

湍流热对流温度剖面双参数拟合及其变化特性*

方明卫 何建超 包芸†

(中山大学航空航天学院, 广州 510275)

(2020年1月12日收到; 2020年5月5日收到修改稿)

采用高效并行的直接数值模拟方法计算了三个 Pr 数的系列 Ra 数的二维热对流. 对所有计算结果的平均场温度边界层特性进行研究, 采用考虑脉动作用的双参数温度边界层理论对温度边界层剖面进行拟合, 得到了拟合参数 a 和参数 c 的分布. 参数 a 决定了温度剖面的基本特性, 而参数 c 起到了对温度剖面外区的修正作用, 使得在 5 个边界层厚度温度边界层剖面的计算值与理论解符合良好. 参数 c 的变化特性与参数 a 的相反, a 值增大则 c 值减小. 不同的 Pr 数拟合参数 a 随 Ra 数变化具有不同的分布特性, 但都存在突然减小的间断. 参数 a 的间断变化是由湍流热对流流动状态由椭圆形大尺度环流突变为圆形大尺度环流造成的, 且随着 Pr 数变大间断点的特征 Ra 数增高. 相同 Ra 数时 Pr 数越大温度剖面的拟合参数 a 值越小, 表明温度边界层中脉动的影响越小. 传热特性 $Nu/Ra^{0.3}$ 、表征羽流运动特性的大尺度环流路径周长, 及温度边界层拟合参数 a 三者随 Ra 数的变化都存在转折或间断, 且对应相同的特征 Ra 数, 显示三者具有很好的相关性并与流动形态变化直接关联.

关键词: 二维湍流热对流, 温度边界层剖面, 间断特性, 传热特性, 大尺度环流路径周长

PACS: 47.27.te

DOI: 10.7498/aps.69.20200073

1 引言

热对流现象通常指在空间中通过流动介质传递热量, 普遍存在于自然界和工业界中. 从众多热对流现象中抽取出来的 Rayleigh-Bénard (RB) 热对流系统是研究热对流问题的经典模型之一^[1]. RB 热对流系统由一个充满流体介质的封闭腔体组成, 下底板恒温加热, 上顶板恒温冷却, 流体介质在热浮力驱动下形成对流运动. 在 RB 系统的研究中, 一个核心问题是湍流流动的热量运输机制. 2000 年 Grossmann 和 Lohse^[2,3] 提出著名的 GL 理论, 对系统的传热特性随 Ra 数和 Pr 数的变化规律给出了很好的预测.

湍流热对流中温度边界层特性是研究的重点问题之一. Lui 和 Xia^[4] 对三维圆柱 RB 系统的温

度边界层空间结构进行研究, 发现不同 Ra 数下温度边界层沿横向呈现 V 形分布. Zhou 和 Xia^[5] 在实测瞬时速度边界层时, 引入动态重构法, 发现平均速度剖面分布与 Prandtl-Blasius 层流边界层剖面一致. 文献 [6–8] 在进行极高 Ra 数的系列实验中发现经典区间和终极区间的温度剖面都存在对数律. Zhou 等^[9,10] 通过直接数值模拟 (DNS) 方法对二维 RB 系统进行模拟, 分别讨论了速度剖面和温度剖面特性. Stevens 等^[11] 对三维圆柱系统进行数值模拟, 指出温度边界层更容易受到速度边界层引起的体积波动影响. Shishkina 等^[12] 在层流假设下求解出热对流温度边界层方程的 PBP (Prandtl-Blasius-Pohlhausen) 解, 发现与实验和数值计算的温度边界层剖面都有较大的差别. Shishkina 等^[13,14] 考虑加入温度脉动对边界层的作用, 引入涡热扩散系数 (κ_t), 推导出新的温度边界

* 国家自然科学基金 (批准号: 11772362) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: stsbym@mail.sysu.edu.cn

层理论剖面, 包括单参数和双参数解, 大大改善了理论解与实际温度剖面的符合程度. 何鹏等^[15]研究了二维 RB 系统中温度边界层拟合参数的分布特性. 黄茂静和包芸^[16]对二、三维 RB 系统进行了对比研究, 讨论了流态特征、近底板温度分布和温度边界层等特性. Wang 等^[17]从温度边界层方程出发, 对温度脉动边界层方程及其剖面分布展开研究. 包芸等^[18]进行了 $Ra = 10^{10}$ 系列 Pr 数的计算, 发现温度边界层厚度和 Re 数随 Pr 数变化都存在一定的标度率关系.

本文采用并行直接求解方法 (PDM-DNS) 计算了三个典型 Pr 数系列 Ra 数的二维 RB 热对流. 采用 Shishkina 等^[13,14]提出的双参数温度边界层剖面理论, 对计算的热对流温度边界层剖面进行拟合, 得到拟合参数的分布特性, 对拟合参数 a 值随 Ra 数和 Pr 数变化规律进行讨论. 并结合已有研究成果, 讨论温度边界层拟合参数 a 值、传热 Nu 数及羽流运动特性三者随 Ra 数的典型变化规律.

2 DNS 数值计算与双参数拟合原理

2.1 DNS 数值模拟

在 Oberbeck-Boussinesq 近似下, 无量纲的热对流方程为:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\sqrt{Ra/Pr}} \nabla^2 \mathbf{u} + \theta \mathbf{k}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = \frac{1}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \nabla^2 \theta, \end{cases} \quad (1)$$

其中 \mathbf{u} 为无量纲速度矢量, θ 为无量纲温度, t 为无量纲时间, \mathbf{k} 为单位垂向矢量, p 为压力. 无量纲参数 $Ra = (\beta g \Delta \theta H^3) / (\kappa \nu)$ 为瑞利数, $Pr = \nu / \kappa$ 为普朗特数, $\Gamma = W/H$ 反映了对流系统的几何尺寸. β 为热扩散系数, g 为重力加速度, $\Delta \theta$ 为上下壁面温差, H 为系统装置的高度, W 为宽度, ν 为运动黏性系数, κ 为热扩散率. 计算的边界条件为四壁无滑移, 侧壁绝热, 上、下底板恒温, 分别为 -0.5 和 0.5 .

本文采用 PDM-DNS 方法^[19]对二维 RB 热对流系统进行直接数值模拟. 利用投影法求解热对流方程, 其中的压力泊松方程求解需要全流场联立, 利用 FFT 解耦泊松方程, 结合并行三对角占优 (PDD) 算法并行求解三对角泊松方程. 使用“天河

二号”超级计算机计算了 $Pr = 0.7, 4.3$ 和 $20.0, 1 \times 10^7 \leq Ra \leq 5 \times 10^{12}$ 的 51 个算例. 获取系列 RB 热对流时间平均场数据, 用于研究一系列湍流热对流的传热特性、温度边界层特性、流动特性以及其他物理特性.

2.2 温度边界层双参数拟合原理

温度边界层特性是湍流热对流的主要研究课题之一, 它的研究成果对理解湍流热对流的传热特性, 以及增强和控制传热效率等研究都具有重要的价值.

针对热对流温度边界层的理论研究工作, Shishkina 等^[13]在原有层流假设下, 热对流温度边界层 PBP 理论解^[12]的基础上, 推导湍流温度边界层时加入脉动的作用, 并引入涡热扩散系数 κ_t 和相似变量 $\xi(x, z) = z/\lambda(x)$, $\lambda(x)$ 为局部边界层厚度, 得到了温度边界层剖面的单参数控制理论. 受到线性速度边界层假设的约束, 认为温度边界层的单参数拟合不适用于小 Pr 数的情况. 何鹏等^[15]应用这一理论对系列的二维湍流热对流温度边界层剖面进行了研究, 发现新的理论相较于 PBP 解在拟合温度边界层的结果上有了显著的改善, 并且拟合参数有明显的变化规律.

Shishkina 等^[14]重新改进对流动的假设, 引用 Prandtl 的混合长度理论模型和新的涡热扩散系数分布关系

$$(\kappa_t/\kappa)_\xi \approx KB\psi, \quad \left(\frac{\kappa_t}{\kappa}\right)_\xi \approx \frac{3a^3\xi^2}{1+b^2\xi^2}, \quad (2)$$

推导出全 Pr 数下温度边界层方程

$$\theta(\xi) = \frac{1}{b} \int_0^{b\xi} \left[1 + \frac{3a^3}{b^3} (\eta - \arctan \eta) \right]^{-c} d\eta, \quad (3)$$

其中 a, b, c 为常数, 但这三个常数并不完全独立.

由温度边界层分布的边界条件得知, 当 $\xi = 0$ 时 $\theta(0) = 0$, 当 $\xi \rightarrow \infty$ 时 $\theta(\infty) = 1$. 将边界条件代入 (3) 式, 可以很容易导出三个常数 a, b, c 满足下列函数关系:

$$b = \int_0^\infty \left[1 + \frac{3a^3}{b^3} (\eta - \arctan \eta) \right]^{-c} d\eta, \quad (4)$$

(3) 式和 (4) 式中的温度边界层剖面方程包含了两个可调参数. 由此, 建立了温度边界层剖面的双参数控制理论. 与单参数理论相比, 双参数理论中的速度分布突破了线性假设, 适用于全 Pr 数, 因此可以用来分析 $Pr < 1$ 的情况, 以及改善温度边界

层的外区解.

双参数理论的温度边界层剖面拟合工作有两个参数可以调整, 加大了拟合工作的不确定性. 仔细分析单参数和双参数理论的假设发现, 在 $\xi \rightarrow 0$ 时, 两个理论的涡热扩散系数有同样的渐进解 $\kappa_t/\kappa \approx a^3\xi^3$. 而且即使是小 Pr 数情况, 在近壁面速度线性假设仍然成立. 由此在进行双参数理论剖面拟合的过程中, 先采用单参数拟合确定参数 a 的值, 然后再调整 c 值拟合整个温度边界层剖面.

考虑到参数 a 和参数 c 的不同作用, 首先讨论参数 a 对温度边界层剖面理论解的影响. 图 1(a) 给出了不同参数 a 时理论温度剖面分布和 PBP 温度剖面, 给定的空间范围为 5 倍温度边界层厚度, 相似变量 $\xi(z) = z/\lambda$. 从图 1(a) 可以看到, 不同 a 值的温度剖面与 PBP 理论曲线在近壁面处一致, 而后在不到 0.5 个边界层厚度处逐渐分开. 随着控

制参数 a 逐渐减小, 理论温度剖面形状以单调趋势不断上升, 逐渐接近 PBP 曲线. 由此表明, 参数 a 的值越小, 温度边界层中脉动的影响越小, 理论解越接近层流的 PBP 解.

双参数温度边界层剖面拟合的具体步骤为, 在确定参数 a 时采用 Shishkina 等 [13] 中的单参数方法, 目标是修改参数 a 的值, 使温度剖面在 2 倍边界层厚度内理论解和计算值的误差达到最小值. 确定参数 a 后采用本文讨论的双参数理论, 调整参数 c 使温度剖面在 4 倍边界层厚度内的误差最小.

图 1(b) 给出了 $Pr = 4.3, Ra = 10^9$ 时双参数拟合和单参数拟合的温度剖面, 可见两者都远好于层流 PBP 理论解, 说明温度边界层湍流脉动的影响不可忽略. 双参数拟合的效果在 5 倍边界层厚度范围内好于单参数的拟合效果, 尤其是在温度边界层的外区. 依据理论及本文拟合过程, 参数 a 直接反映近壁面温度的变化情况以及温度边界层剖面的总体走向和基本特性, 参数 c 则修正了温度边界层剖面的外区解. 因此, 双参数拟合理论在流动假设上的改进是有效的.

本文采用双参数拟合理论研究三个 Pr 数的系列 Ra 数二维湍流热对流温度边界层特性, 分析讨论温度边界层拟合参数变化特性与物理流动特性之间的关系.

3 不同 Pr 数温度剖面特性及其与流态特性的关联

在 RB 对流系统中, 温度边界层拟合控制参数大小及变化规律反映了脉动对温度边界层的影响程度. 下面将详细讨论不同 Pr 数和 Ra 数下拟合控制参数值变化特性, 以及与温度剖面分布和流态特性之间的关系.

图 2 给出了 $Pr = 0.7$ 系列 Ra 数的热对流温度边界层拟合参数 a 和参数 c 的变化特征. 可以看到, 在 $Ra < 1 \times 10^9$ 时参数 $a \approx 2.2$ 附近, 参数 a 随 Ra 的变化呈现出略为下降的特征, 而后出现明显的间断, $Ra \geq 1 \times 10^9$ 之后参数 $a \approx 1.6$ 附近出现波动, 反映出此时的温度边界层剖面形状基本不变化. 参数 c 的值小于参数 a 的值, 且变化特性相反, $Ra < 1 \times 10^9$ 时参数 $c \approx 0.6$ 附近呈现略为上升的变化特征, 同样有分布的间断, $Ra \geq 1 \times 10^9$ 之后参数 $c \approx 0.7$ 附近出现波动.

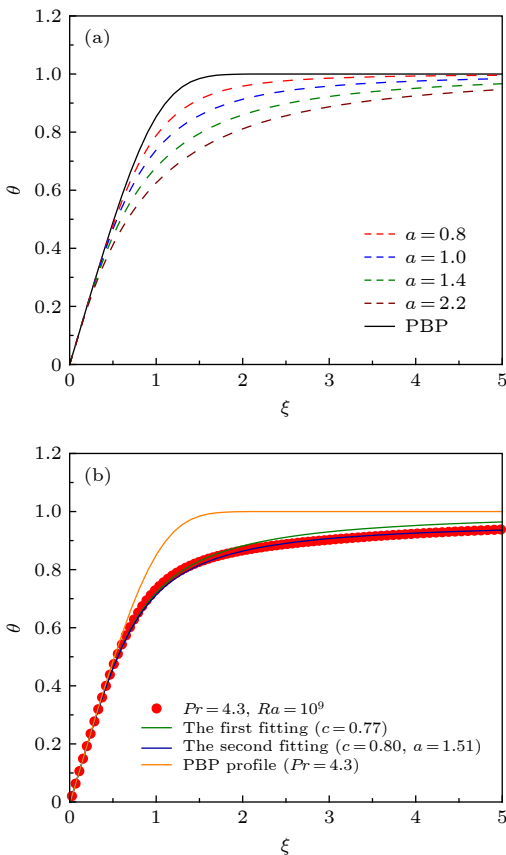


图 1 (a) 不同控制参数 a , 双参数理论温度剖面分布, 黑色实线为 PBP 理论解; (b) $Pr = 4.3, Ra = 10^9$, 单、双参数温度剖面拟合

Fig. 1. (a) Two-parameter theoretical temperature profile distribution for different parameters a , the black solid line is the Prandtl-Blasius predictions; (b) $Pr = 4.3, Ra = 10^9$, one and two-parameter temperature profile fitting.

拟合参数值的变化直接反映温度边界层剖面的变化特性. 图 3 给出 $Pr = 0.7$ 时温度边界层剖面拟合线的分布, 明显可以看出, 在 $Ra < 1 \times 10^9$ 时温度剖面偏低并基本重合, 而 $Ra \geq 1 \times 10^9$ 时温度剖面偏高基本重合. 拟合参数的间断分布导致归

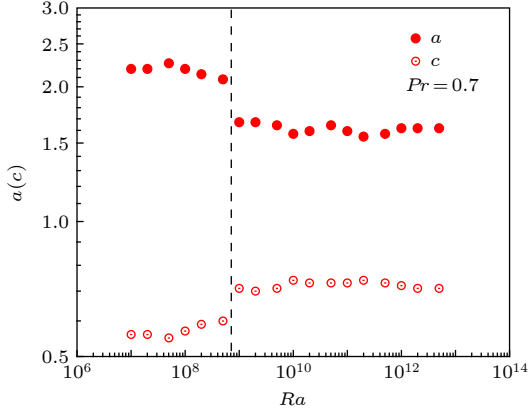


图 2 控制参数随 Ra 数分布

Fig. 2. Distribution of control parameter with Ra number.

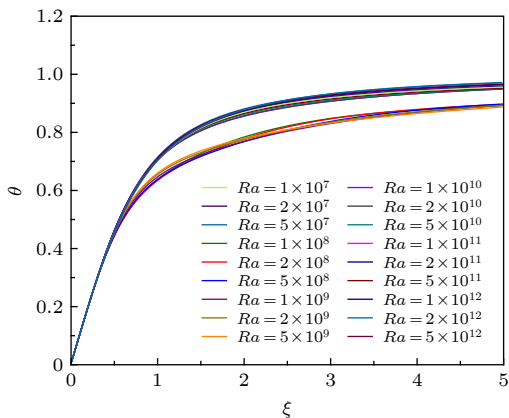


图 3 $Pr = 0.7$ 时不同 Ra 数近底板温度剖面分布

Fig. 3. Temperature distribution close to the bottom plate with different Ra number for $Pr = 0.7$.

一化的温度剖面分布出现了两组明显的不同形态.

温度边界层理论解中参数 a 的值越小越接近层流 PBP 解. 但在 $Pr = 0.7$ 低 Ra 数时, 参数 a 的值较大而高 Ra 数时较小, 而且出现间断分布, 与 Ra 数高湍流强度大的特点不一致. 由此, 温度边界层剖面形态的变化可能与热对流的流动形态发生根本性变化相关.

给出这两组典型的温度边界层剖面形态对应的不同热对流流动形态, 如图 4 所示^[20].

图 4 给出两组形态变化中对应的典型 Ra 数热对流的平均温度场和流线, 其中红色流线是最大速度所在流线, 定义为大尺度环流特征周长. 图 4(a) 中较低 Ra 数时大尺度环流呈现椭圆状, 底板左右两侧角涡大小差异较大, 最大速度流线带起的边界附近高温层明显堆积, 使得温度在边界附近变化减缓. 图 4(b) 中较高 Ra 数时大尺度环流呈现为圆形, 下底板两侧角涡大小基本一致, 大尺度环流周长远离边界附近并且明显减小, 温度在边界附近变化很快. 两个典型热对流的流动形状完全不同. 因此, 在本文研究的 $Pr = 0.7$ 的 Ra 数范围内, 不同的流动形态导致热对流的温度边界层产生了两种不同的剖面形状, 并可由剖面的拟合参数变化特性反映.

由此可见, 温度边界层剖面形状以及拟合参数的变化, 与热对流的流动形态变化有着密切的关联. 温度边界层拟合参数的变化特性可直接反映出这些典型的变化特征.

图 5 给出的是 $Pr = 4.3$ 和 20.0 时的温度剖面拟合参数随 Ra 数的变化情况. 图 5(a) 显示的是 $Pr = 4.3$ 时参数 a 和参数 c 随 Ra 数的变化过程.

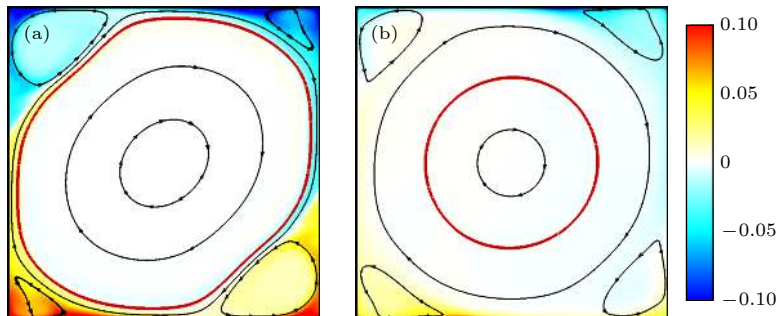


图 4 两个典型热对流平均温度场和流线图, 颜色表示温度分布, 带有箭头的曲线为流线, 其中红色流线代表大尺度环流路径周长^[20]: (a) $Ra = 1 \times 10^8$; (b) $Ra = 1 \times 10^9$

Fig. 4. The time-averaged temperature fields and streamlines in two typical RB convection, the temperature is coded in color, and the arrow indicates the flow direction. The red streamline represents the length of the large-scale circulation path^[20]: (a) $Ra = 1 \times 10^8$; (b) $Ra = 1 \times 10^9$.

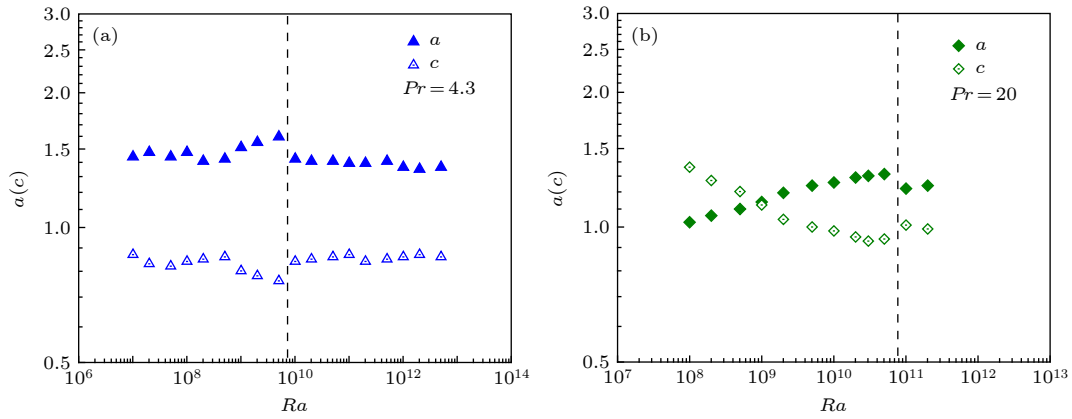


图 5 拟合参数 a 随 Ra 数分布 (a) $Pr = 4.3$; (b) $Pr = 20.0$

Fig. 5. Distribution of fitting parameter a with Ra number: (a) $Pr = 4.3$; (b) $Pr = 20.0$.

与 $Pr = 0.7$ 相比, 两个参数之间的数值差减小. 当 $Ra \leq 5 \times 10^8$ 时, 参数 a 随 Ra 数变化很小, $a \approx 1.5$, 当 $5 \times 10^8 < Ra \leq 5 \times 10^9$ 时, 参数 a 随 Ra 增大而逐渐略为增大到 $a \approx 1.7$, 在 $Ra \approx 1 \times 10^{10}$ 时参数 a 突然减小, 出现间断, 当 $Ra \geq 1 \times 10^{10}$ 时, 参数 a 相对比较稳定, $a \approx 1.5$, 随着 Ra 数增高无明显波动. 参数 c 的值小于参数 a 的值, 且变化特性相反, $c \approx 0.85$. 总体上参数 a 随 Ra 的变化幅度较小, 表明此时的温度剖面形状变化不大.

图 5(b) 给出了 $Pr = 20$ 时参数 a 和参数 c 随 Ra 数的分布图. 可以看出, 参数 a 的值在低 Ra 数时相对较小并随着 Ra 数增高而增加, 从 $a \approx 1.0$ 连续变化到 $a \approx 1.35$, 表明此时的温度边界层剖面形状也是连续变化的. 从图 2 的结果可知, 大 Pr 数时温度边界层剖面存在从弱湍流化向强湍流化形态连续过渡的变化规律. 这种变化直到 $Ra \approx 1 \times 10^{11}$ 时参数 a 突然减小出现间断, 此时流动形态同样发生了变化. 参数 c 的变化与参数 a 的变化特性相反, 只是由于参数 a 减小而参数 c 增大, 在图中出现了两者相交的分布.

大 Pr 数温度边界层拟合参数的这种不同分布的物理含义, 还有待更多的研究.

下面结合三个典型 Pr 数, 讨论温度边界层拟合参数值随 Ra 数变化规律及间断位置特征.

图 6 给出了三组 Pr 数下拟合参数 a 随 Ra 数的变化分布, 其中小图是 c 值的分布. 可以看出, 相同 Ra 数时 Pr 数越大, 温度边界层的拟合参数 a 值越小, 表明温度边界层中脉动的影响越小. 不同 Pr 数的参数 a 随 Ra 数分布规律有明显差异. 总体变化趋势上, $Pr = 0.7$ 时参数 a 值由大变小, $Pr = 4.3$ 时参数 a 的变化在中间有明显抬高但总

体呈现水平, $Pr = 20$ 时参数 a 值由小变大, 三者都存在突变式间断. 间断之后三者的拟合参数 a 值都呈现小幅波动, 变化幅值不大. 小图中 c 值的变化特点与 a 值成相反趋势, Pr 数越大 c 值也越大, 随 Ra 数的变化为 a 值增加 c 值减小.

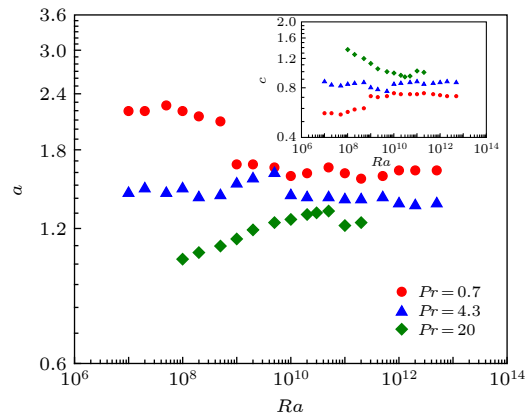


图 6 控制参数 a 随 Ra 数的分布

Fig. 6. Distribution of control parameter a with Ra number.

总结以上三个典型 Pr 数的温度边界层剖面拟合特性发现, 拟合参数 a 虽然随 Ra 数的变化不完全一致, 但都存在一个共同的特性, 即出现了间断的现象, 并与热对流的大尺度环流形态从椭圆变为圆形的流态特性变化相关联.

拟合参数及其变化规律在温度边界层特性中的作用, 还需要更深入的研究.

4 传热特性、大尺度环流路径周长及参数 a 值之间的相关性

Nusselt(Nu) 数反映 RB 系统的整体传热. 在较大范围内, GL 理论预测了传热 Nu 数与 Ra 数

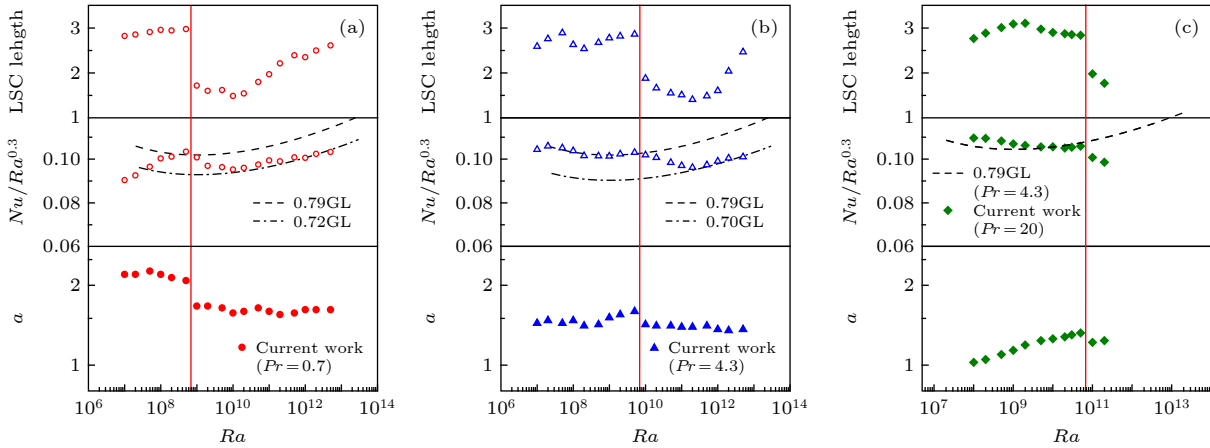


图 7 大尺度环流路径周长、传热 Nu 数及参数 a 随 Ra 数变化, 其中红色空心圆点和蓝色空心三角是包芸等^[21]的计算结果, 黑色虚线是 GL 理论预测倍数线, 红线是特征 Ra 数位置 (a) $Pr = 0.7$; (b) $Pr = 4.3$; (c) $Pr = 20$

Fig. 7. The variation of large scale circulation path length, Nu number, and parameter a with Ra number, among which the red hollow dots and blue hollow triangles are calculated by Bao Yun^[21], etc. The black dotted line is the multiple predicted by the GL theory, the red line is the characteristic Ra number position: (a) $Pr = 0.7$; (b) $Pr = 4.3$; (c) $Pr = 20$.

和 Pr 数的关系. 包芸等^[21]发现二维热对流 $Nu/Ra^{0.3}$ 数随 Ra 数变化具有两个转折点, 并在极高 Ra 数时其变化与 GL 理论的预测倍数线走向一致, 而反映羽流运动特性的大尺度环流路径周长变化和 $Nu/Ra^{0.3}$ 数随 Ra 数的转折有很好的相关性.

进一步分析温度边界层拟合参数 a 值与大尺度环流路径周长和传热 Nu 数随 Ra 数变化规律, 发现三个典型 Pr 数的温度边界层拟合参数 a 值的间断变化对应的 Ra 数与其他两者的变化特征都有着很好的对应关系.

图 7 分别给出了 $Pr = 0.7, 4.3, 20.0$ 时大尺度环流路径周长、传热 Nu 数及参数 a 值随 Ra 数的变化, 红色圆点、深蓝色三角和绿色方块分别是 $Pr = 0.7, 4.3, 20.0$ 的计算结果. 可以看出, 不同 Pr 数的三个物理量, 大尺度环流路径周长、传热 Nu 数及温度边界层拟合参数 a 值在红线标出的特征 Ra 数都具有相同的变化特性. 在红线处, 大尺度环流路径周长随着 Ra 数变化出现突然的减小, 导致传热 Nu 数随 Ra 数变化出现转折. 包芸等^[21]在分析 $Pr = 0.7$ 和 4.3 的结果时指出, 这是由于二维热对流的流动形态由椭圆变为圆形造成大尺度环流路径周长变化产生的. 同样本文 $Pr = 20$ 的结果也有类似现象. 大尺度环流路径周长的突然减小由羽流运动特性的变化引起, 造成了传热 Nu 数随 Ra 数变化的标度关系改变. 而这个流动形态的突然变化在热对流的温度边界层中也引起相应变化, 温度剖面的拟合参数 a 随 Ra 数的变化特性出现

间断, 即温度剖面的形状变化出现不连续性. 三个物理量随 Ra 数变化具有很好的相关性.

综上所述, 二维湍流热对流流动形态的变化导致热对流的诸多物理量都发生了改变. 不同 Pr 数下大尺度环流路径周长、传热 Nu 数及温度边界层拟合参数 a 值随 Ra 数变化过程中, 都存在相关的典型变化, 其对湍流热对流特性的研究价值将进行更多深入的探讨.

5 结 论

温度边界层特性是 Rayleigh-Bénard 热对流研究的重点问题之一, 与传热机制紧密相关. 本文采用高效并行的 DNS 方法, 计算了 $Pr = 0.7, 4.3, 20.0$ 在系列 Ra 数下的二维方腔热对流, 并采用 Shishkina 提出的双参数温度边界层理论, 对所有 Pr 数和 Ra 数的温度边界层剖面进行拟合, 得到了拟合参数 a 和参数 c 的分布. 通过分析和研究不同 Pr 数系列 Ra 数的控制参数 a 值、温度剖面特性、流态特性及传热特性, 得到的结论如下.

1) 不同的 Pr 数温度剖面拟合参数 a 随 Ra 数变化具有不同的分布特性. $Pr = 0.7$, 参数 a 值基本分布在 2.2 和 1.6 两个值处, 中间出现突变减小, 由此造成温度剖面形成两组不同的剖面形状, 并且与热对流的流动特性大尺度环流的形状相关联. $Pr = 4.3$, 参数 a 值在 1.4 附近微小波动然后逐渐增加到 1.6, 同样出现突降至 1.4 附近并保持基本

不变, 此时的温度剖面将重叠在一起. $Pr = 20$, 参数 a 值随 Ra 数增高而增大, 直到 Ra 数增加到 1×10^{11} 时, 参数 a 同样突变减小而后基本不变. 参数 c 的变化特性和参数 a 的变化特性相反.

2) 三个 Pr 数的温度剖面拟合参数 a 随着 Ra 变化, 在总体趋势上, $Pr = 0.7$ 时参数 a 值由大变小, $Pr = 4.3$ 时参数 a 的变化在中间有明显抬高但总体呈现水平, $Pr = 20$ 时参数 a 值由小变大. 三者都存在突变减小间断, 且随着 Pr 数变大, 间断点的特征 Ra 数增高. 相同 Ra 数时, Pr 数越大温度剖面的拟合参数 a 值越小, 表明温度边界层中脉动的影响越小.

3) 在同一 Pr 数下, 传热特性的 $Nu/Ra^{0.3}$ 、反映羽流运动特性的大尺度环流路径周长, 以及温度边界层特性的参数 a 都存在共同的特征, 由于二维热对流的流动形态由椭圆变为圆形造成大尺度环流路径周长变化, 三者随 Ra 数的变化中出现明显的转折或间断, 且对应相同的特征 Ra 数. 三个典型 Pr 数系列 Ra 数的计算结果表明, 都存在传热、大尺度环流路径周长和温度剖面拟合参数 a 在同一特征 Ra 数发生转折或间断的特性, 三个物理量具有很好的相关性.

附录

1) 不考虑脉动影响的温度边界层 PBP 理论解

Shishkina 等^[12] 从无限长平板的二维流动出发, 得到温度方程

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial z} = \kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial z} \right), \quad (\text{A1})$$

考虑定常问题消去时间项 $\partial \theta / \partial t$, 并且假设温度在 x 方向的二阶偏导远小于 z 方向二阶偏导, 即 $|(\partial^2 \theta) / \partial x \partial x| \ll |(\partial^2 \theta) / \partial z \partial z|$, 方程 (A1) 可化为

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial z} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial z}. \quad (\text{A2})$$

通过雷诺分解, 将瞬时量分解为时间平均项和时间脉动项. 即 $u = \langle u \rangle + u'$, $v = \langle v \rangle + v'$ 和 $\theta = \langle \theta \rangle + \theta'$, 并引入脉动连续性方程. 代入 (A2) 式后沿时间平均, 可得到

$$\langle u \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial z} + \frac{\partial \langle u' \theta' \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v' \theta' \rangle}{\partial z} = \kappa \frac{\partial^2 \langle \theta \rangle}{\partial z \partial z}, \quad (\text{A3})$$

进一步假设 $|\partial \langle u' \theta' \rangle / \partial x| \ll |\partial \langle v' \theta' \rangle / \partial z|$, 有

$$\langle u \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial z} + \frac{\partial \langle v' \theta' \rangle}{\partial z} = \kappa \frac{\partial^2 \langle \theta \rangle}{\partial z \partial z}, \quad (\text{A4})$$

忽略脉动的影响, 通过直接对方程 (A4) 进行求解, 可以推导得到经典的 PBP 理论解^[12], 解的形式如下:

$$\theta(\xi) = \int_0^\xi \exp[-\Gamma \omega (1 + \omega^{-1}) \eta^\omega] d\eta, \quad (\text{A5})$$

其中 Γ 为伽马函数, ω 为常数. 当 $Pr \ll 1$ 时, $\omega = 2$; 当 $Pr \gg 1$ 时, $\omega = 3$. 当为任意 Pr 数时, $2 \leq \omega \leq 3$.

2) 考虑脉动的单参数温度边界层理论

与 PBP 理论不同, Shishkina 等^[13] 考虑脉动的影响, 引入涡热扩散系数

$$\langle v' \theta' \rangle_t = -\kappa_t \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial z}, \quad (\text{A6})$$

代入方程 (A4) 整理后得

$$\langle u \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x} + \left(\langle v \rangle - \frac{\partial \kappa_t}{\partial z} \right) \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial z} = (\kappa + \kappa_t) \frac{\partial^2 \langle \theta \rangle}{\partial z \partial z}. \quad (\text{A7})$$

引入相似变量 $\xi(x, z) = z/\lambda(x)$, 其中 $\lambda(x)$ 为温度局部边界层厚度. 当 $z \rightarrow \infty$ 时, $\langle u \rangle(x, z) \rightarrow \langle u \rangle_0$. 设平均速度的流函数 $\Psi = \langle u \rangle_0 \lambda(x) \psi(\xi)$ (其中 $\psi(\xi)$ 为流函数) 可得

$$\begin{cases} \langle u \rangle = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \\ \langle v \rangle = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \\ \langle \theta \rangle = \theta_{\text{bot}} - \left(\frac{\Delta}{2} \right) \theta(\xi). \end{cases} \quad (\text{A8})$$

同时, 给出温度和流函数的边界条件

$$\begin{cases} \theta(0) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(0) = 1, \quad \theta(\infty) = 1, \\ \psi(0) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi}(0) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi}(\infty) = 1. \end{cases} \quad (\text{A9})$$

将平均速度的流函数公式 (A8) 式代入方程 (A7) 中得

$$(\kappa + \kappa_t) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \left[\frac{\partial \kappa_t}{\partial \xi} + U_0 \psi \lambda(x) \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x} \right] \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0, \quad (\text{A10})$$

令 $A = (\partial \kappa_t / \partial \xi) / \kappa$, $B = \langle u \rangle_0 \lambda(x) (\partial \lambda(x) / \partial x) / \kappa$. 由于 GL 理论标度律假设, 存在局部边界层厚度 $\lambda(x) \propto (v\lambda/U_0)^{1/2} \rightarrow \lambda(x) \propto x^{1/2}$, 代入 B 的定义式可得 B 为常数. 此时, 方程 (A10) 可化为以下形式:

$$(1 + \kappa_t / \kappa) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + [A + B\psi] \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0. \quad (\text{A11})$$

大量三维 DNS 的计算结果拟合得出, 近底板处 κ_t 与 ξ 存在标度律关系, 即 $\kappa_t \propto \xi^3$. 由壁面处所有脉动为 0 的条件, 可以进一步得到

$$\kappa_t \approx a^3 \xi^3 \kappa. \quad (\text{A12})$$

(A12) 式是该理论的另一个重要假设, 称为涡热扩散系数分布假设. 将其代入方程 (A10) 可以得到

$$(1 + a^3 \xi^3) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + (3a^3 \xi^2 + B\psi) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0. \quad (\text{A13})$$

上述方程中包含了速度和温度的影响.

对于大 Pr 数, 热对流的温度边界层嵌入在速度边界层内, 流动速度变化假设为线性, 即 $\langle u \rangle \propto z$. 化简后可以得到

$$\psi \approx b\xi^2, \quad (\text{A14})$$

其中 b 为常数, 将 (A14) 式代入方程 (A13) 中, 并令 $c = bB/(3a^3) + 1$, 方程 (A13) 的解为

$$\theta(\xi) = \int_0^\xi (1 + a^3 \eta)^{-c} d\eta. \quad (\text{A15})$$

将边界条件 $\theta(\infty) = 1$ 代入 (A15) 式中, 得到常数 a 与常数 c 的关系为

$$a = \frac{\Gamma(1/3) \Gamma(c - 1/3)}{3\Gamma(c)}. \quad (\text{A16})$$

(A15) 式和 (A16) 式称为考虑脉动影响的单参数理论剖面公式.

参考文献

[1] Ahlers G, Grossmann S, Lohse D 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 503
 [2] Grossmann S, Lohse D 2000 *J. Fluid Mech.* **407** 27

[3] Grossmann S, Lohse D 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3316
 [4] Lui S L, Xia K Q 1998 *Phys. Rev. E* **57** 5494
 [5] Zhou Q, Xia K Q 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 104301
 [6] Ahlers G, Bodenschatz E, Funfschilling D, Grossmann S, He X Z, Lohse D, Stevens R J A M, Verzicco R 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 114501
 [7] Wei P, Ahlers G 2014 *J. Fluid Mech.* **758** 809
 [8] Ahlers G, Bodenschatz E, He X 2014 *J. Fluid Mech.* **758** 436
 [9] Zhou Q, Stevens R J A M, Sugiyama K, Grossmann S, Lohse D, Xia K Q 2010 *J. Fluid Mech.* **664** 297
 [10] Zhou Q, Sugiyama K, Stevens R J, Grossmann S, Lohse D, Xia K Q 2011 *Phys. Fluids* **23** 125104
 [11] Stevens R J A M, Zhou Q, Grossmann S, Verzicco R, Xia K Q, Lohse D 2011 *Phys. Rev. E* **85** 027301
 [12] Shishkina O, Horn S, Wagner S 2013 *J. Fluid Mech.* **730** 442
 [13] Shishkina O, Horn S, Wagner S, Ching E S C 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 114302
 [14] Shishkina O, Horn S, Emran M S, Ching E S C 2017 *Phys. Rev. Fluids* **2** 113502
 [15] He P, Huang M J, Bao Y 2018 *Sci. Sin.-Phys. Mech. Astron.* **48** 124702 (in Chinese) [何鹏, 黄茂静, 包芸 2018 中国科学: 物理学 力学 天文学 **48** 124702]
 [16] Huang M J, Bao Y 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 204702 (in Chinese) [黄茂静, 包芸 2016 物理学报 **65** 204702]
 [17] Wang Y, He X Z, Tong P 2016 *Phys. Rev. Fluids* **1** 082301
 [18] Bao Y, Gao Z Y, Ye M X 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 014701 (in Chinese) [包芸, 高振源, 叶孟翔 2018 物理学报 **67** 014701]
 [19] Bao Y, Luo J H, Ye M X 2018 *J. Mech.* **34** 159
 [20] Sun C, Xia K Q 2005 *Phys. Rev. E* **72** 067302
 [21] Bao Y, He J C, Gao Z Y 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 164701 (in Chinese) [包芸, 何建超, 高振源 2019 物理学报 **68** 164701]

Two-parameter fitting of temperature profile and its characteristics in turbulent convection*

Fang Ming-Wei He Jian-Chao Bao Yun[†]

(School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275, china)

(Received 12 January 2020; revised manuscript received 5 May 2020)

Abstract

The two-dimensional thermal convection with three- Pr series Ra number is calculated by using the highly efficient parallel DNS method. The two-parameter temperature boundary layer theory, with the pulsation influence taken into account, is used to fit the temperature boundary layer profile for the field averaged over all calculations. The distributions of the fitted parameters a and c are obtained. Parameter a determines the basic characteristics of the temperature profile, and parameter c plays a role in correcting the outer area of the temperature profile. Therefore, the simulation results of the temperature boundary layer profile is well matched with the theoretical solution in the 5 boundary layers. The variation characteristic of parameter c is the opposite to that of parameter a , and the c value decreases as the a value increases. The fitting parameters for the different Pr numbers have different distribution characteristics as the Ra number changes, but they have all suddenly decreasing interruptions, and as the Pr number becomes large, the characteristic Ra number for the interruption increases. The variation characteristic of parameter c is the opposite to that of parameter a . With the same Ra number, the larger the Pr number, the smaller the fitting parameter of the temperature profile is, indicating that the influence of pulsation in the temperature boundary layer is smaller. The heat transfer characteristic $Nu/Ra^{0.3}$, the large-scale circulation path circumference for the characteristics of plume movement, and the temperature boundary layer fitting parameter all have the interruptions with the change of Ra number, and their corresponding characteristic Ra numbers are identical. The results show that the three have good correlation and are directly related to the change of flow pattern.

Keywords: 2-dimensional turbulent convection, thermal boundary layer profile, interruption characteristics, heat transfer characteristics, large scale circulation path circumference

PACS: 47.27.te

DOI: 10.7498/aps.69.20200073

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11772362).

[†] Corresponding author. E-mail: stsby@mail.sysu.edu.cn