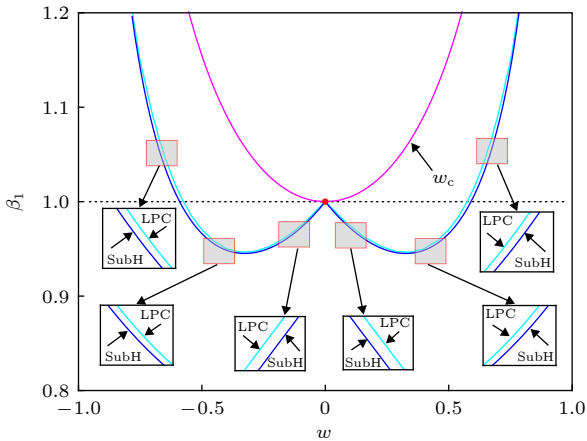


图 4 子系统 (2b) 在参数平面 (w, β_1) 上的分岔集. 其他参数的取值与图 1(a) 相同

Fig. 4. Bifurcation sets of the subsystem (2b) in the parameter plane (w, β_1) . The values of other parameters are the same as those in Fig. 1(a).

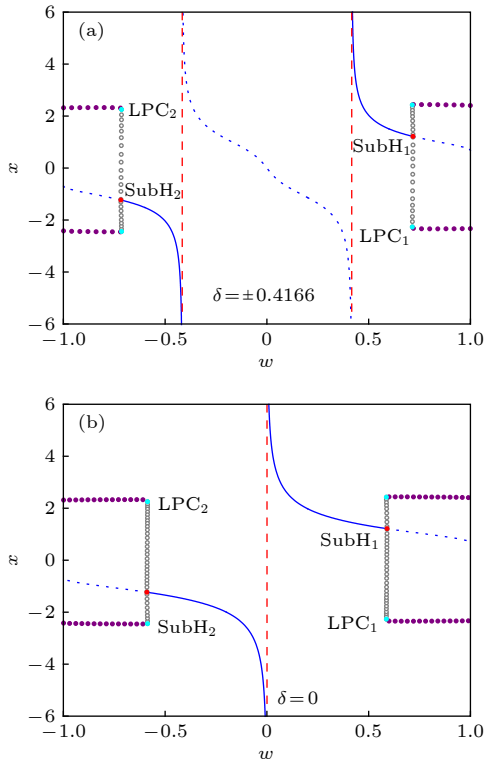


图 5 为子系统 (2b) 的分岔图 (a) $\beta_1 = 1.1$; (b) $\beta_1 = 1$. 其他参数的取值与图 1(a) 相同

Fig. 5. Bifurcation diagrams of the subsystem (2b): (a) $\beta_1 = 1.1$; (b) $\beta_1 = 1$. The values of other parameters are the same as those in Fig. 1(a).

3.1 复合式 subHopf/fold-cycle 型

由于快子系统被划分为对应于不同动力学行为的三个参数区域, 因此当参数取在不同的区域时可能会产生不同的张弛振荡模式. 本部分探讨复合

式 subHopf/fold-cycle 型张弛振荡, 它与参数 α 取在区域 A 和 B 有关. 首先考虑 α 取在区域 A 的情形, 即情形 A.

情形 A 为了便于分析, 固定 $\gamma = 4, \delta = 1, \omega = 0.01, \beta_1 = 0.99, \beta_2 = 1$, 图 2 给出了 (w, α) 参数平面上的分岔集. 如图 2 所示, 当 $\alpha > 0.466$ 时, 在所考虑的参数间隔内不同的 α 不会产生定性的变化. 因此取定 $\alpha = 1.5$ 为情形 A. 通过数值模拟可得到时间历程图, 如图 1(a) 所示, 在每个周期内, 此时系统表现为: 在两个大幅振荡簇之间存在一个正负双向 PSE.

为了更好地揭示该系统的动力学行为, 对系统 (1) 进行快慢分析并引入转换相图, 令 $\cos(\omega t + \theta) = \sin(\omega t) = w$, 由于在该多频激励系统中, 慢变参数均可以用关于 w 的代数式表示. 从而原系统又可以表示为快子系统 (2). 将 $\sin(\omega t) = w$ 作为分岔参数, 在 (w, x) 相平面上作分岔图与慢子系统的转换相图的叠加图, 由于在该多频激励系统中还存在着参数激励 $\cos(\omega t)$, 在用含有 w 的参数表示时, 原系统的分岔图及转换相图应由两部分组成, 如图 6 所示. 在系统 (2) 中, $\alpha = 1.5$ 为对应的情形 A.

结合单周期时间历程图 6(c) 可知, 在系统 (2a) 中, 当慢变量 $\sin(0.01t)$ 从 -1 到 1 逐渐增大时, 对应时间历程图 6(c) 左侧, 轨线始终被稳定的极限环吸引产生大幅振荡 (见图 6(a)). 如图 6(b) 所示, 当慢变量 $\sin(0.01t)$ 达到其最大值 1 时, 慢变量开始减小, 对应时间历程图 5(c) 右侧. 结合图 6(b) 所示, 即在图 6(b) 中最右侧, 轨线仍旧被稳定的极限环吸引产生大幅振荡. 当慢变量减小到 LPC_1 分岔点时, 极限环失稳脱离原来的轨道, 随着轨线继续运动, 运动到 $SubH_1$ 分岔点, 轨线由极限环吸引子转迁到平衡点吸引子. 极限环吸引子消失, 从而导致了大幅振荡的消失和小幅振荡的开始, 即系统由激发态向沉寂态转迁. 特别地, 分析结果表明, 此时平衡点类型为结点, 故系统轨线向极限环收敛的速度非常快, 之后轨线沿着稳定的平衡点运动, 根据数值模拟的分岔情况可知, 轨线应该在 $SubH_1$ 分岔点沿着稳定的平衡线向左运动后应该接着运动到 $SubH_2$ 分岔点时, 开始沿着不稳定的极限环起振直至运动到 LPC_2 分岔点产生极限环的 fold 分岔. 吸引子变成稳定的极限环, 继续向左运动. 当慢变继续减小轨线运动到 LPC_3 分岔点, 经由 LPC_3 分岔点产生不稳定的极限环, 随后跳向 $SubH_3$ 分岔点, 系统由激发态向沉寂态转迁. 轨

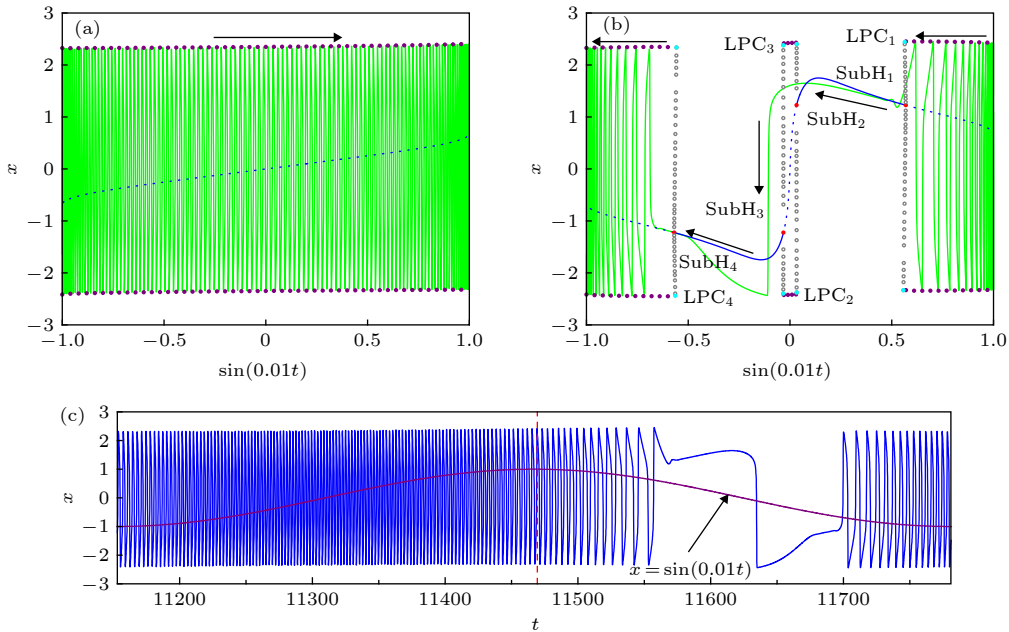


图6 图1(a)中的张弛振荡的快慢分析 (a)张弛振荡的转换相图与图3(a1)中的分岔图的叠加(与子系统(2a)相关);(b)张弛振荡的转换相图与图3(a2)中分岔图的叠加(与子系统(2b)相关);(c)一个完整周期下的张弛振荡.这里 $\alpha = 1.5$,而其他参数与图1相同

Fig. 6. Fast-slow analysis of the relaxation oscillations in Fig. 1(a): (a) Overlay of the transformed phase diagram of the relaxation oscillations and the bifurcation diagram in Fig. 3(a1) (related to the subsystem (2a)); (b) overlay of the transformed phase diagram of the relaxation oscillations and the bifurcation diagram in Fig. 3(a2) (related to the subsystem (2b)); (c) a whole period of the relaxation oscillations. Here $\alpha = 1.5$ and other parameters are the same as those in Fig. 1.

线应脱离极限环继续向左运动. 然而由于 SubH_2 分岔点及 SubH_3 分岔点间隔时间非常短, 轨线还未来得及跳上极限环, 轨线就已经穿过该区域, 又迅速转迁到平衡线上. 即系统产生了正负双向 PSE. 平衡线急剧转迁, 直接越过该区域到达 SubH_3 分岔点, 并运动到稳定的平衡线上. 随着慢变量的继续减小, 轨线运动到 SubH_4 处开始起振, 经由 LPC_4 点后, 产生极限环的 fold 分岔, 轨线跳到稳定的极限环上, 但由于“慢通道效应”, 轨线并没有立刻起振, 而是继续运动一段时间后起振到极限环上, 到 $\sin(0.01t)$ 最小值时, 完成一次循环, 开始下个周期. 也可以说正负双向脉冲式爆炸连接了 subHopf/fold cycle 型脉冲式爆炸.

情形 B 当参数 α 取在区域 B 时, 即其他参数同情形 A 仅改变 $\alpha = 0.4$ 时, 在参数变化范围内, 改变 α 的取值不会产生定性的变化. 通过数值模拟得到了系统分岔图与转换相图的叠加, 如图 7 所示.

情形 B 与情形 A 相似但不同, 相似点表现在, 情形 B 定性分析与情形 A 均为 subHopf/fold-cycle 型复合式张弛振荡. 不同点具体表现为以下两个方面: 一方面, 当 $\sin(0.01t)$ 从 -1 到 1 逐渐增大

的过程中, 从图 7(a) 可知, 轨线沿着稳定的平衡线运动, 经由“慢通道效应”导致的延迟后, 就已经发生并完成了 subHopf/fold-cycle 分岔. 不同的是, 在情形 A 图 6(a) 中, 轨线仅仅沿着稳定的极限环运动, 系统的稳定性并没有发生任何改变, 直到 $\sin(0.01t)$ 从 1 到 -1 逐渐减小的过程中才产生分岔, 然后发生了 PSE 现象; 另一方面, 从图 2 就可看出, 当 w 从 -1 到 1 增大的过程中, 在情形 A 中并没有产生任何分岔, 而情形 B 中已经产生了 4 次分岔行为, 从单个周期时间历程图 6(c) 和图 7(c) 中也可以很明显发现, 在每个周期内, 情形 B 中经由 PSE 连接的大幅振荡簇的起振范围及起振区域比情形 A 都更小.

3.2 复合式 supHopf/supHopf 型

由图 2 可知, 当参数 α 落在区域 C (即 $\alpha < 0.333$) 时, 慢变量可以穿越不同的分岔曲线, 由此诱发不同的分岔模式和复杂动力学行为. 本部分探讨与此相关的张弛振荡. 当参数 α 落在区域 C 时, 不同的 α 不会导致定性不同的分岔行为. 因此, 不失一般性, 在下面的讨论中固定参数 $\alpha = 0.2$.

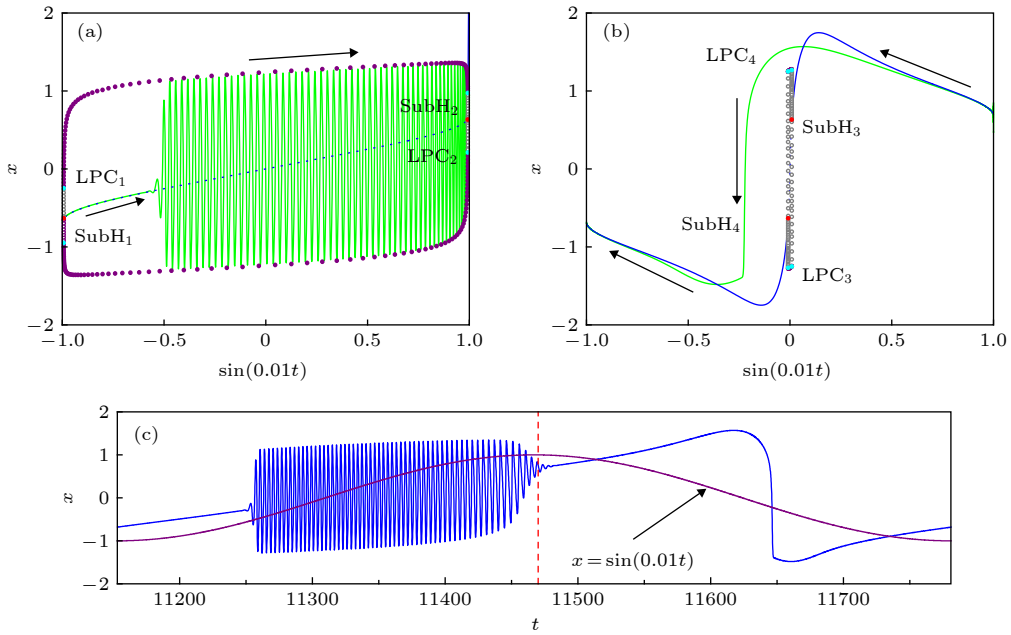


图 7 图 1(b) 中的张弛振荡的快慢分析

Fig. 7. Fast-slow analysis of the relaxation oscillations in Fig. 1(b).

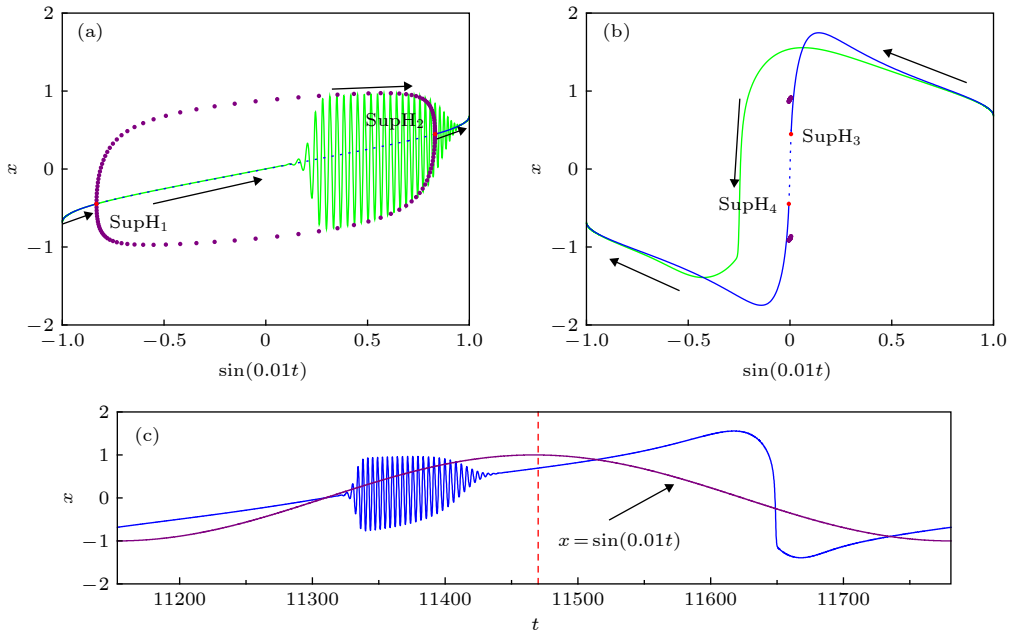


图 8 图 1(c) 中的张弛振荡的快慢分析

Fig. 8. Fast-slow analysis of the relaxation oscillations in Fig. 1(c).

当 $\alpha = 0.2$ 时, 作关于 (w, x) 相平面的分岔图与转换相图叠加图 (见图 8(a) 和图 8(b)). 在图 8(a) 中, 当慢变量 $\sin(0.01t)$ 逐渐增大时, 从时间历程图 8(c) 可知, 轨线从最左侧沿着稳定的平衡线运动, 然后运动到 SupH_1 分岔点, 由于“慢通道效应”, 轨线并未沿着稳定的平衡线运动, 而是接着沿着平衡线运动很长一段时间后才开始起振, 形成

稳定的极限环, 然后运动到 SubH_2 分岔点后, 再经过一段时间后从稳定的极限环上下来, 运动到平衡线上. 然后到最右侧当慢变量 $\sin(0.01t)$ 达到其最大值 1 时, 结合时间历程图 8(c) 可知, 慢变量开始减小, 即轨线从图 7(b2) 最右端沿着稳定的平衡线向左运动. 一直向左运动到 SubH_3 分岔点和 SubH_4 分岔点, 与区域 A 和区域 B 相同, 由于两点之间

隔非常短, 轨线还未来得及起振就已经跳到 SupH_4 分岔点左侧的平衡线处, 沿着稳定的平衡线向左运动, 当 $\sin(0.01t)$ 达到其最小值 -1 时, 完成一次循环. 即正负双向脉冲式爆炸连接了 $\text{subHopf}/\text{subHopf}$ 型张弛振荡.

4 结 论

探讨张弛振荡的动力学机制是张弛振荡研究的重要问题之一. PSE 作为一种诱发张弛振荡的新路径, 吸引着许多科研工作者. 在以往的研究中, 不同激励的频率关系被认为是诱发 PSE 的重要因素, 例如频率关系的改变会导致系统向量场的变化, 这使得极速逃逸现象的数量增多, 进而导致 PSE 数量的增加, 并由此诱发复杂的张弛振荡. 本文的研究表明, 当频率相等的两个激励存在相位差时, 会导致快子系统由两个不同的向量场部分组成, 这诱发了系统的双稳定性和 PSE 现象. 特别地, 其中一个向量场部分展现了关于 PSE 对称的两组分岔行为, 且每组分岔行为可以诱发一个张弛振荡簇. 基于此, 得到了经由 PSE 连接的复合式的张弛振荡模式. 本文的研究基于一个特定的非线性系统. 然而, 由本文的分析可知, 当两个慢变激励存在相位差时, 必然会导致快子系统包含两个不同的向量场部分. 因此, 对于其他系统来说, 有可能也会诱发双稳定性和 PSE 现象. 综上所述, 本文报道的相位差下的双稳定性、PSE 现象以及基于此而产生的复杂的张弛振荡模式也可能在其他系统中被观测到.

参考文献

- [1] Belhaq M, Ghouli Z, Hamdi M 2018 *Nonlinear Dyn.* **94** 2537
- [2] Mani A K, Narayanan M D, Sen M 2018 *Nonlinear Dyn.* **93** 945
- [3] Miwadinou C H, Hinvi L A, Monwanou A V, Orou J B C 2017 *Nonlinear Dyn.* **88** 97
- [4] Miwadinou C H, Monwanou A V, Yovogan J, Hinvi L A, Tuwa P R N, Orou J B C 2018 *Chin. J. Phys.* **56** 1089
- [5] Yu W T, Zhang J, Tang J 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 200201 (in Chinese) [于文婷, 张娟, 唐军 2017 物理学报 **66** 200201]
- [6] Ferraro M, D'annessa I, Moroni E, Morra G, Paladino A, Rinaldi S, Compostella, F, Colombo G 2019 *J. Med. Chem.* **62** 60
- [7] Xie X Z, Sheng W C, Peng J, Long H 2016 *Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering* **36** 972 (in Chinese) [谢献忠, 沈伟成, 彭剑, 龙昊 2016 防灾减灾工程学报 **36** 972]
- [8] Tuttle T D, Seering W P 1996 *IEEE Trans. Rob. Autom.* **12** 368
- [9] Liang X B, Liu X S, Liu A Z, Wang B L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5065 (in Chinese) [梁晓冰, 刘希顺, 刘安芝, 王博亮 2009 物理学报 **58** 5065]
- [10] Li Y X, Rinzel J 1994 *J. Theor. Biol.* **166** 461
- [11] Newby J M, Bressloff P C, Keener J P 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 128101
- [12] Zhang J J, Chen D Y, Zhang H, Xu B B, Li H H, Aggidis G A, Chatterton S 2019 *J. Vib. Control* **25** 2863
- [13] He J H, Ji F Y 2019 *Therm. Sci.* **23** 2131
- [14] Deng B 2004 *Chaos* **14** 1083
- [15] Roberts A 2016 *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **15** 609
- [16] Krupa M, Touboul J D 2016 *J. Dyn. Differ. Equ.* **28** 471
- [17] Golmakani A, Homburg A J 2011 *Dynam. Syst.* **26** 61
- [18] Cheng W, Xiang Z 2019 *J. Differ. Equ.* **267** 3397
- [19] Nikolay D D, Stepan A T 2019 *Appl. Math. Lett.* **96** 208
- [20] LI J Z, Tomsovic S 2019 *Phys. Rev. E* **99** 032212
- [21] Han X J, Xia F B, Ji P, Bi Q S, Kurths J 2016 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **36** 517
- [22] Cao J D, Guerrini L, Cheng Z S 2019 *Appl. Math. Comput.* **343** 21
- [23] Li L, Wang Z, Li Y X, Shen H, Lu J W 2018 *Appl. Math. Comput.* **330** 152
- [24] Han M A, Zhang W N 2010 *J. Differ. Equ.* **248** 2399
- [25] Jiang H P, Zhang T H, Song Y L 2015 *Int. J. Bifurcation Chaos* **25** 1550058
- [26] Monica C, PItchaimani M 2016 *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **27** 55
- [27] Wang Z, Wang X H, Li Y X, Huang X 2017 *Int. J. Bifurcation Chaos* **27** 1750209
- [28] Wei M k, Han X J, Zhang X F, Bi Q S 2019 *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **51** 904 (in Chinese) [魏梦可, 韩修静, 张晓芳, 毕勤胜 2019 力学学报 **51** 904]
- [29] Han X J, Bi Q S, Kurths J 2018 *Phys. Rev. E* **98** 010201
- [30] Mohamad M A, Sapsis T P 2016 *Ocean Eng.* **120** 289
- [31] Lakrad F, Azouani A, Abouhazim N, Belhaq M 2005 *Chaos, Solitons Fractals* **24** 813
- [32] Wiggers V, Rech P C 2018 *Eur. Phys. J. B* **91** 144
- [33] Shukla A K, Ramamohan T R, Srinivas S 2014 *Phys. Scr.* **89** 075202
- [34] Kumar P, Kumar A, Erlicher S 2017 *Physica D* **358** 1
- [35] Tamba V K, Kingni S T, Kuate G F, Fotsin H B, Talla P K 2018 *Pramana-J Phys.* **91** 12
- [36] He J H 2005 *Chaos, Solitons Fractals* **26** 695
- [37] He J H 1999 *Int. J. NonLinear Mech.* **34** 699
- [38] He J H, Abdou M A 2007 *Chaos, Solitons Fractals* **34** 1421
- [39] He J H 2019 *Results in Physics* **15** 102546
- [40] Li Y J, Wu Z Q, Wang F, Zhang G Q, Wang Y C 2019 *J. Low Freq. Noise Vib. Act. Control* UNSP 1461348419878534
- [41] He J H 2014 *Indian J. Phys.* **88** 193
- [42] Han X J, Bi Q S, Ji P, Kurths J 2015 *Phys. Rev. E* **92** 012911
- [43] Sprott J C, Li C B 2014 *Phys. Rev. E* **89** 066901
- [44] Arumugam R, Sarkar S, Banerjee T, Sinha S, Dutta P S 2019 *Phys. Rev. E* **99** 012911

Compound relaxation oscillations connected by pulse-shaped explosion*

Song Jin Wei Meng-Ke Jiang Wen-An Zhang Xiao-Fang
Han Xiu-Jing[†] Bi Qin-Sheng

(*Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China*)

(Received 29 November 2019; revised manuscript received 17 January 2020)

Abstract

Relaxation oscillations are ubiquitous in various fields of natural science and engineering technology. Exploring possible routes to relaxation oscillations is one of the important issues in the study of relaxation oscillations. Recently, the pulse-shaped explosion (PSE), a novel mechanism which can lead to relaxation oscillations, has been reported. The PSE means pulse-shaped sharp quantitative changes related the variation of system parameters in branches of equilibrium points and limit cycles, which leads the system's trajectory to undertake sharp transitions and further induces relaxation oscillations. Regarding externally and parametrically excited nonlinear systems with different frequency ratios, some work on PSE has been reported. The present paper focuses on the PSE and the related relaxation oscillations in a externally and parametrically excited Mathieu-van der Pol-Duffing system. We show that if there is an initial phase difference between the slow excitations with the same frequency ratio, the fast subsystem may compose of two parts with different expressions, each of which determines a different vector field. As a result, the bistable behaviors are observed in the system. In particular, one of the vector fields exhibits two groups of bifurcation behaviors, which are symmetric with respect to the positive and negative PSE, and each can induce a cluster in the relaxation oscillations. Based on this, we present several routes to compound relaxation oscillations, and obtain new types of relaxation oscillations connected by pulse-shaped explosion, which we call compound "subHopf/fold-cycle" relaxation oscillations and compound "supHopf/supHopf" relaxation oscillations, respectively. Our results show that the two clusters in the resultant relaxation oscillations are connected by the PSE, and the initial phase difference plays an important role in transitions to different attractors and the generation of relaxation oscillations. Although the research in this paper is based on a specific nonlinear system, we would like to point out that the bistable behaviors, the PSE and the resultant compound relaxation oscillations can also be observed in other dynamical systems. The reason is that the fast subsystem composes of two different vector fields induced by the initial phase difference, which dose not rely on a specific system. The results of this paper deepen the research about PSE as well as the complex dynamics of relaxation oscillations.

Keywords: relaxation oscillations, pulse-shaped explosion, frequency conversion fast-slow analysis, multi-frequency excitations, bifurcation mechanism

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq

DOI: [10.7498/aps.69.20191812](https://doi.org/10.7498/aps.69.20191812)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11572141, 11632008, 11772161, 11872188) and the Qing Lan Project of Jiangsu Province and the Training Program for Young Talents of Jiangsu University, China.

[†] Corresponding author. E-mail: xjhan@mail.ujs.edu.cn