

基于广义交替数值通量的局部间断 Galerkin 方法求解二维波动方程*

张荣培¹⁾ 王迪¹⁾ 蔚喜军²⁾ 温学兵^{1)†}

1) (沈阳师范大学数学与系统科学学院, 沈阳 110034)

2) (北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(2019年4月24日收到; 2019年10月17日收到修改稿)

波的传播往往在复杂的地质结构中进行, 如何有效地求解非均匀介质中的波动方程一直是研究的热点. 本文将局部间断 Galerkin (local discontinuous Galerkin, LDG) 方法引入到数值求解波动方程中. 首先引入辅助变量, 将二阶波动方程写成一阶偏微分方程组, 然后对相应的线性化波动方程和伴随方程构造间断 Galerkin 格式; 为了保证离散格式满足能量守恒, 在单元边界上选取广义交替数值通量, 理论证明该方法满足能量守恒性. 在时间离散上, 采用指数积分因子方法, 为了提高计算效率, 应用 Krylov 子空间方法近似指数矩阵与向量的乘积. 数值实验中给出了带有精确解的算例, 验证了 LDG 方法的数值精度和能量守恒性; 此外, 也考虑了非均匀介质和复杂计算区域的计算, 结果表明 LDG 方法适合模拟具有复杂结构和多尺度结构介质中的传播.

关键词: 波动方程, 广义交替数值通量, 局部间断 Galerkin 方法, 能量守恒

PACS: 02.60.-x, 91.30.-f, 43.35.+d

DOI: 10.7498/aps.69.20190613

1 引言

波的传播是能量传输的一种基本形式, 出现在许多科学、工程和工业领域. 波动传播问题的研究对地球科学、石油工程、电信和国防工业具有重要意义^[1-4]. 波动方程是描述波传播的数学模型, 例如声波方程、地震波方程等. 本文考虑如下二维非均匀介质下的二阶波动方程. 由于所求解的区域比较复杂, 以及传播介质的复杂和不均匀性, 大多数波动方程不能精确求解, 对于波动方程数值方法的研究就显得非常重要.

以往二维波动方程数值解的计算方法主要是有限差分方法 (finite difference method, FDM)^[5,6]、

有限体积方法 (finite volume method, FVM)^[7] 和有限元方法 (finite element method, FEM)^[8] 等. 局部间断 Galerkin (local discontinuous Galerkin, LDG) 方法是 Cockburn 和舒其望^[9] 在 1998 年提出的. 与传统的间断 Galerkin (discontinuous Galerkin, DG) 方法^[10] 比较, LDG 方法通过引入辅助变量将含有高阶导数的微分方程写成只含有一阶导数的偏微分方程组, 然后用 DG 方法进行空间离散. Chung 和 Engquist^[11] 在交错三角网格上提出了能量守恒的 DG 格式, 但是交错网格在高维情形格式构造复杂. Chou 等^[12] 发展了一类能量守恒的 LDG 方法求解二维非均匀介质中的线性二阶波动方程, 但是他们的工作只限于矩形网格. 本文将在三角网格上构造能量守恒的 LDG 格式. 首先

* 国家自然科学基金 (批准号: 11571002)、国防科技重点实验室基金 (批准号: 6142A0502020717)、辽宁省自然科学基金 (批准号: 201805509960) 和中国工程物理研究院科学基金 (批准号: 2013A0202011, 2015B0101021) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xbw2004@163.com

将二阶标量波动方程写成一阶速度-应力形式, 通过选取广义交替数值通量, 对相应的线性化波动方程和伴随方程构造 DG 格式. 对于高维问题, 空间离散后得到的是一组规模非常大的常微分方程组. 显式时间离散格式不需要求解代数方程组, 但是时间步长有严格的限制; 隐式时间离散允许比较大的时间步长, 但是需要求解大规模代数方程组. 本文采用指数积分因子方法求解常微分方程组, 该方法是在 2013 年由 Nie 等^[13]提出的求解刚性常微分方程组的有效数值方法. 隐式积分因子方法的发展分为两个方向: 其一是紧致隐积分因子格式^[14,15], 该格式将解写成矩阵形式并在每个方向计算指数矩阵; 其二是 Krylov 积分因子格式^[16], 该格式针对指数矩阵与向量的乘积运算, 应用 Krylov 子空间方法近似.

2 局部间断有限元方法

在二维区域 Ω 求解如下二阶波动方程:

$$\rho u_{tt} - \nabla \cdot (A \nabla u) = f(x, y, t), \quad (1)$$

其中, u 是位移; ρ 是物体的密度; A 是波速, 本文取常数; $f(x, y, t)$ 是外部源力项. 引入两个辅助变量: $\mathbf{p} = A \nabla u$, $w = u_t$, (1) 式可写成如下的等价一阶偏微分方程组:

$$\rho w_t = \nabla \cdot \mathbf{p} + f, \quad (2)$$

$$\frac{1}{A} \mathbf{p}_t = \nabla w. \quad (3)$$

边界条件考虑齐次 Dirichlet 边界: $u = 0$, $(x, y) \in \partial\Omega \times [0, T]$. 所对应的初始条件为: $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$, $p(x, y, 0) = p_0(x, y)$, $\forall (x, y) \in \Omega$. 当 $f = 0$ 时, 系统 (2) 和 (3) 式具有能量守恒性:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\rho w^2 + \mathbf{p}^T \frac{1}{A} \mathbf{p} \right) dx = 0.$$

下面针对系统 (2) 和 (3) 式构造 LDG 格式. 首先将二维计算域 Ω 离散为有限个三角形单元 $\Gamma_h = \{K\}$, 用 $\varepsilon_h = \varepsilon_h^0 \cup \partial\Omega$ 表示 Γ_h 的所有边界的集合, 其中 ε_h^0 是所有内部边缘的集合. 定义 LDG 近似空间为

$$V_h = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in P^k(K), \forall K \in \Gamma_h\},$$

$$\Sigma_h = \{\mathbf{q} \in [L^2(\Omega)]^2 : \mathbf{q}|_K \in \Sigma(K), \forall K \in \Gamma_h\}, \quad (4)$$

其中 $P^k(K)$ 是单元 K 和 $\Sigma(K) = [P^k(K)]^2$ 上最高

次数为 k 的复多项式函数的空间. LDG 近似空间的离散 L^2 范数定义如下:

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \sum_{K \in \Gamma_h} \|v\|_{L^2(K)}^2, \\ \|\mathbf{q}\|^2 &= \sum_{K \in \Gamma_h} \|\mathbf{q}\|_{L^2(K)}^2. \end{aligned} \quad (5)$$

在边界 e 上定义平均值和跳跃项: 令 $e \in \varepsilon_h^0$ 是单元 K_1 和 K_2 共享的内部边缘, 假设 e 上的法向量 \mathbf{n}_1 和 \mathbf{n}_2 分别指向 K_1 和 K_2 的外部, 借助于两个迹函数 $v_i := v|_{\partial K}$, $i = 1, 2$, e 上的平均值和跳跃项可定义为

$$\{v\} = \frac{1}{2} (v_1 + v_2), \quad [v] = v_1 \mathbf{n}_1 + v_2 \mathbf{n}_2. \quad (6)$$

矢量函数 \mathbf{q} 的平均值和跳跃项可以类似定义为

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}\} &= \frac{1}{2} (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2), \\ [\mathbf{q}] &= \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_2. \end{aligned} \quad (7)$$

要注意的是, 标量函数 v 的跳跃项 $[v]$ 是与法线平行的向量, 向量函数 \mathbf{q} 的跳跃项 $[\mathbf{q}]$ 是标量. 由于讨论的是齐次 Dirichlet 边界条件, 即在 $\partial\Omega$ 上时, $u = 0$. 因此对于这种边界条件, 将 $[v]$ 和 $\{\mathbf{q}\}$ 设为 $[v] = v \mathbf{n}$, $\{\mathbf{q}\} = \mathbf{q}$, 其中 \mathbf{n} 是指向外侧的单位法向量.

2.1 LDG 方法

在 (2) 式和 (3) 式两侧同时乘以试探函数 v_h, \mathbf{q}_h , 并在每个单元上进行积分, 通过分部积分可以得到问题 (2) 式和 (3) 式的 LDG 格式, 即找到 $w_h \in V_h$, $\mathbf{p}_h \in \Sigma_h$, 使得任意试探函数 v_h, \mathbf{q} , 对所有的 $K \in \Gamma_h$ 满足

$$\begin{aligned} \rho \int_K (w_h)_t \cdot v_h dx dy + \int_K \mathbf{p}_h \cdot \nabla v_h dx dy \\ - \int_{\partial K} \hat{\mathbf{p}}_h \cdot \mathbf{n} v_h ds = \int_K f \cdot v_h dx dy, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \int_K (\mathbf{p}_t)_h \cdot \mathbf{q} dx dy + \int_K w_h \nabla \cdot \mathbf{q} dx dy \\ - \int_{\partial K} \hat{w}_h \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dx dy = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 \hat{w}_h 和 $\hat{\mathbf{p}}_h$ 是数值通量, 分别是单元 K 边界上作为 w 和 $\mathbf{p} = \nabla u$ 的近似值的单个值. 数值通量的选择是保证 LDG 方法具有离散能量守恒的关键. 本文考虑如下形式的交替数值通量:

$$\hat{w}_h = \{w_h\} + C_{12} \cdot [w_h], \quad (10)$$

$$\hat{p}_h = \{p_h\} - C_{12} [p_h]. \quad (11)$$

2.2 能量守恒性

在构建二维波动方程的数值方法时, 能量守恒通常被考虑在内. 数值方法是否能够保持能量守恒可以判断该方法是否能更好地模拟长时间的波传播. 本节证明 LDG 方法可以保持能量守恒. 考虑到数值通量 (10) 式和 (11) 式的定义, 在所有单元上对 (8) 式和 (9) 式求和可得

$$\begin{aligned} & \rho \int_{\Omega} (w_h)_t \cdot v_h dx dy + \sum_{K \in \partial K} \int_K p_h \cdot \nabla v_h dx dy \\ & - \int_{\varepsilon_h} \hat{p}_h [v_h] ds = \int_{\Omega} f \cdot v_h dx dy, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A} \int_{\Omega} (p_t)_h \cdot q dx dy + \sum_{K \in \partial K} \int_K w_h \nabla \cdot q dx dy \\ & - \int_{\varepsilon_h} \hat{w}_h [q] dx dy = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

对 (12) 式和 (13) 式左右两端分别求和, 可得

$$\begin{aligned} & \rho \int_{\Omega} (w_h)_t \cdot v_h dx dy + \frac{1}{A} \int_{\Omega} (p_t)_h \cdot q dx dy \\ & + \sum_{K \in \partial K} \int_K w_h \nabla \cdot q dx dy + \sum_{K \in \partial K} \int_K p_h \cdot \nabla v_h dx dy \\ & = \int_{\varepsilon_h} \hat{w}_h [q] dx dy + \int_{\varepsilon_h} \hat{p}_h [v_h] ds + \int_K f \cdot v_h dx dy. \end{aligned} \quad (14)$$

为了得到 (12) 式和 (13) 式的能量守恒性, 首先证明如下引理.

引理 对于所有的试探函数 $v \in V_h \cap H_1^0$, $q \in \Sigma_h$,

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \Gamma_h} \int_K q \cdot \nabla v dx dy + \sum_{K \in \Gamma_h} \int_K v \nabla \cdot q dx dy \\ & = \int_{\varepsilon_h} \hat{v} [q] \cdot n ds + \int_{\varepsilon_h} \hat{q} [v] ds \end{aligned} \quad (15)$$

是恒成立的.

证明 对 (15) 式左端项进行分部积分可得

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \Gamma_h} \int_K q \cdot \nabla v dx dy + \sum_{K \in \Gamma_h} \int_K v \nabla \cdot q dx dy \\ & = \sum_{K \in \Gamma_h} \int_{\partial K} v q \cdot n ds. \end{aligned} \quad (16)$$

利用平均值和跳跃项的定义, 把各个单元的总和改写为边界形式, 通过简单的计算可得到

$$\sum_{K \in \Gamma_h} \int_{\partial K} v q \cdot n ds = \int_{\varepsilon_h} \{v\} [q] ds + \int_{\varepsilon_h} \{q\} [v] ds. \quad (17)$$

将数值通量 (10) 式和 (11) 式代入 (15) 式右端项得到

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon_h} \hat{v} [q] \cdot n ds + \int_{\varepsilon_h} \hat{q} [v] ds \\ & = \int_{\varepsilon_h} \{v\} [q] ds + \int_{\varepsilon_h} \{q\} [v] ds \\ & + \int_{\varepsilon_h} (C_{12} \cdot [v] [q] - C_{12} \cdot [v] [q]) ds \\ & = \int_{\varepsilon_h} \{v\} [q] ds + \int_{\varepsilon_h} \{q\} [v] ds. \end{aligned} \quad (18)$$

即 (15) 式成立.

利用引理可以得到 (8) 式和 (9) 式的能量守恒性.

定理 (能量守恒性) 在齐次 Dirichlet 边界条件和数值通量 (10) 式和 (11) 式的定义下, 系统 (8) 式和 (9) 式是能量守恒的, 即当 $f = 0$ 时,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{A} \| \| p_h \| \|^2 + \rho \| \| w_h \| \|^2 \right) = 0. \quad (19)$$

证明 选取试探函数 $v_h = w_h$ 代入 (8) 式中可得到

$$\begin{aligned} & \rho \frac{d}{dt} \| \| w_h \| \|^2 - \sum_{K \in \partial K} \int_K p_h \cdot \nabla w_h dx dy \\ & - \int_{\varepsilon_h} \hat{p}_h [w_h] ds = \int_{\Omega} f \cdot w_h dx dy. \end{aligned} \quad (20)$$

在 (9) 式中, 选取试探函数 $q_h = p_h$, 能够得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A} \frac{d}{dt} \| \| p_h \| \|^2 + \sum_{K \in \Gamma_h} \int_K w_h \nabla \cdot p_h dx dy \\ & - \int_{\varepsilon_h} \hat{w}_h [p_h] ds = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

对 (19) 式和 (20) 式左右两边分别求和, 并考虑到 (15) 式, 可得到

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{A} \| \| p_h \| \|^2 + \rho \| \| w_h \| \|^2 \right) = \int_{\Omega} f \cdot w_h dx dy. \quad (22)$$

当 $f = 0$ 时, 显然有 $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{A} \| \| p_h \| \|^2 + \rho \| \| w_h \| \|^2 \right) = 0$, 即系统 (8) 和 (9) 是能量守恒的.

3 时间离散

二维波动方程通过 LDG 方法进行空间离散后, 与一维二阶波动方程类似, 也得到一组非线性常微分方程组, 为了节约这种复杂代数方程组求解的计算成本, 本文利用指数积分因子方法来进行时间离散.

首先将 LDG 格式 (8) 式和 (9) 式对于所有单元联立, 可得到全局非线性常微分方程组的矩阵方程形式, 即

$$\rho \mathbf{M}_1 \frac{d\mathbf{W}}{dt} = \mathbf{B}_1 \mathbf{P} + \mathbf{F}_1, \quad (23)$$

$$\frac{1}{\mathbf{A}} \mathbf{M}_2 \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{B}_2 \mathbf{W}, \quad (24)$$

其中, $\mathbf{W} = (w_1, w_2, \dots, w_J)^T$ 和 $\mathbf{P} = (p_1, p_2, \dots, p_J)$ 是所有单元上的自由度, w_j 和 p_j 表示在第 j 个单元上的自由度, \mathbf{M}_1 是由 3×3 矩阵组成的对角分块矩阵, \mathbf{M}_2 为 6×6 矩阵组成的对角分块矩阵, 其逆矩阵容易求解. 将 (22) 式和 (23) 式进一步写成如下形式:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{V} = \mathbf{B} \mathbf{V} + \mathbf{F}, \quad (25)$$

$$\text{其中, } \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \rho^{-1} \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A} \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{B}_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho^{-1} \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{F}_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \text{ 假设最后的时间 } t = T, \text{ 在时间}$$

方向上做一致剖分: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$, 定义时间步长为 $\Delta t = T/N$, $t_n = n \Delta t$, $0 \leq n \leq N$.

在方程 (24) 式两端同乘积分因子 $e^{-\mathbf{B}t}$, 关于时间 t_n 到 t_{n+1} 进行积分, 可得

$$V_{n+1} = e^{\mathbf{B}\Delta t} V_n + e^{\mathbf{B}\Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{B}\tau} \mathbf{F}(\tau) d\tau. \quad (26)$$

采用梯形积分公式计算 (25) 式中的积分, 得到二阶指数积分因子格式:

$$V_{n+1} = e^{\mathbf{B}\Delta t} \left(V_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{F}_n \right) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{F}_{n+1}. \quad (27)$$

对于高维情况, 矩阵指数的计算将遇到巨大的困难, 因为指数矩阵是大而稠密的. 对于这种困难, 可以通过使用 Krylov 子空间方法近似指数矩阵和向量的乘积来解决 [16].

4 数值算例

首先给出带有精确解的波动方程测试方法的精度和能量守恒性, 然后应用 LDG 方法求解波的传播问题. 第二个算例是求解非均匀介质中波的传播问题, 第三个算例是 L 形区域中波的传播问题. 在下面的计算中, 考虑线性元, 边界条件为齐次 Dirichlet 边界, $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ 是单位矩阵, $f(x, y, t) = 0$.

算例 1 考虑具有常系数的二维波动方程 $u_{tt} = \nabla^2 u$, $(x, y) \in [0, 2] \times [0, 2]$, 初始条件为 $u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$, $u_t(x, y, 0) = 0$, 这个问题的精确解为 $u(x, y, t) = \cos(\sqrt{2}\pi t) \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. 时间步长取 $\Delta t = 0.001$, 表 1 列出了网格数分别为 16×16 , 32×32 , 64×64 和 128×128 时数值解 w_h 和 \mathbf{p} 的误差和收敛阶数, 通过表格可以发现 w 的精度接近 2, \mathbf{p} 的精度接近 1, 通常观察到这种数值精度的振荡行为就可以说明所设计的 LDG 方法是能量守恒的.

算例 2 考虑波动方程 (1) 在单位正方形 $\Omega = [0, 1]^2$ 上的传播, 将其剖分为 64×64 个均匀大小的正方形, 然后使用一个对角线将每个正方形细分为两个三角形, 如图 1(a) 所示. 本算例考虑非均匀介质, 密度函数 ρ 定义为

表 1 数值解 w_h 和 \mathbf{p} 的误差和收敛阶数

Table 1. Error and convergence order of numerical solution w_h and \mathbf{p} .

网格数	w 的误差		\mathbf{p} 的误差	
	L^2 范数下误差	收敛阶	L^2 范数下误差	收敛阶
8×8	2.80×10^{-2}	—	6.63×10^{-2}	—
16×16	5.75×10^{-3}	2.28	3.40×10^{-2}	0.96
32×32	1.64×10^{-3}	1.81	1.70×10^{-2}	1.00
64×64	4.62×10^{-4}	1.83	8.56×10^{-3}	0.99
128×128	9.20×10^{-5}	2.32	4.30×10^{-3}	0.99

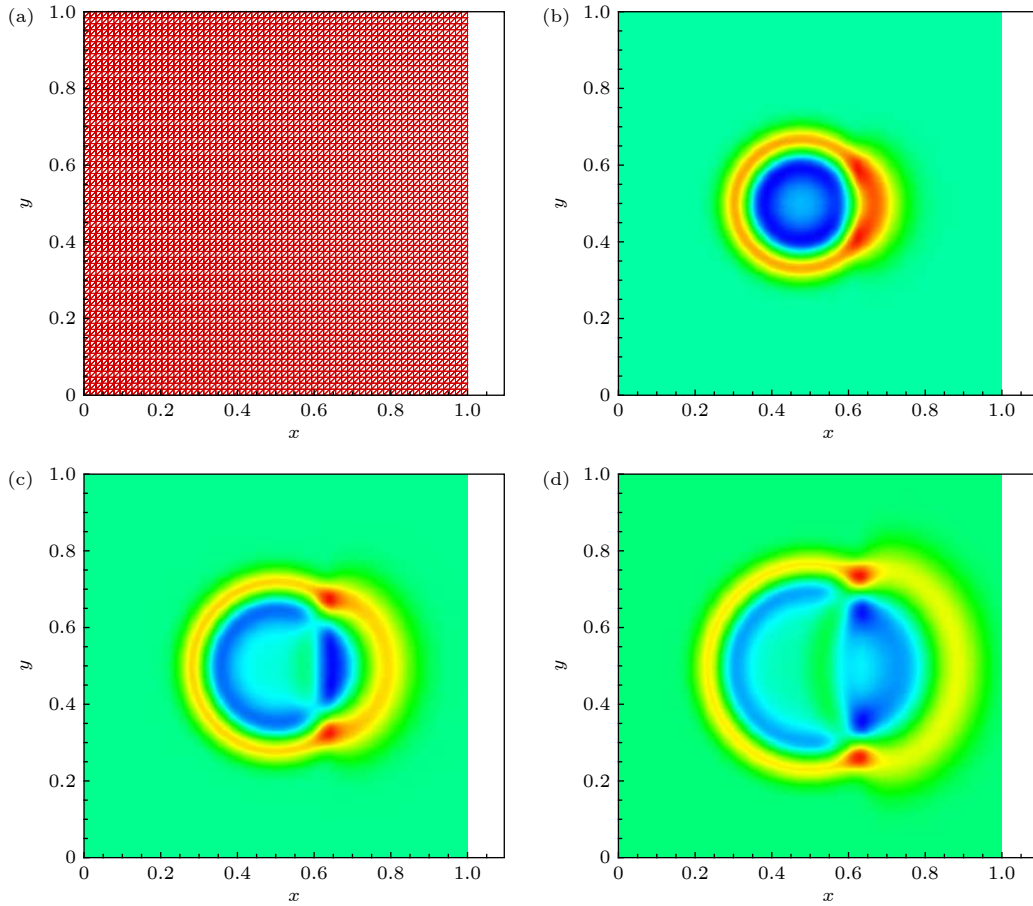


图 1 (a) 算例 2 的网格剖分和数值解 w_h 在不同时刻 (b) $t = 0.2$, (c) $t = 0.3$, (d) $t = 0.4$ 时的波传播

Fig. 1. (a) The triangulation mesh of Example 2; contour plot of solution w_h at different time: (b) $t = 0.2$; (c) $t = 0.3$; (d) $t = 0.4$.

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 4, & x \leq 0.65, \\ 1, & x > 0.65, \end{cases} \quad (28)$$

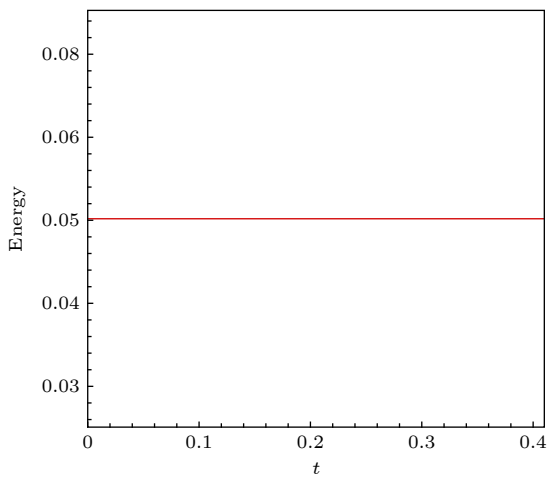


图 2 算例 2 的能量随时间的演化

Fig. 2. Energy evolution with time for Example 2.

初始条件 $w_0(x, y) = 2 \exp[-500(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2]$, $p_0(x, y) = 0$. 图 2 给出了数值解 w_h 在时间 $t = 0.2, 0.3, 0.4$ 时的等高线, 可以看出, 波大约在 $t = 0.3$ 时触及界面 $x = 0.65$, 在那之后, 波以更快的速度通过界面. 这说明传播系数不同会导致波的传播速度不同. 同时也给出离散能量的时间演变图 (图 2). 从图 2 中可以发现, LDG 方法可以保证能量守恒.

算例 3 考虑圆形波在 L 形区域 $\Omega = [0, 1]^2 \setminus [0.7, 1]^2$ 上的传播, 初始条件同算例 2. 采用非一致三角剖分将其剖分为 13578 个三角单元, 如图 3(a) 所示. 数值解 w_h 在 $t = 0.1, 0.3$ 和 0.45 的波形传播图在图 3(b)–(d) 给出. 从图 3 可以看出, 波在 $t = 0.3$ 时刻到达了拐角点. 在此之后, 波反射得到另外一个圆形波. 通过与文献 [11] 比较, 发现本文的数值结果与其数值结果是吻合的.

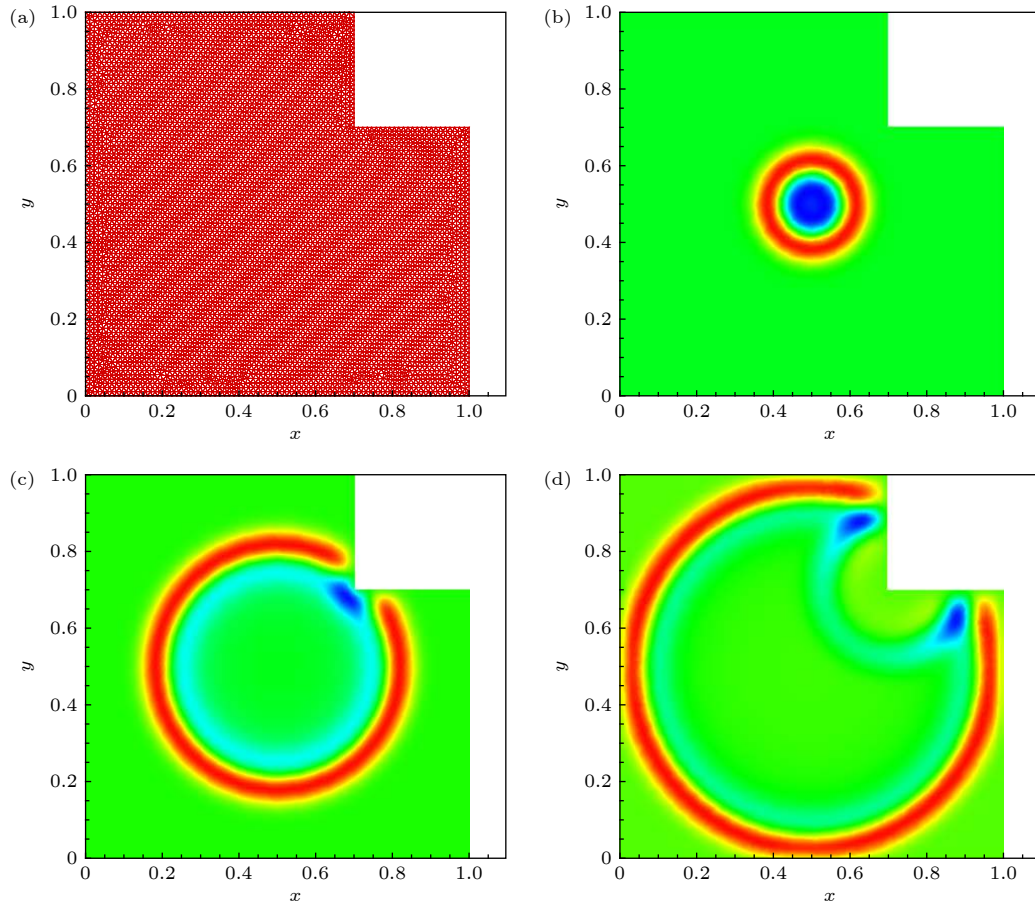


图3 (a) 算例3的网格剖分和数值解 w_h 在不同时刻 (b) $t = 0.1$, (c) $t = 0.3$, (d) $t = 0.45$ 时的波传播

Fig. 3. (a) The triangulation mesh of Example 3; contour plot of solution w_h at different time: (b) $t = 0.1$; (c) $t = 0.3$; (d) $t = 0.45$.

5 结 论

研究了二阶波动方程在二维计算区域的传播问题, 通过选取广义交替数值通量, 建立了LDG方法并分析了格式的能量守恒性. 时间离散上利用指数积分因子方法. 数值实验验证了能量守恒性质和最优误差收敛阶. 下一步的工作考虑将守恒的LDG格式应用到求解非线性波动方程, 例如Sine-Gordon等方程上.

参考文献

[1] Zhou C, Wang Q L 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 239101 (in Chinese) [周聪, 王庆良 2015 物理学报 **64** 239101]
 [2] Wang F, Wei B, Li L X 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 104101 (in Chinese) [王飞, 魏兵, 李林茜 2014 物理学报 **63** 104101]
 [3] Wang T, Cui Z W, Liu J X, Wang K X 2018 *Acta Phys. Sin.*

67 114301 (in Chinese) [王婷, 崔志文, 刘金霞, 王克协 2018 物理学报 **67** 114301]
 [4] Kampanis N A, Ekaterinaris J, Dougalis V 2008 *Effective Computational Methods for Wave Propagation* (Virginia beach: Chapman & Hall/CRC) pp135–164
 [5] Sjögreen B, Anders P N 2011 *J. Sci. Comput.* **52** 17
 [6] Appelö D, Petersson N A 2009 *Commun. Comput. Phys.* **5** 84
 [7] Wang T K 2010 *J. Numerical Methods & Computer Applications* **31** 64 (in Chinese) [王同科 2010 数值计算和计算机应用 **31** 64]
 [8] Safjan A, Oden J 1993 *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **103** 187
 [9] Cockburn B, Shu C W 1997 *SIAM J. Numer. Anal.* **35** 2440
 [10] Zhao G Z, Yu X J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 110208 (in Chinese) [赵国忠, 蔚喜军 2012 物理学报 **61** 110208]
 [11] Chung E, Engquist B 2009 *SIAM J. Numer. Anal.* **47** 3820
 [12] Chou C S, Shu C W, Xing Y 2014 *J. Comput. Phys.* **272** 88
 [13] Nie Q, Zhang Y T, Zhao R 2006 *J. Comput. Phys.* **214** 521
 [14] Zhang R P, Wang Z, Wang Y, Han Z J 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 050503 (in Chinese) [张荣培, 王震, 王语, 韩子健 2018 物理学报 **67** 050503]
 [15] Wang Y, Zhang R P, Wang Z J, Han Z 2019 *Chin. Phys. B* **28** 50503
 [16] Chen S, Zhang Y 2011 *J. Comput. Phys.* **230** 4336

Two-dimensional wave equation solved by generalized alternating flux based local discontinuous Galerkin method*

Zhang Rong-Pei¹⁾ Wang Di¹⁾ Yu Xi-Jun²⁾ Wen Xue-Bing^{1)†}

1) (*College of Mathematics and Systems Science, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China*)

2) (*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China*)

(Received 24 April 2019; revised manuscript received 17 October 2019)

Abstract

The wave propagation is often carried out in complex geological structures. Solving the wave propagation problem effectively in inhomogeneous medium is of great interest and has many applications in physics and engineering. In this paper, the local discontinuous Galerkin (LDG) method is applied to the numerical solution of the second-order wave equation. Firstly, the auxiliary variables are introduced, and the second-order wave equations are written as a system of first-order partial differential equations. Then the discontinuous Galerkin format is applied to the corresponding linearized wave equations and adjoint equations. We consider the triangulation in this paper. In order to ensure that the discrete format satisfies the energy conservation, the generalized alternating flux is chosen on the element boundary. We prove that the LDG method satisfies the energy conservation. The exponential integral factor method is used in time discretization. In order to improve the computational efficiency, the Krylov subspace method is used to approximate the product of the exponential matrix and the vector. Numerical examples with exact solutions are given in numerical experiments. The numerical results verify the numerical precision and energy conservation of the LDG method. In addition, the calculation of inhomogeneous medium and complex computational regions are considered. The results show that the LDG method is suitable for simulation of complex structures and propagation in multi-scale structured medium.

Keywords: wave equation, generalized alternating, local discontinuous Galerkin method, energy conservation

PACS: 02.60.-x, 91.30.-f, 43.35.+d

DOI: [10.7498/aps.69.20190613](https://doi.org/10.7498/aps.69.20190613)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11571002), the Key Laboratory Fund of National Defense Science and Technology, China (Grant No. 6142A050202717), the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 20180550996), and the Science Foundation of China Academy of Engineering Physics (Grant Nos. 2013A0202011, 2015B0101021).

† Corresponding author. E-mail: xbw2004@163.com