

非线性波动方程的新数值迭代方法*

曹娜 陈时[†] 曹辉[‡] 王成会 刘航

(陕西师范大学物理学与信息技术学院, 陕西省超声学重点实验室, 西安 710119)

(2019年9月20日收到; 2019年11月18日收到修改稿)

提出了一种新的求解非线性波动方程的数值迭代法, 它是一种半解析的方法. 与完全的数值计算方法 (如有限元、有限差分法) 相比, 这种迭代法的解具有非常清晰的物理含义, 即它的解是各阶谐波的组合. 与微扰法相比, 它能够考虑各阶谐波的相互作用, 且能够满足能量守恒定律. 用它研究了非线性声波在液体中的传播性质, 结果表明, 在微扰法适用的声强范围内迭代法也适用, 在微扰法不适用的一个较宽的声强范围内迭代法依然适用.

关键词: 非线性声学, 数值迭代法, 能流密度**PACS:** 43.35.+d, 47.35.Rs, 47.20.Ky**DOI:** 10.7498/aps.69.20191440

1 引言

非线性声学是声学的一个重要分支, 当系统的声强比较强时就会产生各种非线性效应, 如谐波产生、冲击波形成、声辐射力的出现等. 非线性声学在某些领域有着重要的运用, 如高声强聚焦超声^[1-4]、超声悬浮^[5-7]、声空化^[8]、声谐波成像^[9,10]、参量发射阵^[11,12]等. 在这些领域中声波的非线性方程的求解是非常重要的.

关于非线性声学系统波动方程的求解, 现阶段用到的方法一般包括: 1) 完全的数值计算方法, 如有限元和有限差分法^[13-17]. 这类方法得到解的物理意义并不明确, 很难揭示非线性作用的物理本质, 而且在很多情况下还会引起数值发散问题, 并非适用于全部的非线性问题. 2) 严格的解析方法^[18-21]. 这种方法只能处理极少数系统的非线性声学问题, 如理想流体中非线性声波的传播. 3) 微扰法^[22]. 它的优点是方法简单和解的物理意义清晰, 但是只适合处理低声强时的非线性效应. 且它只考虑低阶谐

波对高阶谐波的作用, 而忽略其反作用, 因此并不满足能量守恒定律.

对于声学非线性方程的求解问题, 本文提出了一种新的、半解析的数值迭代方法. 它是在频域内把声场展开为傅里叶级数的形式, 实现时间变量和空间坐标的分离. 然后根据计算精度的具体需求, 截断高频谐波而实现方程的求解. 它的解具有非常清晰的物理意义, 即是各阶谐波的组合. 经过研究发现, 在微扰法适用的声强范围内, 本文提出的方法也是适用, 且满足能量守恒定律 (无耗散的系统). 在微扰法不适用的一个较宽的声强范围内, 迭代法依然适用且满足能量守恒定律 (无耗散的系统). 只是在极高声强的情况下, 本文提出的方法才不适用.

2 理论方法

2.1 非线性波动方程的迭代数值方法

在拉格朗日坐标系下, 黏性液体中一维非线性声波的位移满足下式^[23]:

* 国家自然科学基金 (批准号: 11974232, 11374199, 11074159) 资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: chenshi@snnu.edu.cn

[‡] 通信作者. E-mail: caohui@snnu.edu.cn

$$-\frac{1}{c_0^2}u_{,tt} + u_{,xx} + \alpha u_{,xxt} = 2\beta u_{,x}u_{,xx} + \alpha(u_{,xxt}u_{,x} + u_{,xt}u_{,xx}), \quad (1)$$

式中 β 为液体的非线性系数; c_0 是静态时 (即不存在声波时) 液体的声速; $\alpha = 3\mu/(\rho_0 c_0^2)$, 其中 μ 为液体的体积黏滞系数, ρ_0 是静态时 (即不存在声波时) 液体的密度. 下标中逗号后的坐标 x 和时间 t 表示对它们求偏导数. 令 $\mu = 0$, 则方程 (1) 退化为理想液体中一维非线性声波的波动方程.

在许多情况下 (如求解稳态问题), 把 u 中的变量 t 和 x 分离开来是有利的, 一般情况下 u 可以表示为 (可以称为频域内的傅里叶级数展开):

$$u = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (1/2) A_n \exp(in\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} (1/2) A_n^* \exp(-in\omega t), \quad (2)$$

其中 i 是一个虚单位, ω 表示波的角频率; A_0 为一个实数场变量, $A_0/2$ 表示声波的“直流”部分; $A_n (n \geq 1)$ 为第 n 阶谐波的复数场变量 (即复振幅), $A_n \exp(in\omega t)$ 的实部是第 n 阶谐波真实的位移, $A_n^* (n \geq 1)$ 是 A_n 的复数共轭场变量. 注意 A_n 和 A_n^* 中已经不包含时间变量 t , 它们只是空间坐标 x 的函数.

一般情况下高阶谐波是比较弱的, 根据计算精度的需要可以忽略掉某些高阶谐波. 为了简化理论的叙述, 本文只考虑阶数小于或者等于 $N (N \leq 6)$ 的各阶谐波, 忽略掉其他的高阶谐波, 称之为 N 阶近似.

将方程 (2) 代入方程 (1) 中, 因为有相同时间因子 ($\exp(in\omega t)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 的项之和必须为零, 所以可以得到下面的方程:

$$A_{0,xx} = \beta F_0, \quad (3)$$

$$(1 + i\omega\alpha)A_{1,xx} + \omega^2 c_0^{-2} A_1 = \left(\beta + \frac{1}{2}i\omega\alpha\right)F_1, \quad (4)$$

$$(1 + 2i\omega\alpha)A_{2,xx} + 4\omega^2 c_0^{-2} A_2 = \left(\beta + i\omega\alpha\right)F_2, \quad (5)$$

$$(1 + 3i\omega\alpha)A_{3,xx} + 9\omega^2 c_0^{-2} A_3 = \left(\beta + \frac{3}{2}i\omega\alpha\right)F_3, \quad (6)$$

$$(1 + 4i\omega\alpha)A_{4,xx} + 16\omega^2 c_0^{-2} A_4 = \left(\beta + 2i\omega\alpha\right)F_4, \quad (7)$$

$$(1 + 5i\omega\alpha)A_{5,xx} + 25\omega^2 c_0^{-2} A_5 = \left(\beta + \frac{5}{2}i\omega\alpha\right)F_5, \quad (8)$$

$$(1 + 6i\omega\alpha)A_{6,xx} + 36\omega^2 c_0^{-2} A_6 = \left(\beta + \frac{6}{2}i\omega\alpha\right)F_6, \quad (9)$$

其中

$$F_0 = A_{0,x}A_{0,xx} + A_{1,x}^*A_{1,xx} + A_{2,x}^*A_{2,xx} + A_{3,x}^*A_{3,xx} + A_{4,x}^*A_{4,xx} + A_{5,x}^*A_{5,xx} + A_{6,x}^*A_{6,xx} + A_{1,x}A_{1,xx}^* + A_{2,x}A_{2,xx}^* + A_{3,x}A_{3,xx}^* + A_{4,x}A_{4,xx}^* + A_{5,x}A_{5,xx}^* + A_{6,x}A_{6,xx}^*, \quad (10)$$

$$F_1 = A_{0,x}A_{1,xx} + A_{1,x}A_{0,xx} + A_{1,x}^*A_{2,xx} + A_{2,x}A_{1,xx}^* + A_{2,x}^*A_{3,xx} + A_{3,x}A_{2,xx}^* + A_{3,x}^*A_{4,xx} + A_{4,x}A_{3,xx}^* + A_{4,x}^*A_{5,xx} + A_{5,x}A_{4,xx}^* + A_{5,x}^*A_{6,xx} + A_{6,x}A_{5,xx}^*, \quad (11)$$

$$F_2 = A_{1,x}A_{1,xx} + A_{2,x}A_{0,xx} + A_{0,x}A_{2,xx} + A_{3,x}A_{1,xx}^* + A_{1,x}^*A_{3,xx} + A_{4,x}A_{2,xx}^* + A_{2,x}^*A_{4,xx} + A_{5,x}A_{3,xx}^* + A_{6,x}A_{4,xx}^* + A_{3,x}^*A_{5,xx} + A_{4,x}^*A_{6,xx}, \quad (12)$$

$$F_3 = A_{0,x}A_{3,xx} + A_{3,x}A_{0,xx} + A_{1,x}A_{2,xx} + A_{2,x}A_{1,xx} + A_{1,x}^*A_{4,xx} + A_{4,x}A_{1,xx}^* + A_{2,x}^*A_{5,xx} + A_{3,x}^*A_{6,xx} + A_{5,x}A_{2,xx}^* + A_{6,x}A_{3,xx}^*, \quad (13)$$

$$F_4 = A_{0,x}A_{4,xx} + A_{4,x}A_{0,xx} + A_{1,x}A_{3,xx} + A_{3,x}A_{1,xx} + A_{2,x}A_{2,xx} + A_{1,x}^*A_{5,xx} + A_{2,x}^*A_{6,xx} + A_{6,x}A_{2,xx}^*, \quad (14)$$

$$F_5 = A_{0,x}A_{5,xx} + A_{5,x}A_{0,xx} + A_{1,x}A_{4,xx} + A_{4,x}A_{1,xx} + A_{2,x}A_{3,xx} + A_{3,x}A_{2,xx} + A_{6,xx}A_{1,x}^* + A_{6,xx}A_{1,x}^*, \quad (15)$$

$$F_6 = A_{0,xx}A_{6,x} + A_{1,xx}A_{5,x} + A_{2,xx}A_{4,x} + A_{3,xx}A_{3,x} + A_{4,xx}A_{2,x} + A_{5,xx}A_{1,x} + A_{6,xx}A_{0,x}. \quad (16)$$

注意此处只给出了场变量的方程, 共轭场的方程并没有列出来, 只要对方程 (3)—(9) 取复数共轭就可以得到共轭场的方程, 因此方程 (3)—(9) 是完备的.

方程 (3)—(9) 是一组耦合的非线性方程, 直接求解它们是很困难的. 本文提出求解它们的一种新的简单迭代方法. 用 $A^{(m)}$ 和 $A^{*(m)}$ ($m \geq 0$) 表示第 m 次迭代计算得到的场量. 在第 m 次迭代计算中, 采用了如下方法: 方程 (3)—(9) 等号左边的场量取

为 $A^{(m)}$, 右边的场量取为 $A^{(m-1)}$ 和 $A^{*(m-1)}$. 在第 m 次迭代计算中, 用到如下的方程:

$$A_{0,xx}^{(m)} = \beta F_0^{(m-1)}, \quad (17)$$

$$(1 + i\omega\alpha)A_{1,xx}^{(m)} + \omega^2 c_0^{-2} A_1^{(m)} = \left(\beta + \frac{1}{2}i\omega\alpha\right)F_1^{(m-1)}, \quad (18)$$

$$(1 + 2i\omega\alpha)A_{2,xx}^{(m)} + 4\omega^2 c_0^{-2} A_2^{(m)} = (\beta + i\omega\alpha)F_2^{(m-1)}, \quad (19)$$

$$(1 + 3i\omega\alpha)A_{3,xx}^{(m)} + 9\omega^2 c_0^{-2} A_3^{(m)} = \left(\beta + \frac{3}{2}i\omega\alpha\right)F_3^{(m-1)}, \quad (20)$$

$$(1 + 4i\omega\alpha)A_{4,xx}^{(m)} + 16\omega^2 c_0^{-2} A_4^{(m)} = (\beta + 2i\omega\alpha)F_4^{(m-1)}, \quad (21)$$

$$(1 + 5i\omega\alpha)A_{5,xx}^{(m)} + 25\omega^2 c_0^{-2} A_5^{(m)} = \left(\beta + \frac{5}{2}i\omega\alpha\right)F_5^{(m-1)}, \quad (22)$$

$$(1 + 6i\mu\omega)A_{6,xx}^{(m)} + 36\omega^2 c_0^{-2} A_6^{(m)} = (\beta + 3i\omega\alpha)F_6^{(m-1)}, \quad (23)$$

分别用 $A^{(m-1)}$ 和 $A^{*(m-1)}$ 替换 F 中的 A 和 A^* , 得到的结果就是 $F^{(m-1)}$. 方程 (17)–(23) 是一组非耦合的方程, 因此可以分别独立地计算出 $A_n^{(m)}$. 这意味着当涉及到更多的高阶谐波时, 计算量不会急剧地增加.

2.2 本文迭代方法的具体运用过程

用迭代方法研究非线性声波在黏性液体中的传播问题. 现设在 $x = 0$ 处有一列平面波朝 x 正向传播, 其为入射声波, 且声场可以表示为

$$u_i = B_i \exp[i\omega(t - x/c_0)], \quad (24)$$

其中 B_i 是一个已知量. 入射波的能流密度 P_i 可以表示为

$$P_i = \frac{1}{2}\omega^2 \rho_0 c_0 B_i B_i^*. \quad (25)$$

本文需要计算在 $x = L$ 处出射的各阶谐波的声场. 它们可以表示为

$$u_{on} = B_{on} \exp[in\omega(t - x/c_0)] \quad (n = 1, 2, \dots, 6), \quad (26)$$

其中 B_{on} 就是要计算的量. 出射波的能流密度 P_{on} 可以表示为

$$P_{on} = \frac{1}{2}n^2 \omega^2 \rho_0 c_0 B_{on} B_{on}^*. \quad (27)$$

为了求解在 $[0, L]$ 坐标间隔内的非线性声场, 用有限差分法来求解方程 (17)–(23). 在迭代计算

中, 令 $A^{(0)} = 0$ 和 $A^{*(0)} = 0$, 非零的 $A^{(m)}$ 和 $A^{*(m)}$ 由边界激励条件产生. 用到的边界条件是: 在 $x = 0$ 和 $x = L$ 两个端点处, 各阶谐波的位移和垂直应力都是连续的.

3 数值计算和讨论

通过数值计算分析了非线性声波在液体中的传播性质, 得到了本文提出的新数值方法的适用范围, 并证明了其有效性. 在所有的计算中, 如果没有特别说明, 那么用到的参数是: $c_0 = 1.5 \times 10^3$ m/s, $\rho_0 = 10^3$ kg/m³, $P_0 = 1.01 \times 10^5$ Pa, $\mu = 1 \times 10^{-3}$ Pa/s, $L = 0.05$ m, $\omega = 5 \times 10^6$ rad/s, $\beta = 3.5$. 如果文中或图中对某个参数有特别说明, 那么该参数就替换为特殊说明处的数据.

图 1 显示了非线性声波在理想液体 ($\mu = 0$) 中传播时能量守恒的破坏程度 E_d 、二阶谐波的相对能流 P_2/P_1 和三次谐波的相对能流 P_3/P_1 随入射能流 P_i 的变化情况. 能量守恒的破坏程度 E_d 定义为所有出射能流密度与入射能流密度的相对差值, 即 $E_d = \left| \sum_{n=1}^N P_{on} - P_i \right| / P_i$. E_d 越小能量守恒越能保证, 它越大能量守恒定律破坏程度越大. 实线对应着本文提出的迭代法的情况, 虚线对应着微扰法的情况.

由图 1(a) 可见, 能量守恒的破坏程度 E_d 随入射波能流 P_i 的增大而增大. 其他参数不变, 入射波

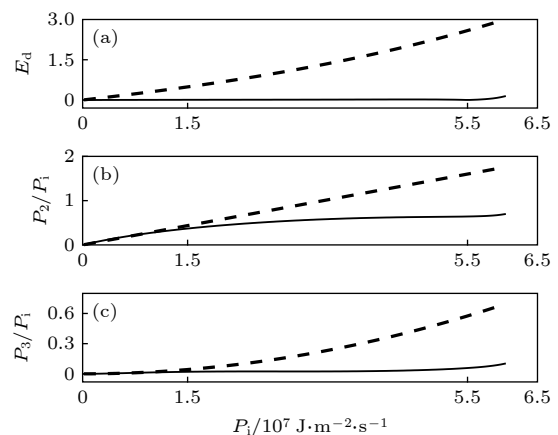


图 1 能量守恒的破坏程度、二次谐波的相对能流和三次谐波的相对能流随入射波能流的变化

Fig. 1. Damage degree of energy conservation, the relative energy flow of the second harmonic, and the relative energy flow of the third harmonic with incident wave energy flow.

能流相同时, 明显可以看出本文提出的新数值迭代方法得到的能量守恒的破坏程度比微扰法得到的能量守恒的破坏程度小很多. 当入射波能流是 $1.5 \times 10^7 \text{ J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ 时, 迭代法的破坏程度是 7.7×10^{-3} , 微扰法的破坏程度是 0.506; 当入射能流是 $5.5 \times 10^7 \text{ J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ 时, 迭代法的破坏程度 1.92×10^{-2} , 微扰法的破坏程度是 2.268.

由图 1(b) 和图 1(c) 可知, 二次谐波的相对能流 P_2/P_1 和三次谐波的相对能流 P_3/P_1 均随入射能流 P_1 的增加而增加. 当入射波能流小于 $1.5 \times 10^7 \text{ J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ 时, 迭代法和微扰法得到的 P_2/P_1 和 P_3/P_1 的值几乎相同; 当入射波能流大于 $5.5 \times 10^7 \text{ J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ 时, 迭代法和微扰法得到的 P_2/P_1 的值分别等于 0.6295 和 1.4741 及 P_3/P_1 的值分别大于 0.0421 和 0.4847.

从图 1 还可以看出, 当入射波能流小于 $1.5 \times 10^7 \text{ J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ 时, 两种方法 (本文提出的新数值迭代法和微扰法) 均适用; 当入射波能流小于 $5.5 \times 10^7 \text{ J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ 且大于 $1.5 \times 10^7 \text{ J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ 时, 迭代法适用, 微扰法不适用; 当入射波能流大于 $5.5 \times 10^7 \text{ J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ 时, 两种方法均不适用.

图 2 显示了声波在理想液体 ($\mu = 0$) 中传播时各阶谐波的相对能流 P_n/P_1 ($n = 1, 2, \dots, 6$) 随入射波能流 P_1 的变化情况. 从图 2 可见, 各阶谐波的能流随入射波能流的变化趋势相同, 均随入射波能流的增加而增加, 但基频波的能流明显大于其他高阶谐波的能流. 从图 2 还可以看出, 基频波的相对能流随入射波能流的增加而减小, 高阶谐波的相对能流随入射波能流的增加而增加.

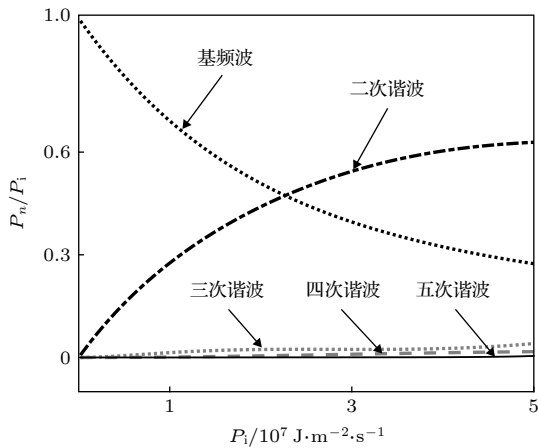


图 2 各阶谐波的相对能流随入射波能流的变化

Fig. 2. Relation between relative energy of each order of harmonics and incident wave energy.

图 2 显示的结果是与文献 [20, 24] 中基频波能流与各高阶谐波能流之间的关系相一致. 从图 2 可以明显得到, 声波在介质中传播时, 基频波能流向各高阶谐波传递, 这同时也解释了, 基频波的相对能流随入射波能流的增加而减少, 但各高阶谐波的相对能流却随入射波能流的增加而增加.

图 3 显示了声波在理想液体 ($\mu = 0$) 中传播时入射波能流不同的情况下二阶谐波的相对能流 P_2/P_1 随迭代次数 m 的变化关系. m 表示迭代次数. 由图 3 可知, 当入射波能流是 $0.4687 \times 10^7 \text{ J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$, 迭代次数大于等于 3 时, 二次谐波的相对能流收敛于 0.145; 当入射波能流是 $2.7 \times 10^7 \text{ J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$, 迭代次数大于等于 4 时, 二次谐波的相对能流收敛于 0.515; 当入射波能流是 $5.418 \times 10^7 \text{ J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$, 迭代次数大于等于 7 时, 二次谐波的相对能流收敛于 0.639. 由图 3 可见, 本文提出的新数值迭代方法具有收敛性, 且入射声强越大, 达到收敛的迭代次数需要越多.

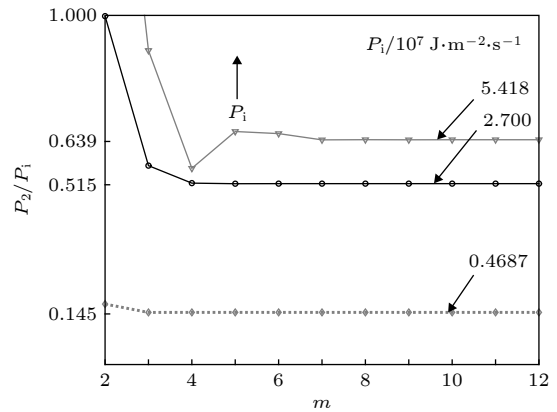


图 3 入射波能流不同时二阶谐波的相对能流随迭代次数的变化

Fig. 3. Relative energy flow of the second harmonic varies with the number of iterations under different incident wave energy flow.

图 4 显示了声波在黏性液体 ($\mu \neq 0$) 中传播时, 黏度不同的情况下各阶谐波的能流 P_n ($n = 1, 2, 3, 4$) 随入射波能流 P_1 的变化. 从图 4(a)—(d) 可见: 当其他参数不变时, 1) 基频波和各高阶谐波的能流均随入射波能流的增加而增加, 基频波的能流明显大于各高阶谐波的能流; 2) 基频波和各高阶谐波的能流均随黏度的增加而减小; 3) 黏度对各高阶谐波能流的影响程度大于对基频波能流的影响程度.

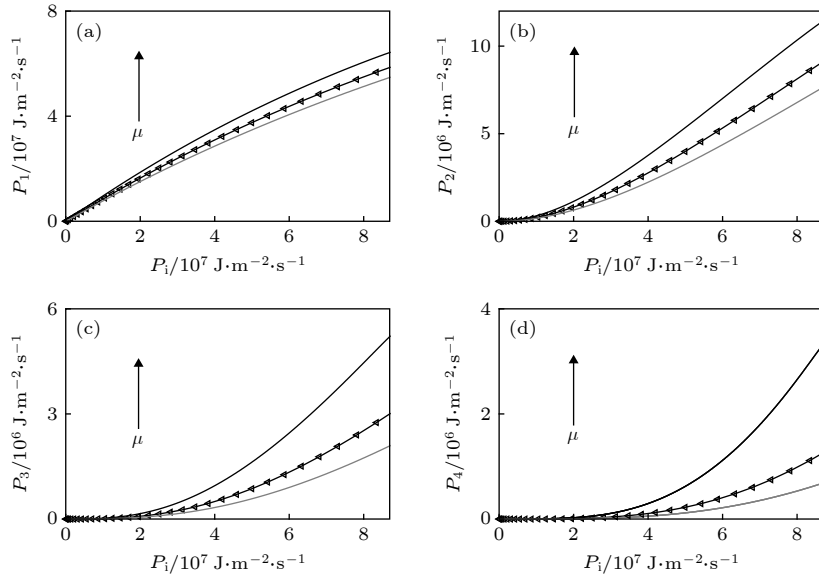


图 4 黏度不同的情况下, 各阶谐波的能流随入射波能流的变化 (图中曲线的黏度分别是 1×10^{-6} , 6×10^{-1} 和 10×10^{-1} Pa/s, 箭头表示黏度减小的方向)

Fig. 4. Relation of relative energy flow of each order of harmonics with incident wave energy flow under different viscosity. Viscosities for different curves are 1×10^{-6} , 6×10^{-1} , 10×10^{-1} Pa/s, respectively. Arrows indicate the direction of decreasing viscosity.

图 5 为声波在黏性液体 ($\mu \neq 0$) 中传播时, 黏度不同的情况下各阶谐波的相对能流 P_n/P_i ($n = 1, 2$) 随角频率的变化. 从图 5(a) 和图 5(b) 可见: 1) 基频波的相对能流随角频率的增加而减少, 二次谐波的相对能流随角频率的增加而增加; 2) 随黏度的增加基频波和二次谐波的相对能流均减小, 但基频波的影响程度比二次谐波的影响程度更大一些.

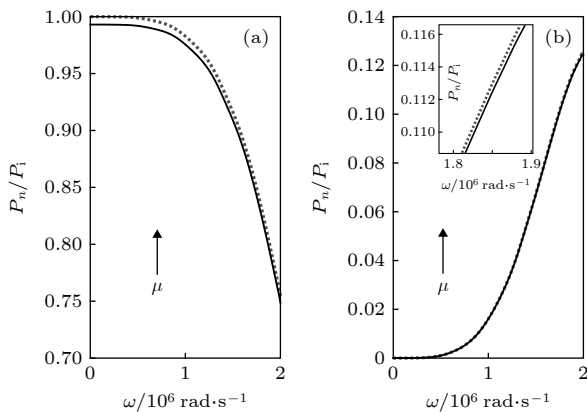


图 5 黏度不同的情况下, 各阶谐波的相对能流随角频率的变化 (图中曲线的黏度分别是 1×10^{-6} 和 1×10^{-1} Pa/s, 箭头表示黏度减小的方向)

Fig. 5. Relative energy flow varies with angular frequency under different viscosity. Viscosities for different curves are 1×10^{-6} and 1×10^{-1} Pa/s, respectively. Arrows indicate the direction of decreasing viscosity.

4 结 论

用一种新的数值计算方法研究了声波在液体中的传播特性. 得到的主要结论如下:

1) 第 1 次迭代计算的输出结果 $A_N^{(1)}$ 与线性理论的预测结果相同, 第 2 次迭代计算的输出结果 $A_N^{(2)}$ ($N \neq 1$) 与微扰理论的预测结果相同. 在第 2 次计算中已经考虑了谐波的损耗问题, 然而在微扰理论中没有考虑到这一点;

2) 声波在介质中传播时, 基频波的相对能流随入射波能流 (或角频率) 的增加而减少, 但各高阶谐波的相对能流却随入射波能流 (或角频率) 的增加而增加;

3) 声波的各阶谐波能流 (或相对能流) 均随黏度的增加而减小;

4) 在相同的参数下, 本文提出的研究计算方法比微扰法能更好地保证在研究声传播的过程中能量守恒, 且当涉及到更多的高次谐波时, 用本文提出的数值方法计算时间不会急剧增加.

参考文献

[1] Ye X, Fei X B 2004 *Foreign Med. Sci. Cancer Section* **31** 38 (in Chinese) [叶欣, 费兴波 2004 国外医学: 肿瘤学分册 **31** 38]
 [2] Li F Q, Wang Z B, Du Y H, Xu G A, Wen S, Bai J, Wu F,

- Wang Z L 2003 *Chin. Biological Eng.* **22** 321 (in Chinese) [李发琪, 王智彪, 杜永洪, 许贵安, 文爽, 白晋, 伍烽, 王芷龙 2003 *中国生物医学工程学报* **22** 321]
- [3] Zhu B R, Diao L Y, Li J, Liu Y, Fan Y N, Yang W W 2019 *Chin. J. Ultrasound in Med.* **35** 817 (in Chinese) [祝宝让, 刁立岩, 李静, 刘滢, 范燕娜, 杨武威 2019 *中国超声医学杂志* **35** 817]
- [4] Yang Z, Cao Y D, Hu L N, Wang Z B 2003 *J. Ultras. Clin. Med.* **6** 33 (in Chinese) [杨竹, 曹友德, 胡丽娜, 王智彪 2003 *临床超声医学杂志* **6** 33]
- [5] Qin X P, Gen D L, Hong Z Y, Wei B B 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 124301 (in Chinese) [秦修培, 耿德路, 洪振宇, 魏炳波 2017 *物理学报* **66** 124301]
- [6] Tait A, Glyme-Jones P, Hill A R, Smart D E, Blume C, Hammarstrom B, Fisher A L, Gossel M C, Swindle E J, Hill M, Davies D E 2019 *Sci. Rep.* **9** 9789
- [7] Morris R H, Dey E R, Axford D, Newton M L, Beale J H, Docker P T 2019 *Sci. Rep.* **9** 12431
- [8] Chen W Z 2014 *Acoustic Cavitation Physics* (Beijing: Science Press) pp371–421 (in Chinese) [陈伟中 2014 *声空化物理* (北京: 科学出版社) 第371—421页]
- [9] Burns P N, Simpson D H, Averkiou A 2000 *Ultrasound Med. Biol.* **26** 19
- [10] Tranquart F, Greniek N, Eder V 1999 *Ultrasound Med. Biol.* **25** 889
- [11] Gan W S 2012 *Appl. Acoust.* **73** 1209
- [12] Wu P R, Li S W 2010 *Tech. Acoust.* **29** 41 (in Chinese) [吴培荣, 李颂文 2010 *声学技术* **29** 41]
- [13] Enflo B O, Hedberg C M 2004 *Theory of Nonlinear Acoustics in Fluids* (New York: Kluwer Academic Publishers) pp53–112
- [14] Rosing T D 2007 *Springer Handbook of Acoustics* (New York: Springer Science Business Media) p260
- [15] Beyer R T 1969 *Physical Ultrasonics* (New York: Academic Press) pp202–240
- [16] Michelle G, Bengt F, Tobin A, Driscoll 2000 *SIAM J. Numer. Anal.* **38** 718
- [17] Campos-Pozuelo C, Dubus B, Gallego-Juráez J A 1999 *J. Acoust. Soc. Am.* **106** 91
- [18] Qian Z W 2009 *Nonlinear Acoustics* (Beijing: Science Press) pp57–72 (in Chinese) [钱祖文 2009 *非线性声学* (北京: 科学出版社) 第57—72页]
- [19] Blackstock D T 1966 *J. Acoust. Soc. Am.* **39** 1019
- [20] Zhang S G, Wu X M, Zhang B X, An Z W 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 104301 (in Chinese) [张世功, 吴先梅, 张碧星, 安志武 2016 *物理学报* **65** 104301]
- [21] Wu X M, Lv W H, Zhang J Y 2017 *Tech. Acoust.* **36** 57 (in Chinese) [吴先梅, 吕文瀚, 陈家熠 2017 *声学技术* **36** 57]
- [22] Qian Z W 2014 *Chin. Phys. B.* **23** 064301
- [23] Qian Z W 2009 *Nonlinear Acoustics* (Beijing: Science Press) pp19–22 (in Chinese) [钱祖文 2009 *非线性声学* (北京: 科学出版社) 第19—22页]
- [24] Kim J Y, Laurence J J, Qu J M 2006 *J. Acoust. Soc. Am.* **120** 1266

New numerical iterative method for nonlinear wave equations*

Cao Na Chen Shi[†] Cao Hui[‡] Wang Cheng-Hui Liu Hang*(Shaanxi Key Laboratory of Ultrasonics, School of Physics and Information Technology,**Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China)*

(Received 20 September 2019; revised manuscript received 18 November 2019)

Abstract

Nonlinear acoustics is an important branch of acoustics and has important applications in some areas, such as high-intensity focused ultrasound, ultrasonic suspension, acoustic cavitation, acoustic harmonic imaging, and parametric emission array. The solving of nonlinear equations in these fields is very important.

Regarding the solution of the wave equation of a nonlinear acoustic system, the methods used at this stage generally include complete numerical calculation method, strict analytical method, and perturbation method. 1) For the complete numerical calculation method, it covers the finite element method and the finite difference method. The physical meaning of the solution obtained by this kind of method is not clear, and it is difficult to reveal the physical nature of nonlinear event. And in many cases it will lead to the numerical divergence problems, and it is not suitable for all nonlinear problems. 2) For the strict analytical method, it can only deal with nonlinear acoustic problems of very few systems, such as the propagation of nonlinear acoustic waves in an ideal fluid. 3) For perturbation method, its advantage is that the method is simple and the physical meaning of the solution is clear, but it is only suitable for dealing with nonlinear effects at low sound intensity. And it takes into consideration only the effect of low-order harmonics on higher-order harmonics, with ignoring its reaction, so it does not satisfy the law of conservation of energy.

In this paper, we propose a new, semi-analytical numerical iterative method of solving nonlinear wave equations. It is a form of expanding the sound field into a Fourier series in the frequency domain, realizing the separation of time variables from space coordinates. Then, according to the specific requirements for the calculation accuracy, the high frequency harmonics are cut off to solve the equation. Compared with the results from the complete numerical methods (such as finite element method and finite difference method), the solution from this iterative method has a very clear physical meaning. That is, its solution is a combination of harmonics of all orders. Compared with the perturbation method, it can consider the interaction of various harmonics and can satisfy the law of conservation of energy (provided that the system has no dissipation). It is used to study the propagation properties of nonlinear acoustic waves in liquids. The results show that the iterative method is also applicable in the range of sound intensity where the perturbation method is applicable. In a wide range of sound intensity where the perturbation method is unapplicable, the iterative method is still applicable and satisfies the law of conservation of energy (provided that the system has no dissipation). It is unapplicable only if the sound intensity is extremely loud and strong. And when more high-order harmonics are involved, the calculation time by using the numerical method proposed in this paper does not increase sharply.

Keywords: nonlinear acoustics, numerical iterative method, energy flow density

PACS: 43.35.+d, 47.35.Rs, 47.20.Ky

DOI: 10.7498/aps.69.20191440

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11974232, 11374199, 11074159).

[†] Corresponding author. E-mail: chenshi@snnu.edu.cn

[‡] Corresponding author. E-mail: caohui@snnu.edu.cn