

## 利用保角变换实现环形光栅的 Talbot 效应\*

杨哲宁<sup>1)</sup> 乐阳阳<sup>1)</sup> 洪煦昊<sup>2)</sup> 赵瑞智<sup>1)</sup> 陆蓉儿<sup>1)</sup> 冯霞<sup>1)</sup>  
 许亚光<sup>1)</sup> 袁旭东<sup>1)</sup> 张超<sup>1)†</sup> 秦亦强<sup>1)‡</sup> 朱永元<sup>2)‡‡</sup>

1) (南京大学现代工程与应用科学学院, 南京 210023)

2) (南京大学物理学院, 南京 210023)

(2019年9月5日收到; 2019年10月10日收到修改稿)

Talbot 效应是一种近场自成像效应, 通常只有周期光栅可以产生 Talbot 效应, 而环形光栅无法产生. 本文通过引入保角变换, 发现可以在环形光栅外部设计适当的折射率渐变层介质, 使得其中也能够产生严格的 Talbot 效应, 并计算了对应的自成像半径表达式. 本文利用 FDTD 软件分别将一个环形光栅放置在真空中以及人工设计的折射率渐变层中进行了模拟, 并对二者的结果进行了比较分析, 发现这种折射率渐变层介质确实对点光源入射的环形光栅的自成像情况有着很好的改善. 希望这一工作能够推广 Talbot 效应的应用范围.

**关键词:** Talbot 效应, 自成像, 环形光栅, 保角变换

**PACS:** 42.25.Fx, 42.25.Hz, 42.30.-d

**DOI:** 10.7498/aps.69.20191340

## 1 引言

Talbot 效应是 Talbot<sup>[1]</sup> 在 1836 年发现的一种无透镜近场自成像效应, 在使用单色光入射一周期性结构后, 他在该结构后的某些特定距离处观察到了与出射面处完全相同的光场分布. 1881 年 Rayleigh<sup>[2]</sup> 第一次对这种周期结构中产生的自成像现象进行了系统的分析, 发现这是一种基于相干衍射的近场效应. Talbot 效应在图像处理与合成、激光照明阵列及光学分析等领域都有着重要的应用<sup>[3-6]</sup>, 近年来相关研究还扩展到了图像修复领域<sup>[7]</sup>、声学领域<sup>[8,9]</sup>、X 射线领域<sup>[10,11]</sup> 等. 最近还有课题组利用原子密度光栅替代传统光栅, 将 Talbot 效应与量子测量相联系<sup>[12,13]</sup>, 可见这一研究领域还有着巨大的潜力等待挖掘.

变换光学是一种在设计人造光学材料时使用的数学方法, 基础是麦克斯韦方程组在坐标变换下的协变性, 其最早是在 2006 年由 Pendry 等<sup>[14]</sup> 和 Leonhardt<sup>[15]</sup> 分别发表他们有关隐身斗篷的文章时提出的. 对于二维且介电性质各向同性的材料, 存在一种较简单的处理方法——保角变换, 该方法涉及到两个空间——虚拟空间和物理空间. 虚拟空间是想象中光线传播的空间, 而物理空间为光线实际传播的空间, 二者通过保角变换公式来进行坐标变换. 可以通过该方法计算出在物理空间中添加什么形式的折射率变化层, 能够使得光线在此空间中的传播方式与虚拟空间中对应<sup>[16,17]</sup>.

2017 年 Wang 等<sup>[18]</sup> 使用保角变换将麦克斯韦鱼眼透镜变为了一种全新的介质, 并在这种介质中观察到了带有自聚焦效应的自成像现象. 这一研究首次将 Talbot 效应与变换光学联系起来.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11874214, 11774165, 11574146) 和江苏省自然科学基金 (批准号: BK20150563) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhch@nju.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: yqqin@nju.edu.cn

‡‡ 通信作者. E-mail: yyzhu@nju.edu.cn

与平面周期性结构相比, 环形周期性结构有着一些特殊的性质. 对于点光源入射, 其有界无限的特性使得环形光栅能够看作一无限长的光栅, 这弥补了平面光栅长度有限的不足, 同时点光源入射时自成像还对环形光栅的结构具有放大的效果. 在 2010 年及 2015 年分别有两项有关曲面光栅的自成像效应研究 [19,20], 前者分析了当平行光入射环形光栅后的自成像现象, 而后者进一步分析了平行光入射抛物面光栅及椭圆光栅后的光场分布. 然而, 平行光入射并不能充分利用到环形光栅的上述优点, 并且通常情况下环形光栅无法产生严格的 Talbot 效应. 本文将保角变换与 Talbot 效应相结合, 设计出一种合适的折射率渐变层, 使得点光源入射的环形光栅也能产生 Talbot 效应.

## 2 理 论

对于真空中圆心在原点的环形光栅 (图 1), 其中虚线圆为环形光栅, 圆心处为点光源, 外围的实线圆代表像面, 在柱坐标系中很容易得到它的傅里叶展开式:

$$t(\alpha) = \sum_n C_n \exp(imn\alpha), \quad (1)$$

其中  $\alpha$  为与极轴的夹角,  $m$  为该环形光栅一周的周期数.

对于点光源入射, 此光栅衍射光场的菲涅耳积分结果为 [21]

$$U(R, \alpha) = \sum_n \frac{C_n}{H_{mn}^{(1)}(kR_0)} H_{mn}^{(1)}(kR) \exp(imn\alpha), \quad (2)$$

其中  $R_0$  为光栅的半径,  $R$  为像面的半径,  $H_{mn}^{(1)}$  表示第  $m \times n$  阶第一类汉克尔函数. 对比 (1) 和 (2) 式可以发现, 自成像的条件为  $\frac{H_{mn}^{(1)}(kR)}{H_{mn}^{(1)}(kR_0)}$  式对于任意整数  $n$  均为一常数. 而由于汉克尔函数的复杂性, 显然并不能找到一个自成像距离  $R$  使得该条件成立, 因此真空中点光源入射的环形光栅是不存在 Talbot 效应的.

对  $R_0 = 40 \mu\text{m}$ ,  $m = 90$ , 入射光波长  $\lambda = 532 \text{ nm}$  的环形光栅利用 FDTD 软件 Lumerical 进行了衍射模拟, 其中光栅厚度为  $0.1 \mu\text{m}$  (图 2). 对于真空中点光源入射的环形光栅, 我们发现各衍射光束的边缘较为模糊. 在前面有关 (2) 式的讨论中已经发现其并不存在完美的自成像效应, 且由于 (2) 式中

菲涅耳积分结果的复杂性, 很难通过计算得到自成像程度最高的环面的位置, 仅能在观察衍射结果后将各个面上的光场分布与光栅结构比较来得到自成像程度最高的环面的半径. 这一缺点极大地限制了点光源入射的环形光栅的自成像效应的应用.

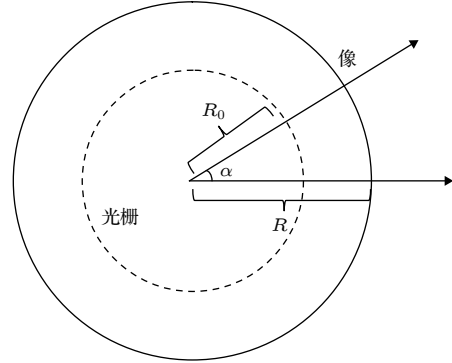


图 1 点光源入射的环形光栅衍射图解

Fig. 1. Ring grating with a point source of incident light.

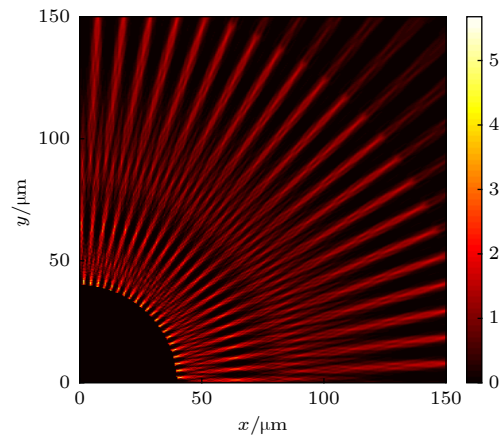


图 2 Lumerical 模拟结果 (光栅内的光场已去除)

Fig. 2. Simulation results (light field inside the grating has been removed).

然而, 如果在虚拟空间中想象存在一真空中的平面光栅, 然后对这一空间进行保角坐标变换得到物理空间, 那么根据保角变换并不改变麦克斯韦方程组的解的性质 [22], 可以直接将虚拟空间中平面 Talbot 效应的结论应用到物理空间中的环形光栅上.

采用的保角变换公式为

$$w = m' \ln z, \quad (3)$$

其中  $w = u + iv$  是虚拟空间的基矢,  $z = x + iy$  是物理空间的基矢,  $m'$  可以看作“空间弯曲参数”, 它决定了将“平面”的虚拟空间弯曲成“环形”的物理空间时空间压缩和拉伸的程度, 其单位与基矢的长度

单位相同.

根据保角变换的折射率变换公式  $n_z = n_w \left| \frac{dw}{dz} \right|$ , 以及虚拟空间中  $n_w = 1$ , 可以得到物理空间的折射率变化函数:

$$n_z = m'/R, \quad (4)$$

其中  $R$  为物理空间中像点到原点的距离. 考虑到不存在折射率小于 1 的材料以及折射率无穷大的材料, 将靠近圆心处  $n_z$  过大的区域去除, 同时仅考虑  $n_z > 1$ , 即  $R < m'$  时的光场 (如图 3 所示).

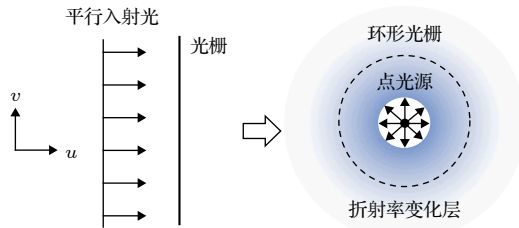


图 3 虚拟空间 (左) 和物理空间 (右) 示意图

Fig. 3. Schematic diagram of virtual space(left) and physical space(right).

对于半径为  $R_0$ , 周期数为  $m$  的光栅, 其对应的想象中放置在虚拟空间的平面光栅周期  $d = 2\pi m'/m$  ( $d$  为周期的弧长), 由虚拟空间中平面光栅的 Talbot 距离  $U_T = 2d^2/\lambda$  可得对应的物理空间中的环形光栅自成像半径:

$$R_T = \exp\left(\frac{2(2\pi m'/m)^2}{\lambda m'}\right) \cdot R_0. \quad (5)$$

由 (5) 式可以看出, 要存在  $m'$  满足  $R_T < m'$ , 所计算的环形光栅的周期数和半径需要满足  $m > \sqrt{8\pi^2 \epsilon R_0/\lambda}$  的关系, 这是由于不存在折射率小于 1 的材料而产生的限制.

取  $m' = 50 \mu\text{m}$ , 使用 Lumerical 对入射光为波长 1064 nm 的点光源,  $R_0 = 10 \mu\text{m}$ ,  $m = 50$  带有折射率渐变层的环形光栅进行了衍射模拟 (结果见图 4). 其中光栅的内径为  $10 \mu\text{m}$ , 外径为  $10.1 \mu\text{m}$ . 根据计算, 此光栅的自成像半径应为  $44.55 \mu\text{m}$ . 将图 2 与图 4(a) 相比较, 可以很明显地观察到折射率渐变层的存在使得光场分布发生了变化, 后者的衍射情况与平面光栅更为类似. 另一方面, 我们发现图 4(a) 中光场交错的间距在逐渐增大, 这与 (5) 式中指数的存在相符. 然而, 由图 4(b) 可以看出, 光栅处的光场有着明显的尖端分叉. 这是由于受到模拟条件的限制, 在模拟中本文的光栅周期较小所造成的, 在实际中若采用的光栅周期大一些, 二者符合的程度能够提升很多. 另外使用同种入射光对于内径为  $50 \mu\text{m}$ , 外径为  $50.1 \mu\text{m}$ ,  $m = 120$ ,  $m' = 300 \mu\text{m}$  的光栅进行了衍射光场的模拟, 由于内存限制, 仅模拟了 1/4 个光栅的衍射光场, 因此在  $0$  和  $\pi/2$  附近的光场会受到边缘效应的影响. 做出中间部分自成像面 ( $R = 235.1 \mu\text{m}$ ) 光场与光栅光场的比较, 可以发现大周期光栅的光栅处光场分叉现象减弱了很多, 二者符合得很好 (如图 5 所示).

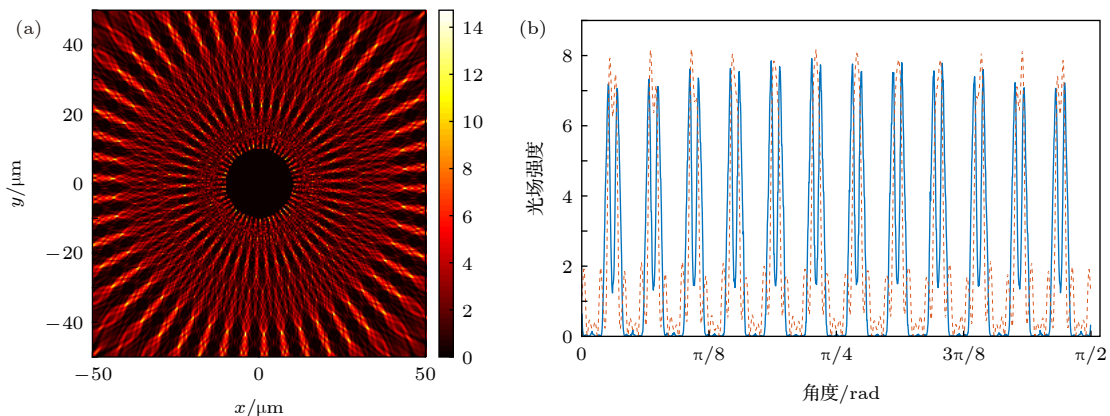


图 4 对于内径为  $10 \mu\text{m}$ , 外径为  $10.1 \mu\text{m}$ ,  $m = 50$ ,  $m' = 50 \mu\text{m}$  的光栅, (a) Lumerical 模拟结果 (光栅内的光场已去除), 以及 (b) 自成像光场 (短划线) 与光栅处光场 (实线) 的对比

Fig. 4. For the grating with the inner diameter of  $10 \mu\text{m}$  and the outer diameter of  $10.1 \mu\text{m}$  ( $m=50$ ,  $m' = 50 \mu\text{m}$ ), (a) simulation results (light field inside the grating has been removed), and (b) comparison of self-image (dash line) and the light field at  $r = 10.1 \mu\text{m}$  (solid line).

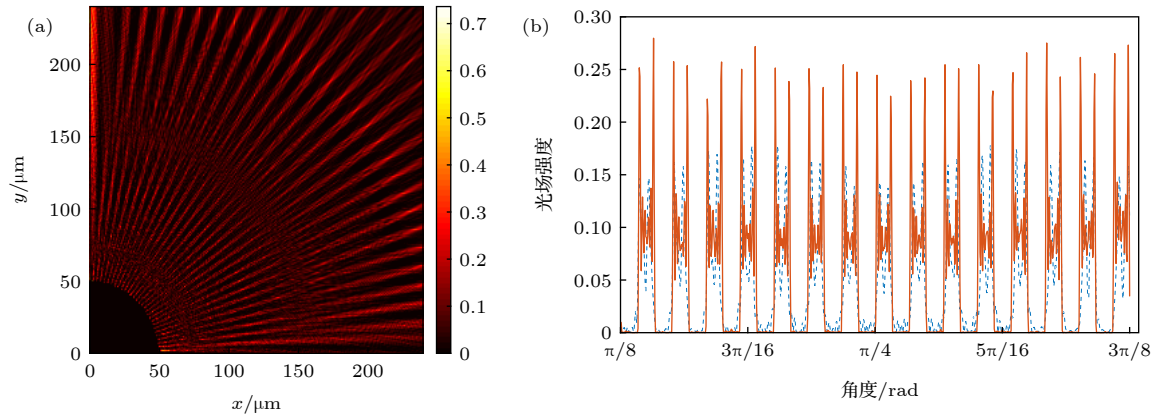


图 5 对于内径为  $50\ \mu\text{m}$ , 外径为  $50.1\ \mu\text{m}$ ,  $m=120$ ,  $m' = 300\ \mu\text{m}$  的光栅, (a) Lumerical 模拟结果 (光栅内的光场已去除), 以及 (b) 自成像光场 (虚线) 与光栅处光场 (实线) 的对比

Fig. 5. For the grating with the inner diameter of  $50\ \mu\text{m}$  and the outer diameter of  $50.1\ \mu\text{m}$  ( $m=120$ ,  $m' = 300\ \mu\text{m}$ ), (a) simulation results (light field inside the grating has been removed), and (b) comparison of self-image (dash line) and the light field at  $r = 10.1\ \mu\text{m}$  (solid line).

### 3 总结

使用保角变换设计出一种特殊的折射率变化层, 使得点光源入射的环形光栅能在其中产生 Talbot 效应. 利用保角变换, 可以直接将平面光栅的结论应用到环形光栅中来, 通过对应的坐标变换将平面光栅中自成像距离转化成环形光栅中的自成像半径, 避免了复杂的菲涅耳衍射积分. 使用 Lumerical 软件对环形光栅及渐变折射率层中的光场分布进行了数值模拟, 结果与理论预期相一致. 尽管该方法对环形光栅的结构有着一定的要求, 但由于点光源入射的环形光栅的自成像效应有着放大效果, 同时环形光栅有着平面光栅所没有的有界无限的特性, 我们认为该方法在光学分析和图像处理方面有着一定的潜在应用.

### 参考文献

[1] Talbot H F 1836 *Philos. Mag.* **9** 401  
 [2] Rayleigh F R S 1881 *Philos. Mag.* **11** 196  
 [3] Yashiro W, Harasse S, Takeuchi A, Suzuki Y, Momose A 2010 *Phys. Rev. A* **82** 043822  
 [4] Zhang J, Chen Y 2015 *Int. J. Nanotechnol.* **12** 917  
 [5] Zhou B, Chen Y L, Li Y A, Li H W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59**

1816 (in Chinese) [周波, 陈云琳, 黎远安, 李海伟 2010 *物理学报* **59** 1816]  
 [6] Fan T W, Chen Y L, Zhang J H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 094216 (in Chinese) [范天伟, 陈云琳, 张进宏 2013 *物理学报* **62** 094216]  
 [7] Côme Schnébelin, Chatellus H G D 2018 *Opt. Lett.* **43** 1467  
 [8] Candelas P, Fuster J M, Pérez-López S, Uris A, Rubio C 2019 *Ultrasonics* **94** 281  
 [9] Morozov A N, Krikunova M P, Skuibin B G, Smirnov E V 2017 *JEPT Letters* **106** 23  
 [10] Kohn V G 2018 *J. Synchrotron Radiat.* **25** 425  
 [11] Kim J M, Cho I H, Lee S Y, Kang H C, Conley R, Liu C A, Macrander A T, Noh D Y 2010 *Opt. Express* **18** 24975  
 [12] Li C, Zhou T, Zhai Y, Yue X, Xiang J, Yang S, Wei X, Chen X 2017 *Phys. Rev. A* **95** 033821  
 [13] Li C, Zhou T, Xiang J, Zhai Y, Yue X, Yang S, Wei X, Chen X 2017 *Chin. Phys. Lett.* **34** 084207  
 [14] Pendry J B, Schurig D, Smith D R 2006 *Science* **312** 1780  
 [15] Leonhardt U 2006 *Science* **312** 1777  
 [16] Liu Y C 2016 *Ph. D. Dissertation* (Hangzhou: Zhejiang University) (in Chinese) [刘一超 2016 博士学位论文 (杭州: 浙江大学)]  
 [17] Xu L 2016 *M. S. Thesis* (Suzhou: Suzhou University) (in Chinese) [徐林 2016 硕士学位论文 (苏州: 苏州大学)]  
 [18] Wang X Y, Chen H Y, Liu H, Xu L, Sheng C, Zhu S N 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 033902  
 [19] Torcal-Milla F J, Sanchez-Brea L M, Salgado-Remacha F J, Bernabeu E 2010 *Opt. Commun.* **283** 3869  
 [20] Zhang W, Wang J H, Cui Y W, Teng S Y 2015 *Opt. Commun.* **341** 245  
 [21] Yue Y Y 2016 *M. S. Thesis* (Nanjing: Nanjing University) (in Chinese) [乐阳阳 2016 硕士学位论文 (南京: 南京大学)]  
 [22] Xu L, Chen H Y 2015 *Nat. Photon.* **9** 15



# Realizing Talbot effect of circular grating with conformal transformation\*

Yang Zhe-Ning<sup>1)</sup> Yue Yang-Yang<sup>1)</sup> Hong Xu-Hao<sup>2)</sup> Zhao Rui-Zhi<sup>1)</sup>  
Lu Rong-Er<sup>1)</sup> Feng Xia<sup>1)</sup> Xu Ya-Guang<sup>1)</sup> Yuan Xu-Dong<sup>1)</sup>  
Zhang Chao<sup>1)†</sup> Qin Yi-Qiang<sup>1)‡</sup> Zhu Yong-Yuan<sup>2)††</sup>

1) (*College of Engineering and Applied Sciences, Nanjing University, Nanjing 210023, China*)

2) (*School of Physics, Nanjing University, Nanjing 210023, China*)

( Received 5 September 2019; revised manuscript received 10 October 2019 )

## Abstract

The Talbot effect is a near-field diffraction effect that occurs in periodic structures. In a circular periodic structure with a point source as incident light, it has been found that there is no self-imaging effect of the grating at a certain propagation distance. In this paper, we combine the conformal transformation with the Talbot effect and work out a special medium in the physical space, which allows the circular grating to have a Talbot effect within it. The refractive index distribution generated by conformal transformation is calculated and the corresponding self-imaging radius expression is obtained. Lumerical product is used for simulation verification, and the applicable condition of the method is summarized. We separately carry out the simulations of a circular grating with and without the designed medium. Light field distributions in the two simulations differ from each other. The light field in the second situation shares more similarities with the light field of a plane grating than the first simulation. What is more, in the second situation, we can work out a certain Talbot radius, and the light field distribution at the calculated Talbot radius is quite similar to that at the circular grating. But for the first situation, we cannot calculate a certain Talbot radius and can obtain only the radius of the ring with highest self-imaging accuracy by comparing light field at each distance with the grating structure. We find that the small period of the circular grating we used in the second situation makes the light field at Talbot radius furcate. So we carry out a third simulation of a circular grating with a large period compared with the incident wavelength. The self-imaging result matches the grating structure quite well. However, there are some limits in this method. According to the conformal transformation, the refractive index near the center tends to be infinite, so we have to remove the medium near the center. Also, when the radius is big enough, refractive index there can be smaller than 1, so the Talbot effect should happen within this radius. In conclusion, we show that the transformation optics can be introduced into the self-imaging of circular gratings, and thus greatly expanding the range of applications for the Talbot effect.

**Keywords:** Talbot effect, self-imaging, circular grating, conformal transformation

**PACS:** 42.25.Fx, 42.25.Hz, 42.30.-d

**DOI:** 10.7498/aps.69.20191340

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11874214, 11774165, 11574146) and the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK20150563).

† Corresponding author. E-mail: [zhch@nju.edu.cn](mailto:zhch@nju.edu.cn)

‡ Corresponding author. E-mail: [yqqin@nju.edu.cn](mailto:yqqin@nju.edu.cn)

†† Corresponding author. E-mail: [yyzhu@nju.edu.cn](mailto:yyzhu@nju.edu.cn)