

相干与路径信息*

吕鑫†

(六盘水师范学院物理与电气工程学院, 六盘水 553000)

(2019年11月3日收到; 2020年1月21日收到修改稿)

近年来, 随着对相干性量化的发展, 相干与路径信息间的互补关系渐渐引起人们注意. 这样的互补关系不仅在基础量子力学方面有重要的理论意义, 同时也在量子信息技术中有实际应用. 本文从 Bures 距离和明确量子态区分出发, 系统地研究了二路径干涉仪中的相干与路径信息, 并建立了一个全新的互补关系. 与已知的类似工作相比, 本文的研究更为一般: 既考虑纯态, 也考虑混合态; 既探讨了干涉仪本身的路径不对称性所提供的路径可预测性, 也探讨了因路径探测器而生的路径可区分度. 具体地说, 路径可预测性的讨论只依赖于密度矩阵的半正定性, 而路径可区分度的讨论还需要利用保真度和 Schur-Weyl 不等式等工具.

关键词: 相干, 互补性, 波粒二象性, 明确量子态区分

PACS: 03.65.Ta, 03.67.-a, 07.60.Ly

DOI: 10.7498/aps.69.20191084

1 引言

波粒二象性作为玻尔互补性原则^[1,2]最重要的例证, 在量子力学的理论发展中扮演着重要的角色. 上世纪八十年代以来, 随着量子信息技术的涌现和发展, 人们开始关注量化波粒二象性, 或更一般的互补性原则的量化问题, 并建立了一系列不等式关系^[3-17]. 其中, 最基本和最重要的是由 Jaeger 等^[5]和 Englert^[6]针对二路径干涉仪建立的下面的关系

$$\mathcal{D}^2 + \mathcal{V}^2 \leq 1, \quad (1)$$

其中粒子性的量度 \mathcal{D} 描述了路径的可区分度, 而波动性的量度 \mathcal{V} 则描述了干涉条纹的强度. 值得注意的是, (1) 式中的等号当且仅当量子态为纯态时达到. 从量子态纯化的角度, 任一混合态都可以看作某个更大空间的纯态. 这样对于混合态, (1) 式严

格地小于 1 是由于约化过程中损失了部分信息. 量化波粒二象性的理论框架在本世纪初已经发展成形成, 在文献^[8,9]中, 作者提出了合理的粒子性和波动性量度所应具有的统一性和凸性等性质. 目前, 实验学家已经进行了许多关于二路径干涉仪, 即波粒二象性的验证实验^[18-29]. 值得注意的是, 在以上验证中, 出现过一次“违背”(1)式的情况^[26], 具体的解释和讨论可以参阅文献^[28,29].

最近, 因为利用资源理论量化相干性取得的一系列结果^[30-43], 人们开始试图从相干性的角度重新审视量化波粒二象性的问题. 具体而言, 因为相干性与干涉对比度密切相关, 自然而然地可以作为波动性的量度. 由此出发, 人们得到了一系列关于相干性和路径可区分度的互补关系^[14-17]. 在这些工作中, 量子态区分的概念开始与量化互补性原理联系起来. 但目前这方面的工作都缺乏一般性, 有的工作专注讨论纯态而忽略混合态^[14,17], 而且大多只关心从路径探测器 (which-path detector) 中获

* 贵州省教育厅青年科技人才成长项目 (批准号: QJHKYZ[2018]377)、六盘水师范学院高层次人才科研启动基金 (批准号: LPSSYKYJJ201813)、六盘水师范学院重点专业建设项目 (批准号: LSZDZY2018-03) 和贵州省科技厅科技平台及人才团队计划项目 (批准号: QKH*Platform&Talent[2018]5777) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: lyuxinlps@outlook.com

取的路径区分度^[14-17], 而忽略干涉仪本身不对称性中隐含的路径可预测性. 本文的目的即在于从最一般的角度研究二路径干涉仪中相干与路径信息的互补关系. 为此, 我们利用 Bures 距离^[44-46] 量化路径信息, 并利用明确量子态区分^[47-50], 赋予其清晰的物理意义. 我们将看到, 干涉仪本身的互补性是密度矩阵半正定性质的直接推论; 而路径探测器的应用并不能增大同时可能获取的粒子性信息和波动性信息, 二者此涨彼消, 体现出互补性. 因此, 我们的工作是对已知结果, 特别是文献^[14,17] 中关于互补性结果的推广.

本文剩余部分安排如下: 第 2 节中将讨论一般情况下的路径信息和相干. 针对干涉仪本身的路径不对称性, 我们得到一个全新的、类似于 (1) 式的量化波粒二象性关系. 而讨论路径探测器的应用所需的明确量子态区分的概念将在第 3 节中简要介绍, 该节也将提出并证明路径可区分度与相干的互补关系.

2 二路径干涉仪中的粒子性和波动性

考虑一般的二路径干涉仪中的量子自由度. 以粒子性的基 $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ 作为计算基. 其中 $|i\rangle$ 表示粒子通过第 i 个路径的态. 这样, 以此表示的密度矩阵 ρ 的对角元便描述了量子态 ρ 分别通过两个路径的概率, 即 ρ 中可能蕴涵的所有路径信息, 或路径可预测性 (Predictability)^[4-9]. 所以在定义路径信息的时候, 只需要考虑 ρ_{diag} , 即可以人为地忽略所有的非对角元. 参照文献^[17] 中提到的种种优点, 我们希望利用 Bures 距离, 即

$$D_B^2(\rho_1, \rho_2) = 2 - 2\text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1}} \quad (2)$$

作为路径可预测性的量度. 注意到路径的不对称性是获取路径信息的资源, 因而 (2) 式中所比较的两个态 ρ_i 应直接反映出这种不对称性. 为此, 引入颠倒路径的算符

$$X = |2\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2|, \quad (3)$$

并定义可预测性

$$\mathcal{P}(\rho) = \frac{1}{2} D_B^2(\rho_{\text{diag}}, \mathbf{X} \rho_{\text{diag}} \mathbf{X}^\dagger) \quad (4)$$

$$= 1 - 2\sqrt{\rho_{11}\rho_{22}}. \quad (5)$$

简单的计算可以验证, 只有当 $\rho_{11} = \rho_{22}$, 也便是路径完全对称时, 可预测性 \mathcal{P} 才等于 0; 也只有当某

个 $\rho_{ii} = 1$, 也便是路径完全不对称时, \mathcal{P} 才等于 1. 这与我们物理上的考虑完全相符, 也符合文献^[8,9] 中提出的粒子性量度归一性的要求.

在波动性方面, 如引言中所讲, 可以直接利用相干来描述, 即干涉对比度 (Visibility)^[4-9]

$$\mathcal{V}(\rho) = C(\rho) = 2\text{Tr} |\rho_{12}|. \quad (6)$$

从 (5) 式和 (6) 式容易看出, 密度矩阵的半正定性质, 即 $\rho \geq 0$ 可以推出

$$\mathcal{P}(\rho) + \mathcal{V}(\rho) \leq 1, \quad \forall \rho, \quad (7)$$

即针对干涉仪的量子自由度本身的量化波粒二象性关系, 或路径可预测性与相干之间的互补关系. 同时, Bures 距离和相干函数的凸性使 (5) 式和 (6) 式定义的路径可预测性和干涉对比度为合理的粒子性和波动性的量度. 另外, 当不等式 (7) 式得到上限 1 时也正好对应着纯态. 因此, 关系式 (7) 式是一个合理的波粒二象性的表达式. 事实上, 也不难证明 (7) 式与经典的 (1) 式等价. 只是这里我们利用了 Bures 距离, 为其更好地应用在量子信息领域, 也为赋予其明确量子态区分的物理意义奠定了基础.

除了利用干涉仪本身的路径不对称性获取路径信息, 人们也可以利用路径探测器, 即额外的量子自由度来增加对路径的预测以获取更多粒子性的信息. 一般而言, 引入路径探测器自由度后, 我们考虑的量子态变为^[7]

$$\rho_{\text{QW}} = \begin{pmatrix} \rho_{11}\rho_{\text{W}}^{(1)} & \sqrt{\rho_{11}\rho_{22}}\chi_{\text{W}}^\dagger \\ \sqrt{\rho_{11}\rho_{22}}\chi_{\text{W}} & \rho_{22}\rho_{\text{W}}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

式中下标 Q 表示原先的量子自由度, 而 W 则表示路径探测器的量子自由度. 这样, 通过取偏迹, 可以获得

$$\begin{aligned} \rho_{\text{Q}} &= \text{Tr}_{\text{W}} \rho_{\text{QW}} \\ &= \begin{pmatrix} \rho_{11} & \sqrt{\rho_{11}\rho_{22}} \text{Tr}_{\text{W}} \chi_{\text{W}}^\dagger \\ \sqrt{\rho_{11}\rho_{22}} \text{Tr}_{\text{W}} \chi_{\text{W}} & \rho_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (9)$$

以及

$$\rho_{\text{W}} = \text{Tr}_{\text{Q}} \rho_{\text{QW}} = \rho_{11}\rho_{\text{W}}^{(1)} + \rho_{22}\rho_{\text{W}}^{(2)}. \quad (10)$$

相干只与约化的密度矩阵 ρ_{Q} 有关, 所以

$$\mathcal{V}(\rho_{\text{QW}}) = C(\rho_{\text{Q}}) = 2\sqrt{\rho_{11}\rho_{22}} |\text{Tr}_{\text{W}} \chi_{\text{W}}|. \quad (11)$$

可以看到 $|\text{Tr}_{\text{W}} \chi_{\text{W}}|$ 的引入一般使相干变小, 这意味着部分波动性信息被粒子探测器变作了粒子性信息. 而为了量化新的粒子性信息, 即路径可区分度^[7,9],

我们需要引入明确量子态区分的概念.

3 明确量子态区分 (unambiguous quantum state discrimination)

考虑一个量子体系 (ensemble), 已知它分别以概率 p_1, p_2 包含两个量子态 ρ_1, ρ_2 , 对这样的量子体系的明确量子态区分是指寻找一般的量子测量 (POVM) $\{M_1, M_2, M_3\}$, 满足下面的要求

$$\text{Tr}(M_j \rho_k) = \delta_{jk} \text{Tr}(M_k \rho_k), \quad j, k = 1, 2,$$

并令 $p_f = \text{Tr}(M_3(p_1 \rho_1 + p_2 \rho_2))$ 取到最小值. (12)

即当第 i 个测量结果出现时 ($i = 1, 2$), 百分百确定量子态为 ρ_i ; 但当第三个测量结果出现时, 我们不对量子态做出预测. 于是第三个测量结果出现的概率 p_f 便是明确量子态区分失败的概率. 明确量子态区分自然地与量子信息传递联系在一起. 比如对于图 1 所示的有噪信道, 假设 Alice 把量子态 ρ_1, ρ_2 分别以 p_1, p_2 的概率传给 Bob, 但是信道中的噪音会使信号失真, 于是在 Bob 处还出现了多余的 ρ_3 . 在此, 明确量子态区分的成功概率 $1 - p_f$ 即是该有噪信道无错误地传递信息的概率.

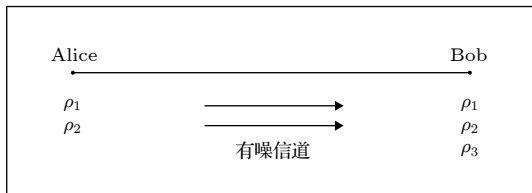


图 1 明确量子态区分在有噪信道中的体现

Fig. 1. Unambiguous quantum state discrimination in a noisy quantum channel.

事实上这样的 POVM 有时候根本不存在. 但是一般而言有下面的不等式关系 [50]

$$p_f \geq 2\sqrt{p_1 p_2} \sqrt{F(\rho_1, \rho_2)}, \quad (13)$$

其中保真度 [45,51,52] 定义为

$$F(\rho_1, \rho_2) = \left[\text{Tr}(\sqrt{\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1}}) \right]^2. \quad (14)$$

于是 Bures 距离可以表示为

$$D_B^2(\rho_1, \rho_2) = 2 - 2\sqrt{F(\rho_1, \rho_2)}. \quad (15)$$

注意到如果明确区分量子体系 $(\rho + X\rho X^\dagger)/2$, 那么由定义式 (5) 式可以看出

$$\mathcal{P}(\rho) = 1 - \sqrt{F(\rho, X\rho X^\dagger)} \geq 1 - p_f. \quad (16)$$

于是路径可预测性 \mathcal{P} 可以看作对量子体系 $(\rho + X\rho X^\dagger)/2$ 做明确量子态区分成功概率的上限. 当增加了路径探测器后, 由 (10) 式我们需要区分的体系变为 $\rho_{11}\rho_W^{(1)} + \rho_{22}\rho_W^{(2)}$, 直接利用不等式 (13) 式, 得到

$$p_f \geq 2\sqrt{\rho_{11}\rho_{22}} \sqrt{F(\rho_W^{(1)}, \rho_W^{(2)})}, \quad (17)$$

从而可以定义路径可区分度 $\mathcal{D}(\rho_{QW})$ 为明确量子态区分系统 $\rho_{11}\rho_W^{(1)} + \rho_{22}\rho_W^{(2)}$ 的成功概率上限

$$\mathcal{D}(\rho_{QW}) = 1 - 2\sqrt{\rho_{11}\rho_{22}} \text{Tr}_W \sqrt{\sqrt{\rho_W^{(1)}} \rho_W^{(2)} \sqrt{\rho_W^{(1)}}}. \quad (18)$$

由 (8) 式可以看出 $\rho_{QW} \geq 0$, 意味着 [53]

$$\sqrt{\rho_W^{(2)}} \rho_W^{(1)} \sqrt{\rho_W^{(2)}} \geq \chi_W \chi_W^\dagger, \quad (19)$$

所以

$$\text{Tr}_W \sqrt{\sqrt{\rho_W^{(1)}} \rho_W^{(2)} \sqrt{\rho_W^{(1)}}} = \text{Tr}_W \left| \sqrt{\rho_W^{(1)}} \sqrt{\rho_W^{(2)}} \right|, \quad (20)$$

$$\geq \text{Tr}_W |\chi_W|, \quad (21)$$

$$\geq |\text{Tr}_W \chi_W|. \quad (22)$$

其中 (21) 式是因为 (19) 式, 及半正定矩阵的性质 [53,54]

$$A \geq B \geq 0 \Rightarrow A^{1/2} \geq B^{1/2}; \quad (23)$$

而 (22) 式是因为 Schur-Weyl 不等式 [55-58].

这样将 (11) 式和 (22) 式代入 (18) 式便得到量子态 ρ_{QW} 的路径可区分度和相干的互补关系

$$\mathcal{D}(\rho_{QW}) + \mathcal{V}(\rho_{QW}) \leq 1, \quad \forall \rho_{QW}. \quad (24)$$

容易看出, 文献 [17] 中关于互补性的结果是 (24) 式在 $\rho_{11} = \rho_{22} = 1/2$ 时的特例. 同样, 我们的结果也是文献 [14] 关于纯态结果对混合态自然的推广. 我们看到利用路径探测器所获得的更多路径信息, 必然伴随着干涉对比度的减弱; 而同时可获取的粒子性信息与波动性信息并不会因为路径探测器的使用而增加.

为了说明上面抽象的计算, 我们来看几个具体的例子. 在文献 [10] 中, 作者讨论了利用非对称分束器的 Mach-Zehner 干涉仪中的波粒二象性关系. 如图 2 所示, 以 $|m_i\rangle, i = 1, 2$ 表示经过镜子 m_i 的路径, 假设第二个分束器 BS_2 为非对称, 整个干涉仪在路径上的效果可以总结为下面的幺正矩阵

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{r} & \sqrt{t} \\ \sqrt{t} & -\sqrt{r} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

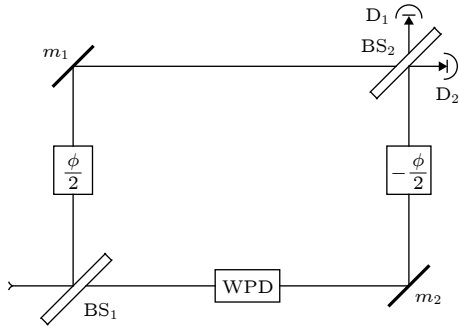


图 2 利用路径探测器 (WPD) 的 Mach-Zehnder 干涉仪
Fig. 2. The Mach-Zehnder interferometer with a which-path detector.

而路径探测器的效果利用么正矩阵 U 表示. 当经过第一个分束器 BS_1 的量子态为 ρ 时, 而探测器的初始态为 ρ_W 时, 最后通过分束器 BS_2 的量子态即为

$$\rho_{QW} = \sum_{j,k=0}^1 e^{i(k-j)\phi} B|m_j\rangle \rho_{jk} \langle m_k| B^\dagger \otimes U^j \rho_W U^{\dagger k}, \quad (26)$$

其中的 ρ_{jk} 表示 ρ 在基矢量 $\{|m_1\rangle, |m_2\rangle\}$ 下的矩阵元. 按照第 2 节中的讨论, 通过取偏迹, 得到

$$\rho_Q = \begin{pmatrix} \rho_{00} & e^{i\phi} \rho_{01} \text{Tr}_W \rho_W U^\dagger \\ e^{-i\phi} \rho_{10} \text{Tr}_W U \rho_W & \rho_{11} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

注意上面的矩阵是在基矢量 $\{B|m_1\rangle, B|m_2\rangle\}$ 下的表示, 即第 2 节中定义的 $|j\rangle = B|m_j\rangle$. 而 (10) 式所需区分的量子体系为

$$\rho_{00} \rho_W + \rho_{11} U \rho_W U^\dagger. \quad (28)$$

于是, 按照上文 (11) 式和 (18) 式的定义, 可以得到

$$\mathcal{V} = 2|\rho_{01}| |\text{Tr}_W \rho_W U^\dagger|, \quad (29)$$

$$\mathcal{D} = 1 - 2\sqrt{\rho_{00}\rho_{11}} \text{Tr}_W \sqrt{\rho_W U \rho_W U^\dagger \rho_W}. \quad (30)$$

这样, 通过类似于 (22) 式的证明, 我们可以得到互补关系式 $\mathcal{D} + \mathcal{V} \leq 1$.

再看两个简单的例子, 从而更好地理解量子纠缠在 (24) 式中的体现. 首先考虑量子态

$$|\Phi_a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_Q |a_1\rangle_W + |2\rangle_Q |a_2\rangle_W), \quad (31)$$

其中 $|a_1\rangle_W, |a_2\rangle_W$ 为不一定相互正交的归一量子态. 可以得到

$$\rho_Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \langle a_2 | a_1 \rangle_W \\ \langle a_1 | a_2 \rangle_W & 1 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

而 $\rho_W^{(i)} = |a_i\rangle\langle a_i|, i = 1, 2$. 这样, 明确区分量子态 $\rho_W^{(1)}, \rho_W^{(2)}$ 的最大成功概率, 也就是上文所定义的路径可区分度, 及相干分别为:

$$\mathcal{D} = 1 - |\langle a_1 | a_2 \rangle_W|, \quad \mathcal{V} = |\langle a_1 | a_2 \rangle_W|. \quad (33)$$

两者之和为 1, 这即是文献 [17] 中所说的信息守恒. 但注意到这里的理论框架较之文献 [17] 更为抽象, 也因而更为简单和一般.

将上面的例子稍微复杂化, 我们考虑下面的量子态

$$|\Phi_{ab}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_Q |a_1\rangle_W |b_1\rangle_E + |2\rangle_Q |a_2\rangle_W |b_2\rangle_E), \quad (34)$$

式中下标 E 表示无法控制的量子自由度. 这样, 可以得到

$$\rho_{QW} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |a_1\rangle\langle a_1| & \langle b_2 | b_1 \rangle_E |a_1\rangle\langle a_2| \\ \langle b_1 | b_2 \rangle_E |a_2\rangle\langle a_1| & |a_2\rangle\langle a_2| \end{pmatrix}. \quad (35)$$

将 (35) 式与 (8) 式比较, 即得到

$$\rho_W^{(i)} = |a_i\rangle\langle a_i|, \quad \chi_W = \langle b_1 | b_2 \rangle_E |a_2\rangle\langle a_1|. \quad (36)$$

即需要区分的两个量子态与第一个例子相同, 所以路径可区分度与上例一样; 而相干则变为

$$\mathcal{V} = |\langle a_1 | a_2 \rangle_W| |\langle b_1 | b_2 \rangle_E|. \quad (37)$$

如果假设 $|\langle b_1 | b_2 \rangle| \neq 1$, 即自由度 E 与自由度 QW 是纠缠的, 那么因为对于自由度 E 无法控制, 部分有用的信息损失掉了, 而互补关系 (24) 式此时变成了严格的不等式.

4 结 论

本文利用 Bures 距离和明确量子态区分研究了二路径干涉仪中相干与路径信息的关系, 得到了两个互补关系 (7) 式和 (24) 式. 其中 (7) 式可以看作标准的量化波粒二象性关系, 同时粒子性的量度 \mathcal{P} 也被赋予了明确的物理意义; 而 (24) 式可以看作对已知结果的一般性推广. 从信息的角度而言, 两个式子都意味着路径信息和相干是互补的. 同时, 我们注意到这样的互补关系与密度矩阵半正定的性质密切相关.

参考文献

- [1] Bohr N 1928 *Nature* **121** 580
- [2] Scully M O, Englert B G, Walther H 1991 *Nature* **351** 111
- [3] Wootters W K, Zurek W H 1979 *Phys. Rev. D* **19** 473
- [4] Greenberger D M, Yasin A 1988 *Phys. Lett. A* **128** 391
- [5] Jaeger G, Shimony A, Vaidman L 1995 *Phys. Rev. A* **51** 54
- [6] Englert B G 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2154
- [7] Englert B G, Bergou J A 2000 *Opt. Commun.* **179** 337
- [8] Dürr S 2001 *Phys. Rev. A* **64** 42113
- [9] Englert B G, Kaszlikowski D, Kwek L C, Chee W H 2008 *Int. J. Quantum Inf.* **06** 129
- [10] Li L, Liu N L, Yu S 2012 *Phys. Rev. A* **85** 054101
- [11] Huang J H, Wölk S, Zhu S Y, Zubairy M S 2013 *Phys. Rev. A* **87** 022107
- [12] Jia A A, Huang J H, Feng W, Zhang T C, Zhu S Y 2014 *Chin. Phys. B* **23** 030307
- [13] Angelo R M, Ribeiro A D 2015 *Found. Phys.* **45** 1407
- [14] Bera M N, Qureshi T, Siddiqui M A, Pati A k 2015 *Phys. Rev. A* **92** 012118
- [15] Bagan E, Bergou J A, Cottrell S S, Hillery M 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 160406
- [16] Bagan E, Calsamiglia J, Bergou J A, Hillery M 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 050402
- [17] Fu S, Luo S, Sun Y 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 030301 (in Chinese) [傅双双, 骆顺龙, 孙源 2019 物理学报 **68** 030301]
- [18] Summhammer J, Rauch H, Tuppinger D 1987 *Phys. Rev. A* **36** 4447
- [19] Dürr S, Nonn T, Rempe G 1998 *Nature* **395** 33
- [20] Dürr S, Nonn T, Rempe G 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 5705
- [21] Mei M, Weitz M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 559
- [22] Trifonov A, Björk G, Söderholm, Tsegaye T 2002 *Eur. Phys. J. D* **18** 251
- [23] Tang J S, Li Y L, Xu X Y, Xiang G Y, Li C F, Guo G C 2012 *Nat. Photonics* **6** 600
- [24] Peruzzo A, Shadbolt P, Brunner N, Popescu S, O'Brien J L 2012 *Science* **338** 634
- [25] Kaiser F, Coudreau T, Milman P, Ostrowsky D B, Tanzilli S 2012 *Science* **338** 637
- [26] Tang J S, Li Y L, Li C F, Guo G C 2013 *Phys. Rev. A* **88** 014103
- [27] Huang J H, Liu H Y, Gao J R, Zubairy M S, Zhu S Y 2013 *Phys. Rev. A* **88** 013828
- [28] Jia A A, Huang J H, Zhang T C, Zhu S Y 2014 *Phys. Rev. A* **89** 042103
- [29] Wang Z, Tian Y, Yang C, Zhang P, Li G, Zhang T 2016 *Phys. Rev. A* **94** 062124
- [30] Levi F, Mintert F 2014 *New J. Phys.* **16** 033007
- [31] Baumgratz T, Cramer M, Plenio M B 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 140401
- [32] Girolami D 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 170401
- [33] Streltsov A, Singh U, Dhar H S, Bera M N, Adesso G 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 020403
- [34] Pires D P, Celeri L C, Soares-Pinto D O 2015 *Phys. Rev. A* **91** 042330
- [35] Yao Y, Xiao X, Ge L, Sun C P 2015 *Phys. Rev. A* **92** 022112
- [36] Winter A, Yang D 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 120404
- [37] Ma J, Yadin B, Girolami D, Vedral V, Gu M 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 160407
- [38] Chang L, Luo S, Sun Y 2017 *Commun. Theor. Phys.* **68** 565
- [39] Streltsov A, Adesso G, Plenio M B 2017 *Rev. Mod. Phys.* **89** 041003
- [40] Luo S, Sun Y 2017 *Phys. Rev. A* **96** 022130
- [41] Luo S, Sun Y 2017 *Phys. Rev. A* **96** 022136
- [42] Yao Y, Dong G H, Xiao X, Li M, Sun C P 2017 *Phys. Rev. A* **96** 052322
- [43] Jin Z X, Fei S M 2018 *Phys. Rev. A* **97** 062342
- [44] Bures D 1969 *Trans. Amer. Math. Soc.* **135** 199
- [45] Bengtsson I, Życzkowski K 2006 *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement* (Cambridge: Cambridge University Press) p258, pp396–401
- [46] Nielsen, M A, Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (10th Anniversary Edition) (New York: Cambridge University Press) pp60–111, 399–416
- [47] Chefles A 2000 *Contemp. Phys.* **41** 401
- [48] Bergou J A, Herzog U, Hillery M 2004 *Discrimination of Quantum States in Quantum State Estimation* (Berlin/Heidelberg: Springer) pp417–465
- [49] Bae J, Kwek L C 2015 *J. Phys. A: Math. Gen.* **48** 083001
- [50] Feng Y, Duan R, Ying M 2004 *Phys. Rev. A* **70** 012308
- [51] Uhlmann A 2000 *Phys. Rev. A* **62** 032307
- [52] Jozsa R 1994 *J. Mod. Opt.* **41** 2315
- [53] Bhatia R 2007 *Positive Definite Matrices* (Princeton/Oxford: Princeton University Press) pp5–12
- [54] Bellman R 1968 *Linear Algebra Appl.* **1** 321
- [55] König H 1979 *Studia Math.* **65** 141
- [56] König H 1986 *Eigenvalue Distribution of Compact Operators* (Basel: Birkhauser) p35
- [57] Pietsch A 1987 *Eigenvalues and s-numbers* (Leipzig: Geest & Portig) p155
- [58] Reed M, Simon B 1978 *Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators* (New York: Academic) p318

Coherence and path information*

Lü Xin[†]*(School of Physics and Electrical Engineering, Liupanshui Normal University, Liupanshui 553000, China)*

(Received 3 November 2019; revised manuscript received 21 January 2020)

Abstract

Complementarity, or more specifically, the wave-particle duality, and quantum coherence are two fundamental concepts in quantum mechanics. Recently, motivated by the progress of the quantification of quantum coherence, the complementary relation between coherence and path information is investigated by many authors, and various duality relations between them are established. Such relations not only provide insights into fundamental problems of quantum mechanics, such as the understanding of quantum coherence and wave-particle duality; but also are important in applications of quantum technologies. In this paper, based on the Bures distance and unambiguous quantum state discrimination, systematic analysis of the complementarity between the quantum coherence and path information in two path interferometers is carried out. Similarly as other related works, the wave aspect, or the visibility of the interferometer, is quantified by the l_1 -norm measure of quantum coherence, and the path information is considered via unambiguous quantum state discrimination. In this way, a novel duality relation in two path interferometers is obtained. Compared with known results, our work considers mixed states as well as pure states; considers the path predictability resulting from the intrinsic path asymmetry of the quantum state, as well as the path distinguishability resulting from the use of a which-path detector. Therefore, our work systematically generalizes known results in two path interferometers by removing all the unnecessary restrictions. Specifically, the most general form of quantum states in two path interferometers is considered and the duality relation between quantum coherence and path information is proved based on the positivity property of density matrices. The cases of path predictability and path distinguishability are considered separately. For path predictability, the proof is straightforward; whereas some advanced mathematical techniques, such as the Schur-Weyl inequality, properties of the fidelity and properties of positive matrices, are required in order to give a rigorous proof of the duality relation between coherence and path distinguishability. Concrete examples are provided to illustrate the abstract method and results. Our work concerns about two path interferometers exclusively and depends heavily that the dimensionality is two, therefore it would be an interesting task to generalize the results in this paper to n -path interferometers.

Keywords: coherence, complementarity, wave-particle duality, unambiguous quantum state discrimination

PACS: 03.65.Ta, 03.67.-a, 07.60.Ly

DOI: 10.7498/aps.69.20191084

* Project supported by the Young Scientific Talents Growth Project of the Department of Education of Guizhou Province, China (Grant No. QJHKYZ[2018]377), the Research Fund for High-level Talents of Liupanshui Normal University, China (Grant No. LPSSYKYJJ201813), the Key Disciplines Construction Project of Liupanshui Normal University, China (Grant No. LSZDZY2018-03), and the Science and Technology Platform and Talent team Project of Science and Technology Department of Guizhou Province, China (Grant No. QKH*Platform&Talent[2018]5777).

† Corresponding author. E-mail: lyuxinlps@outlook.com