

# 基于多尺度熵的 Duffing 混沌系统阈值确定方法\*

黄泽徽 李亚安<sup>†</sup> 陈哲 刘恋

(西北工业大学航海学院, 西安 710072)

(2019 年 10 月 28 日收到; 2020 年 4 月 27 日收到修改稿)

熵是热力学中表征物质状态的参量之一, 是体系混乱程度的度量. 一个信号的熵可以用来表示信号的复杂度. Duffing 混沌系统从临界混沌状态向大尺度周期状态跃变的阈值是混沌系统分析的一个重要参数, 它的求解方法是混沌理论目前亟待解决的问题之一. 然而传统的实验分析法或者定量分析法存在一定的局限性. 本文在研究中发现, 系统处于混沌态和周期态时输出的多尺度熵值存在较大差异, 且当系统进入周期态后多尺度熵值趋于平稳, 基于这一现象结合遗传算法提出了基于多尺度熵的 Duffing 混沌系统阈值确定方法. 利用该方法对正弦信号和方波信号的检测系统跃变阈值进行了计算, 结果表明该方法快速准确且计算简单.

**关键词:** 微弱信号检测, Duffing 系统, 多尺度熵, 遗传算法

**PACS:** 05.45.-a, 43.60.+d

**DOI:** 10.7498/aps.69.20191642

## 1 引言

混沌系统的初值敏感性和噪声免疫性使它在微弱信号检测领域得到了广泛的关注, 为微弱信号的检测提供了新的思路. 美国的 Birx 博士在他的博士论文中最先提出将混沌理论应用于弱信号的检测. 王冠宇等<sup>[1]</sup> 在国外学者研究工作的基础上, 利用 Duffing 振子对白噪声背景下的微弱正弦信号进行了检测研究, 实现了对频率已知的待测信号幅值的估计, 检测信噪比可以达到 -26 dB, 推动了信号检测领域的发展. 李月等<sup>[2-5]</sup> 研究了强噪声下混沌振子对微弱正弦信号、方波信号的检测, 色噪声背景下混沌振子对微弱正弦信号、方波信号的检测, 指出混沌振子系统对零均值噪声具有很强的免疫力. 之后大量学者对 Duffing 检测系统进行改进, 赖智慧等<sup>[6]</sup> 对基于 Homles-Duffing 振子的混沌检测进行了改进, 提出变尺度微弱信号检测方法; 丛超等<sup>[7]</sup> 提出了一种基于适应步长型间歇混沌振子

的信号检测方法, 用一个振子系统可以实现对任意频率任意相位的微弱周期信号的搜索检测; 牛德智等<sup>[8]</sup> 针对同频微弱信号检测时存在的盲区, 提出了一种策动力移相法予以消除; 陈志光等<sup>[9]</sup> 利用间歇混沌现象对频率未知信号进行检测并取得较好的效果; 时培明等<sup>[10]</sup> 提出了一种基于双耦合 Duffing 混沌振子与变尺度相结合的微弱信号检测新方法, 将其用于检测任意多频微弱信号具有明显优势. 通过大量学者的不懈努力, Duffing 检测不断趋于成熟.

Duffing 混沌系统提供了与传统方法不同的检测途径, 在实际应用中, 混沌系统跃变阈值的确定是利用 Duffing 系统准确进行微弱信号检测的关键, 但是传统的时序图方法不利于计算机的自动处理. Lyapunov 指数法算法复杂, 且容易受到噪声的影响. 近年来有大量学者对阈值求解方法进行了研究, 提出了相图分割法<sup>[11]</sup>、二分法<sup>[12]</sup>、0-1 方法<sup>[13,14]</sup>、基于庞加莱界面的定量判别方法<sup>[15]</sup> 等来计算混沌系统跃变阈值, 但仍具有一定的局限性. 本文将熵

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11874302, 11574250) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: liyaan@nwpu.edu.cn

引入到阈值求解,熵可以用来表征信号复杂度,已有不少学者利用熵对信号复杂度进行分析,梁涤青等<sup>[16]</sup>利用小波包能量熵来判断混沌序列的复杂度;杨孝敬等<sup>[17]</sup>利用模糊近似熵对磁共振信号复杂度进行分析;陈祥龙等<sup>[18]</sup>利用多尺度样本熵对压缩机工作时的振动信号进行了分析;王鸿姍等<sup>[19]</sup>利用小波包样本熵通过分析声信号的复杂度进行异常音提取.本文发现 Duffing 系统在不同状态下多尺度熵的明显差别,利用这一现象通过分析系统多尺度熵与策动力幅值的变化关系,提出一种基于多尺度熵的 Duffing 混沌系统跃变阈值确定方法,并通过仿真计算说明其可行性.

## 2 Duffing 混沌系统微弱信号检测原理

Duffing 振子检测系统模型为:

$$\begin{cases} \dot{x} = w \times y, \\ \dot{y} = w \times [-ky + x - x^3 + (r+h) \cos(\omega t) + z], \end{cases} \quad (1)$$

其中  $k$  是阻尼比;  $x-x^3$  是非线性恢复力;  $r \cos(\omega t)$  是周期性策动力,  $r$  是策动力幅值,  $h$  是目标信号的幅值,  $w$  是待测信号的频率,  $z$  为白噪声.

调节策动力幅值使  $r$  从 0 逐渐增大,系统将会遍历同宿轨道状态、分叉状态、混沌状态、临界混沌状态,当  $r$  大于某一值  $r_d$  时,系统由临界混沌状态进入大尺度周期状态,相轨迹图将发生明显的变化,如图 1 所示,其中  $r_d$  便是本文所求解的混沌系统跃变阈值.使用 Duffing 混沌系统检测微弱信号正是基于这一跃变现象:将系统的策动力幅值  $r$  调为  $r_d$ ,再将待测信号添加到系统,观察待测信号添加前后系统的相轨迹是否发生跃变,如果发生了跃变则说明待测信号中有目标信号的存在.可知利用这一现象检测微弱信号时,跃变阈值的确定非常关键,跃变阈值选取过小,将会严重影响到系统的检测信噪比;跃变阈值选取过大,会导致系统状态发生跃变,造成对检测结果的误判.

现有计算混沌系统跃变阈值的方法存在一定的局限性,直观的相轨迹分析方法简单直观、判别方便并且不需要复杂的计算,但是该方法受到诸多因素的影响,并且在判别过程中会受到实验人员主观因素的影响,精度低误差大;Melnikov 和 Shilnikov 方法可以计算 Duffing 系统的混沌范围,但是都只能说明当策动力幅值处于这个范围时,系统可能处

于混沌状态,而不能确定系统一定处于混沌状态;Lyapunov 指数用来度量动力学性态的规则性程度,描述了系统轨迹收敛或发散的比率,但是精确的 Lyapunov 指数难以得到且容易受到噪声的影响.为此本文基于多尺度熵提出一种简单有效的计算系统跃变阈值的方法.

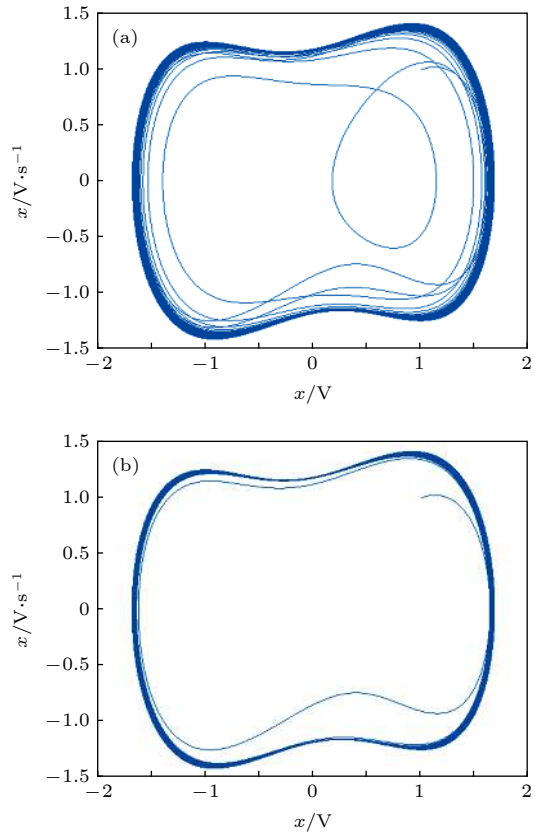


图 1 系统状态跃变 (a) 临界混沌状态; (b) 周期状态  
Fig. 1. System state transition: (a) System state transition; (b) periodic state.

## 3 基于多尺度熵的混沌系统跃变阈值确定方法

熵是系统混乱或无序程度的度量,系统混乱或者无序的程度越高,熵值越大,反之越小.分析熵值随策动力幅值变化关系后发现,系统由混沌状态进入周期状态后,系统熵值明显变小且趋于平稳,本文利用该现象基于多尺度熵 (multi-scale sample entropy, MsEn) 来求解系统跃变阈值.

### 3.1 多尺度熵算法

多尺度样本熵 (MsEn) 用于描述在不同尺度上时间序列的无规则程度,包含参数  $m, s, \tau$ , 其中

$m$  是嵌入维数,  $s$  是相似系数,  $\tau$  是尺度因子. 多尺度样本熵由两部分构成: 一是对输入的时间序列按照尺度  $\tau$  进行粗细化操作得到新的时间序列; 二是计算尺度  $\tau$  下新时间序列的样本熵 (sample entropy, SampEn). 具体步骤为<sup>[20]</sup>:

**步骤 1** 对原始时间序列按照尺度  $\tau$  进行粗细化操作

假定有一离散时间序列  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_M$  共有  $M$  个点, 在尺度为  $\tau$  时对时间序列进行粗-断点变换得到新的时间序列为:

$$y_j^{(\tau)} = \frac{1}{\tau} \sum_{i=(j-1)\tau+1}^{j\tau} x(i), \quad (2)$$

经过粗-断点变换后得到的新时间序列长度为  $N = M/\tau$ .

**步骤 2** 计算尺度  $\tau$  下新时间序列的样本熵

1) 将新的时间序列从  $\mathbf{Y}^{(\tau)}(1)$  到  $\mathbf{Y}^{(\tau)}(N-m+1)$  组成一组  $m$  维矢量, 第  $i$  个矢量  $\mathbf{Y}^\tau(i)$  为:

$$\mathbf{Y}^\tau(i) = [y^\tau(i), y^\tau(i+1), \dots, y^\tau(i+m-1)], \quad (3)$$

式中  $i = 1 \sim N-m+1$ .

2) 定义  $d[\mathbf{Y}^\tau(i), \mathbf{Y}^\tau(j)]$  为矢量  $\mathbf{Y}^\tau(i)$  与矢量  $\mathbf{Y}^\tau(j)$  对应元素中差值最大的一个, 即:

$$d[\mathbf{Y}^\tau(i), \mathbf{Y}^\tau(j)] = \max |y^\tau(i+k-1) - y^\tau(j+k-1)|, \quad (4)$$

式中  $k = 0 \sim m-1, i, j = 1 \sim N-m+1$ .

3) 给出相似系数  $s$ , 计算  $d[\mathbf{Y}^\tau(i), \mathbf{Y}^\tau(j)] \leq s$  的数目  $D_i$ , 及该数目与总的矢量数目  $N-m$  的比值, 记作  $D_i^{\tau,m}(s)$ :

$$D_i^{\tau,m}(s) = \frac{D_i}{N-m}. \quad (5)$$

对所有  $D_i^{\tau,m}(s)$  求平均得到  $D^{\tau,m}(s)$  为

$$D^{\tau,m}(s) = \frac{1}{N-m+1} \sum_{i=1}^{N-m+1} D_i^{\tau,m}(s). \quad (6)$$

4) 将嵌入维数变成  $m+1$ , 重复前面的过程, 得到  $D_i^{\tau,m+1}(s)$  和  $D^{\tau,m+1}(s)$ :

$$D_i^{\tau,m+1}(s) = \frac{D_i}{N-m-1}, \quad (7)$$

$$D^{\tau,m+1}(s) = \frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^{N-m} D_i^{\tau,m+1}(s). \quad (8)$$

5) 时间序列为有限长时, 得到在尺度  $\tau$  下的样本熵为

$$\text{SampEn}(m, s, \tau) = -\ln[D^{\tau,m+1}(s)/D^{\tau,m}(s)]. \quad (9)$$

对原始时间序列计算每个尺度  $\tau$  所对应的样本熵值, 得到多尺度样本熵的计算公式为

$$\begin{aligned} \text{MsEn} &= \{ \tau | \text{SampEn}(m, s, \tau) \\ &= -\ln[D^{\tau,m+1}(s)/D^{\tau,m}(s)] \}. \end{aligned} \quad (10)$$

### 3.2 阈值求解

研究中发现系统混沌态和周期态输出的时间序列多尺度熵值明显不同, 且当系统进入周期态后, 系统输出序列的多尺度熵趋于平稳, 基于此通过描述系统多尺度熵值随策动力幅值变化情况可以确定系统跃变阈值.

#### 3.2.1 方波信号检测系统跃变阈值求解

求解方波信号检测系统的跃变阈值, 系统所采用检测方程为:

$$\begin{cases} \dot{x} = w \times y, \\ \dot{y} = w \times [ky + x - x^3 + (r+h)g(w \times t) + z]. \end{cases} \quad (11)$$

取  $w = 1 \text{ rad/s}$ ,  $k = 0.5$ , 初值  $x_0 = (1, 1)$ , 时间序列长度  $N = 30000$ , 尺度因子  $\tau = 10$ , 嵌入维数  $m = 2$ , 相似容限  $s = 0.1 SD_x$  (时间序列标准差), 分析多尺度熵值随策动力幅值  $r$  变化情况如图 2 所示. 对图 2 进行分析可知, 系统策动力幅值  $r \leq 0.605$ , 多尺度熵值较大且会随着策动力幅值  $r$  波动,  $r > 0.605$  后多尺度熵值趋于平稳且较之前明显变小, 根据熵的含义及系统变化规律可以判定  $r > 0.605$  后系统处于周期状态, 所以确定该系统的跃变阈值为  $r_d = 0.605$ . 注意在  $r = 0.603$  时, 系统多尺度熵值为极小值, 如果只以熵值的大小作为评

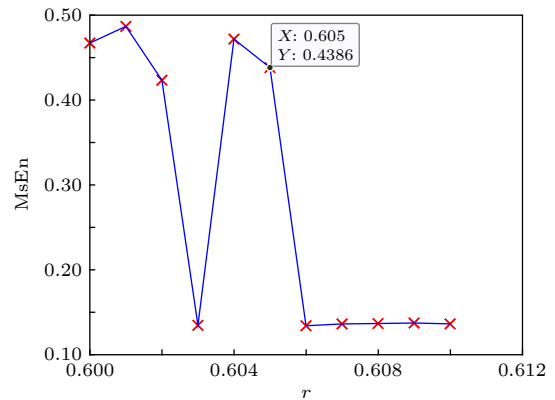


图 2 方波信号检测系统多尺度熵变化情况

Fig. 2. Variation of multi-scale entropy in square wave signal detection system.

判标准, 忽略平稳性的评判, 会认为此时系统已处于周期状态, 但从图中可以看到此时系统熵值并未趋于平稳, 在之后系统的熵值仍在波动, 所以仅根据熵值大小来求解阈值并不准确. 对该系统进行仿真实验, 通过分析系统相轨迹图对比该方法计算结果的准确性, 结果如图 3 所示, 策动力幅值  $r = 0.605$  时系统处于左图所示的混沌状态, 幅值增加到 0.606 时系统便跃变至右图所示的周期状态, 通过仿真实验确定的系统跃变阈值为 0.605, 多尺度熵方法所求结果与其一致. 可见, 多尺度熵方法可以准确确定方波信号检测系统跃变阈值.

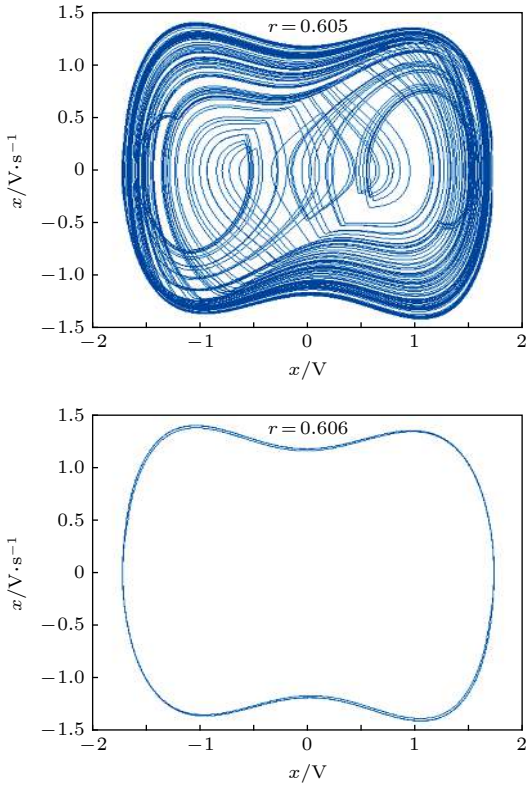


图 3 仿真实验求解方波信号检测系统阈值

Fig. 3. Simulation experiment to solve the threshold of square wave signal detection system.

### 3.2.2 正弦信号检测系统跃变阈值求解

求解正弦信号检测系统的跃变阈值, 利用 Duffing 系统 (1) 式, 取  $w = 1 \text{ rad/s}$ ,  $k = 0.5$ , 初值  $x_0 = (1, 1)$ , 对于多尺度熵算法取时间序列长度  $N = 30000$ , 尺度因子  $\tau = 10$ , 嵌入维数  $m = 2$ , 相似容限  $s = 0.1SD_x$ , 分析该系统多尺度熵值随策动力幅值  $r$  变化情况, 结果如图 4 所示, 可知该系统的跃变阈值为  $r_d = 0.826$ . 通过图 5 所示的仿真

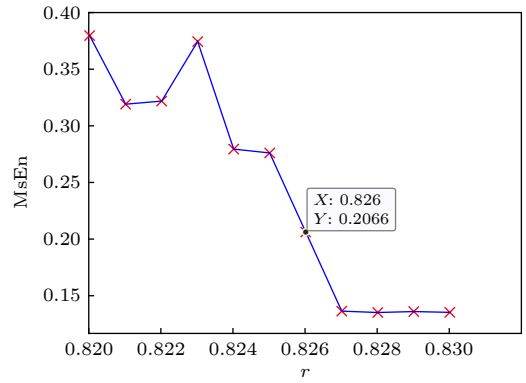


图 4 正弦信号检测系统多尺度熵变化情况

Fig. 4. Variation of multi-scale entropy in sinusoidal signal detection system.

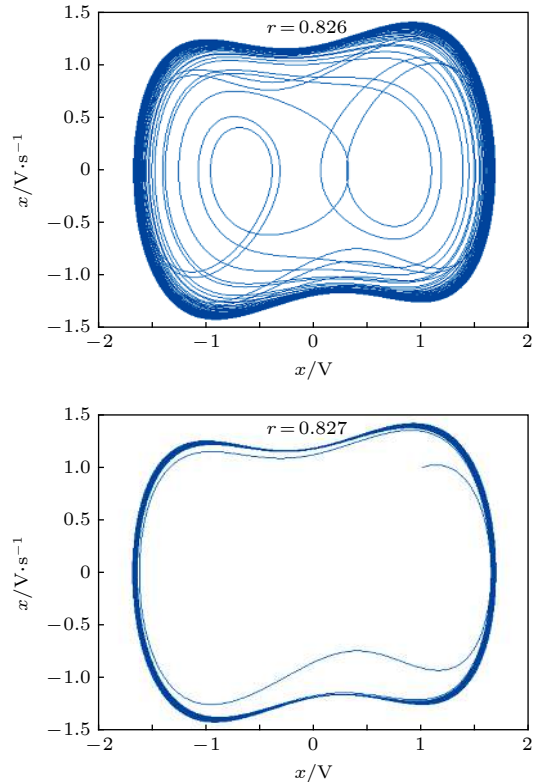


图 5 仿真实验求解正弦信号检测系统阈值

Fig. 5. Simulation experiment to solve the threshold of sinusoidal signal detection system.

实验可以确定该系统的阈值为 0.826, 与多尺度熵方法所求结果一致.

### 3.2.3 真实信号检测系统跃变阈值求解

为了验证多尺度熵方法对真实信号检测系统的阈值求解效果, 选取一组真实的舰船信号作为样本数据, 真实待检测信号的波形如图 6 所示, 频域波形如图 7 所示, 分析可知真实水声信号包含频率为 50.27 Hz 的正弦信号. 在系统中内置频率为

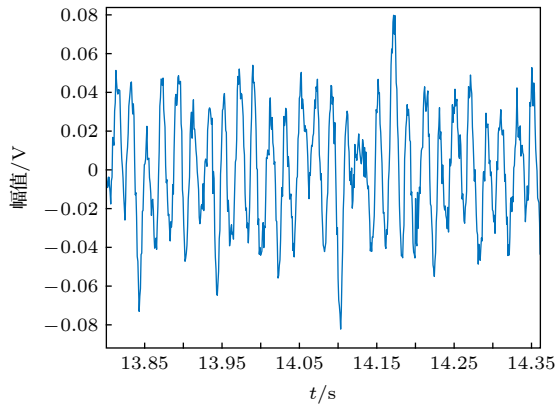


图 6 真实水声信号

Fig. 6. Real underwater acoustic signal.

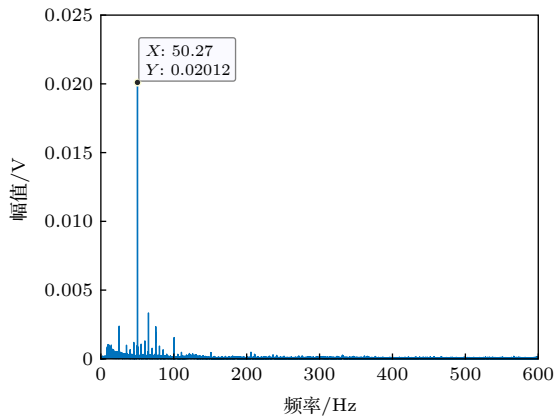


图 7 真实水声信号频谱

Fig. 7. Spectrum of real underwater acoustic signals.

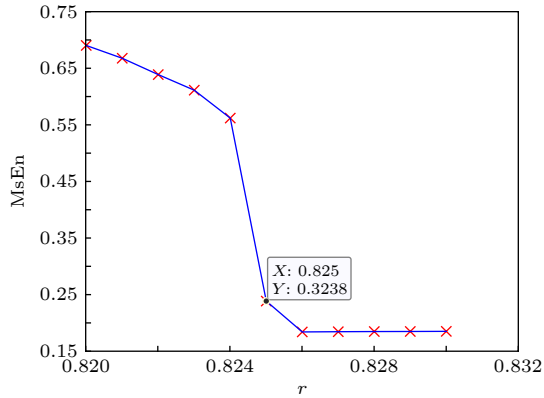


图 8 真实信号检测系统多尺度熵值变化情况

Fig. 8. Changes in multi-scale entropy of real signal detection system.

50.27 Hz 的正弦信号, 求得该系统阈值为  $r_d = 0.825$ , 结果如图 8 所示, 进行仿真实验也得到  $r_d = 0.825$  的阈值, 如图 9 所示。

将策动力幅值  $r$  调节至 0.825, 也即使系统处于临界混沌状态, 将真实水声信号加入检测系统, 系统相轨迹图由图 10(a) 所示混沌状态跃变至

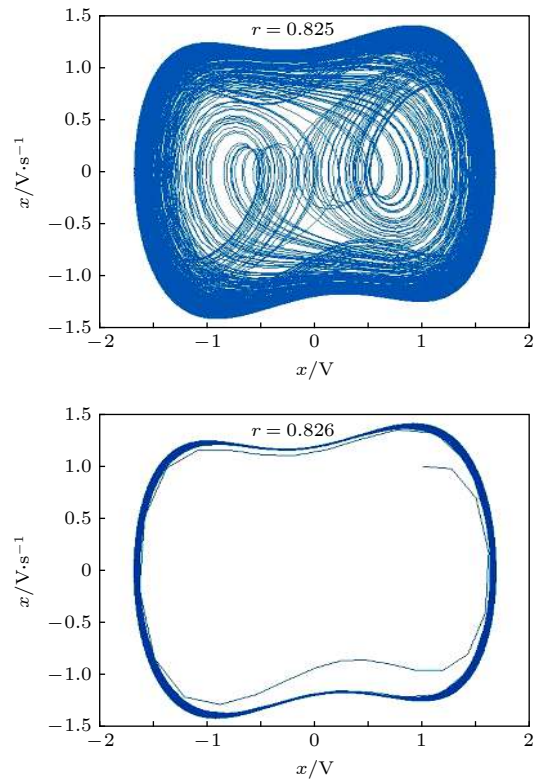


图 9 仿真实验求解真实水声信号检测系统阈值

Fig. 9. Simulation experiment to solve the threshold of real underwater acoustic signal detection system.

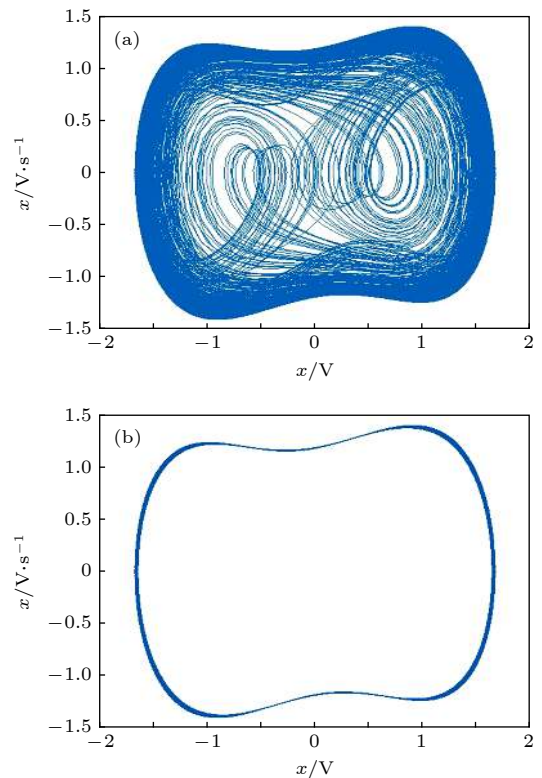


图 10 对真实水声信号的检测 (a) 系统未添加真实信号; (b) 系统添加真实信号

Fig. 10. Detecting real underwater acoustic signals: (a) The system did not add a real signal; (b) system adds real signal.

图 10(b) 所示周期状态, 成功实现对实测水声信号中目标信号的检测. 所以多尺度熵方法可以很准确地计算系统阈值.

#### 4 最大多尺度熵算法

利用系统 (1) 将频率参数改为 5 rad/s, 其他

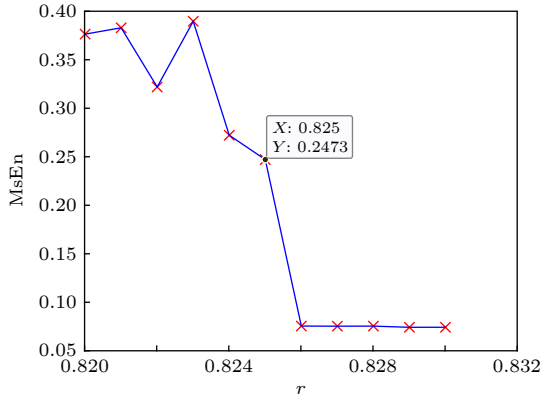


图 11 5 rad/s 正弦信号检测系统多尺度熵变化情况  
Fig. 11. Variation of multi-scale entropy in 5 rad/s sinusoidal signal detection system.

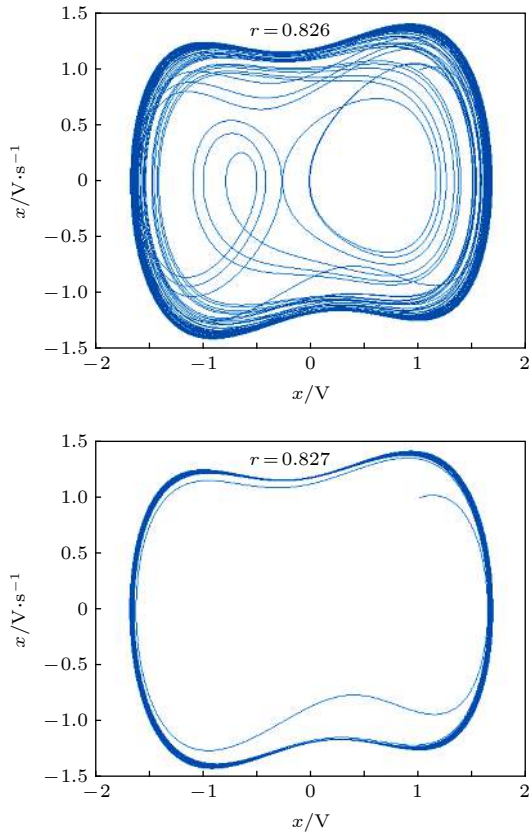


图 12 仿真实验求解 5 rad/s 正弦信号检测系统跃变阈值  
Fig. 12. Simulation experiment to solve the threshold of 5 rad/s sinusoidal signal detection system.

参数不变, 得到多尺度熵变化情况如图 11 所示, 分析可知多尺度熵方法求得系统阈值为  $r_d = 0.825$ . 进行仿真实验, 仿真结果如图 12 所示, 可知仿真实验求得的系统阈值为  $r_d = 0.826$ , 与多尺度熵方法求解结果有偏差, 说明多尺度熵方法存在一定问题.

我们分析是时间序列段的随机选取造成了阈值计算的偏差, 第三部分中计算采用的时间序列是在整个 Duffing 序列中随机选取的长度为 30000 的子序列段, 在一般状态下随机选取的子序列段可以代表整个时间序列的复杂度, 但是当系统在接近或处于临界混沌状态时会有部分序列段已经处于周期状态, 如图 13 所示, 该状态下随机选取的时间序列段不能代表整个时间序列的状态.

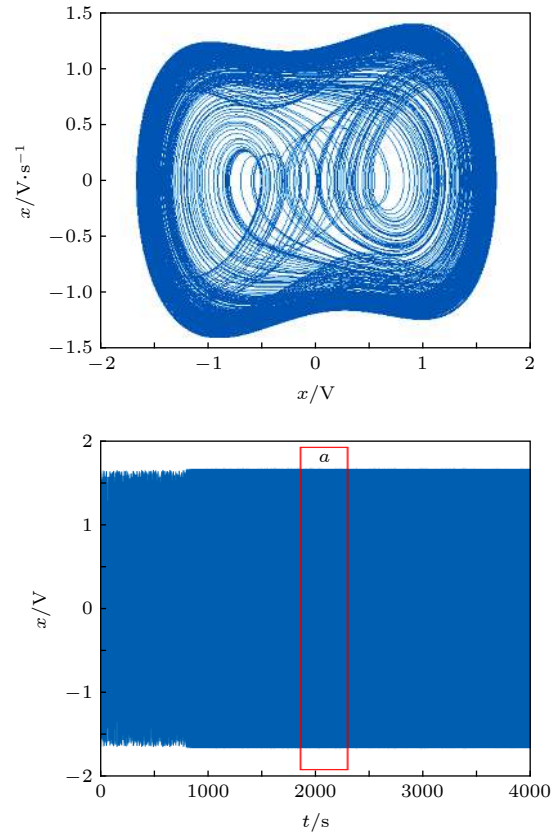


图 13 系统临界混沌状态  
Fig. 13. Critical chaotic state of the system.

图 13 表示系统正处于混沌状态, 但右图中  $a$  段序列为周期序列, 取用  $a$  序列进行多尺度熵计算会得到较小熵值, 误认为系统已经进入周期状态, 导致所求系统跃变阈值偏小, 这便是在前述计算中多尺度熵方法计算结果与仿真实验计算结果存在偏差且偏小的原因. 针对这一现象考虑在整个

序列中寻找复杂度最大的子序列及其对应的多尺度熵值,用复杂度最大的子序列代表整个时间序列,当系统复杂度最大的子序列对应的熵值处于较小值且趋于平稳时,则系统必定已经进入周期状态,可更加精确计算系统阈值.为此引入遗传算法,利用遗传算法寻找 Duffing 序列最大多尺度熵.

### 4.1 遗传算法

遗传算法 (genetic algorithm, GA) 是基于生物的自然选择和遗传机理而形成的一种全局寻优算法,其本质是一种基于概率的随机搜索算法.一般认为 GA 的计算流程为<sup>[20]</sup>:

- 1) 问题解的遗传表示;
- 2) 产生初始染色体;
- 3) 设计适应度函数,根据适应值对个体进行优劣判断;
- 4) 进行选择操作,选出适应值高的染色体,使它们成为新一代种群中的染色体;
- 5) 对新种群进行交叉操作,产生新的染色体;
- 6) 进行变异操作,避免算法陷入局部最优解的情况;
- 7) 对新的种群重复进行选择、交叉、和变异操作;
- 8) 经过给定次数的迭代或满足给定的条件后,把最好的染色体作为优化问题的最优解.

### 4.2 最大多尺度熵算法步骤

基于遗传算法的思想,本文提出一种最大多尺度熵算法,算法具体步骤为:

- 1) 利用 Duffing 系统方程迭代产生一组时间序列  $\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_m]$ ,将  $\mathbf{X}$  作为一个种群,时间序列的长度为  $m$ ;
- 2) 将  $\mathbf{X}$  分成  $l$  个染色体,分别为  $CC = [C_1, C_2, C_3, \dots, C_l]$ ,每个染色体的长度为  $n$ ,染色体的数目  $l = m/n$ .  $CC$  中前  $i$  个染色体构成的种群  $C = [C_1, C_2, C_3, \dots, C_i]$  作为算法的初始种群,循环次数为  $N = l - i$ ;
- 3) 选取多尺度样本熵作为适应度函数,通过计算种群中每个染色体的多尺度样本熵值来判断各个染色体的优劣,作为选择的依据;
- 4) 对初始种群  $C = [C_1, C_2, C_3, \dots, C_i]$  进行适应度测试,计算每个染色体的适应度值,得到种群中每个染色体所对应的适应度值分别为  $M = [M_1, M_2, M_3, \dots, M_i]$ ;

5) 按照得到的适应度值,从大到小对染色体进行排序,重新排序后得到的种群为  $C' = [C'_1, C'_2, C'_3, \dots, C'_i]$ ,对应的适应度值为  $M' = [M'_1, M'_2, M'_3, \dots, M'_i]$ .对重新排序后的种群  $C'$  按照随机数  $w$  ( $0 < w < n$ ) 进行交叉操作,使用参数  $g$  ( $0 < g < i/2$ ) 来控制交叉次数.  $C'_i$  由  $C_{i+1}$  替换完成淘汰工作;

6) 得到由  $i$  个新的染色体组成的种群  $C'' = [C''_1, C''_2, C''_3, \dots, C''_i]$ ,返回到步骤 (4) 进行循环迭代计算,直到满足循环条件;

7) 得到 Duffing 时间序列中熵值最大的子序列及其对应的熵值.

#### 4.2.1 最大多尺度熵算法有效性

第三部分 5 rad/s 正弦信号检测系统中,策动力幅值  $r = 0.826$ ,系统处于混沌状态,多尺度熵方法求得  $MsEn = 0.0778$ ,利用最大多尺度熵算法计算  $r = 0.826$  时 Duffing 序列最大多尺度熵值,取 Duffing 序列长度为 400000,每个子序列长度为 30000,初始染色体个数为 6,交叉点为随机数,每次循环淘汰的染色体数目为 1,循环结束后得到 6 个复杂度较大的子序列段,其对应的熵值结果如表 1 所列.

表 1 Duffing 子序列段熵值 ( $r = 0.826$ )  
Table 1. Entropy value of the Duffing subsequence segment ( $r = 0.826$ ).

序列	1	2	3	4	5	6
MsEn	0.1188	0.0779	0.0768	0.0796	0.0766	0.0780

分析表 1 可知,程序经过遗传进化找到了 4 组熵值大于 0.0778 的混沌子序列,最大多尺度熵值为 0.1188.  $r = 0.827$  时,系统处于周期状态,多尺度熵方法求得  $MsEn=0.0754$ ,利用最大多尺度熵算法计算  $r = 0.827$  时 Duffing 子序列熵值,结果如表 2 所列.

表 2 Duffing 子序列段 MsEn 值 ( $r = 0.827$ )  
Table 2. Entropy value of the Duffing subsequence segment ( $r = 0.827$ ).

序列	1	2	3	4	5	6
MsEn	0.0820	0.0822	0.0802	0.0790	0.0777	0.0753

从表 2 中看到,经过遗传进化找到了 5 组大于 0.0754 的子序列,最大 MsEn 为 0.0822,但因  $r = 0.827$  时系统已经处于周期状态,所求结果与

多尺度熵方法所求结果相差不大. 结合表 1 和表 2 可以知道, 最大多尺度熵算法可以很有效地寻找到复杂度较大的子序列, 得到最大多尺度熵, 可更加精确地求解系统的跃变阈值.

针对 5 rad/s 正弦信号检测系统的偏差问题, 现用最大多尺度熵方法求该系统阈值, 分析偏差是否仍旧存在. 取 Duffing 序列长度为 400000, 每个子序列长度为 30000, 初始染色体数目为 6, 交叉点为随机数, 结果如图 14 所示, 分析可以确定系统跃变阈值为 0.826, 与图 12 仿真实验所求阈值 0.826 相同, 所以最大多尺度熵方法可以很好地解决序列段的选取问题, 准确求解系统跃变阈值.

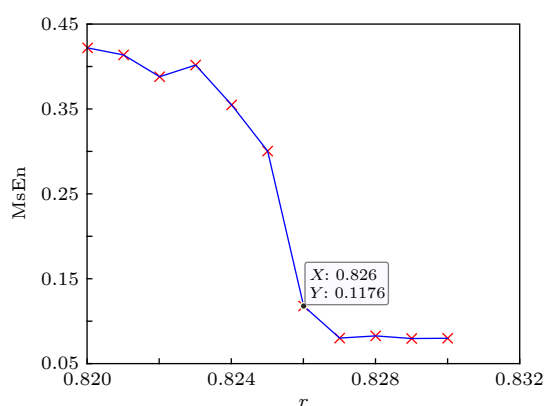


图 14 5 rad/s 正弦信号检测系统最大多尺度熵变化情况  
Fig. 14. Variation of maximum multi-scale entropy of 5 rad/s sinusoidal signal detection system.

## 5 结 论

本文针对 Duffing 系统跃变阈值难以确定这一问题进行了研究, 首次提出利用 Duffing 系统周期态和混沌态多尺度熵值差异明显这一现象, 通过分析多尺度熵与策动力幅值的关系对阈值进行求解, 对于该方法存在的问题, 结合遗传算法进行了改进, 通过对正弦信号与方波信号检测系统的阈值求解, 证明该方法可以快速准确得到系统跃变阈值, 解决了阈值难以快速准确得到的问题, 为混沌振子检测低信噪比信号的实际应用奠定了很好的基础.

## 参考文献

[1] Wang G Y, Tao G L, Chen X, Lin J Y 1997 *Chinese Journal*

*Of Scientific Instrument* **18** 98 (in Chinese) [王冠宇, 陶国良, 陈行, 林建亚 1997 仪器仪表学报 **18** 98]

[2] Li Y, Yang B J, Shi Y W, Zhang Z B, Yu G M 2001 *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis JiLinensis* **1** 75 (in Chinese) [李月, 杨宝俊, 石要武, 张忠彬, 于功梅 2001 吉林大学自然科学学报 **1** 75]

[3] Li Y, Yang B J, Shi Y W, Zhang Z B, Yu G M 2001 *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis JiLinensis* **2** 65 (in Chinese) [李月, 杨宝俊, 石要武, 张忠彬, 于功梅 2001 吉林大学自然科学学报 **2** 65]

[4] Li Y, Yang B J, Shi Y W 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 526 (in Chinese) [李月, 杨宝俊, 石要武 2003 物理学报 **52** 526]

[5] Li Y, Lu P, Yang B J, Zhao X P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1672 (in Chinese) [李月, 路鹏, 杨宝俊, 赵雪平 2006 物理学报 **55** 1672]

[6] Lai Z H, Leng Y G, Sun J Q, Fan S B 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 050503 (in Chinese) [赖志慧, 冷永刚, 孙建桥, 范胜波 2012 物理学报 **61** 050503]

[7] Cong C, Li X K, Song Y 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 064301 (in Chinese) [丛超, 李秀坤, 宋扬 2014 物理学报 **63** 064301]

[8] Niu D Z, Chen C X, Ban F, Xu H X, Li Y B, Wang Z, Ren X Y, Chen Q 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 060503 (in Chinese) [牛德智, 陈长兴, 班斐, 徐浩翔, 李永宾, 王卓, 任晓岳, 陈强 2015 物理学报 **64** 060503]

[9] Chen Z G, Li Y A, Chen X 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 200502 (in Chinese) [陈志光, 李亚安, 陈晓 2015 物理学报 **64** 200502]

[10] Shi P M, Sun Y L, Han D Y 2016 *Acta Metrologica Sinica* **37** 310 (in Chinese) [时培明, 孙彦龙, 韩东颖 2016 计量学报 **37** 310]

[11] Gao Z B, Sun Y M, Li J C 2015 *Journal Of Hebei University of Technology* **44** 23 (in Chinese) [高振斌, 孙月明, 李景春 2015 河北工业大学学报 **44** 23]

[12] Sun J, Wang B, Ye J M 2016 *Research And Exploration In Laboratory* **35** 86 (in Chinese) [张菁, 王斌, 叶家敏 2016 实验室研究与探索 **35** 86]

[13] Gottwald G A, Melbourne I 2004 *Physica D* **212** 100

[14] Gottwald G A, Melbourne I 2009 *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **8** 129

[15] Lin X Y, Chen C X, Ling F Y, Huang J Y 2019 *Journal of Air Force Engineering University(Natural Science Edition)* **20** 86 (in Chinese) [蔺向阳, 陈长兴, 凌云, 黄继尧 2019 空军工程大学学报(自然科学版) **20** 86]

[16] Liang D Q, Chen Z G, Deng X H 2015 *Acta Electronica Sinica* **43** 1972 (in Chinese) [梁涤青, 陈志刚, 邓小鸿 2015 电子学报 **43** 1972]

[17] Yang X J, Yang y, Li H Z, Zhong N 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 218701 (in Chinese) [杨孝敬, 杨阳, 李淮周, 钟宁 2016 物理学报 **65** 218701]

[18] Chen X L, Zhang B Z, Feng F Z, Jiang P C 2018 *Journal of Vibration Engineering* **31** 902 (in Chinese) [陈祥龙, 张兵志, 冯辅周, 江鹏程 2018 振动工程学报 **31** 902]

[19] Wang H S, Zhou J L, Fang Q C 2019 *Journal of Xi'an Polytechnic University* **32** 57 (in Chinese) [王鸿珊, 周静雷, 房乔楚 2019 西安工程大学学报 **32** 57]

[20] Xu W 2017 *Ph. D. Dissertation* (Haerbin: HeiLongJiang University) (in Chinese) [徐为 2017 博士学位论文 (哈尔滨: 黑龙江大学)]



# Threshold determination method of Duffing chaotic system based on multi-scale entropy\*

Huang Ze-Hui   Li Ya-An<sup>†</sup>   Chen Zhe   Liu Lian

(*School of Marine, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*)

( Received 28 October 2019; revised manuscript received 27 April 2020 )

## Abstract

Entropy is one of the parameters describing the state of matter in thermodynamics, it can be used to measure the degree of confusion. The entropy of the signal can be used to express the complexity of the signal. The threshold for the transition of the Duffing chaotic system from the critical chaotic state to the large-scale periodic state is called the transition threshold. It is an important parameter for the analysis of chaotic systems, and its solution method is one of the problems urgently to be solved in chaos theory. If the jump threshold is smaller than the real threshold of the system, it will affect its detection signal-to-noise ratio. If the jump threshold is larger than the real threshold, it will cause incorrect detection results, so it is very important to accurately determine the jump threshold. In this study, we found that the multiscale sample entropy value of the Duffing system is significantly different when the system is in the chaotic state and the periodic state, when the system is in a chaotic state, the entropy value is larger, when the system is in a periodic state, the entropy value is smaller, and when the system enters the periodic state, the multiscale entropy value tends to be stable, this paper proposes to use this phenomenon to determine the transition threshold by analyzing the relationship between the entropy of the system and the amplitude of the driving force. When the entropy value is obviously smaller and tends to be stable, the corresponding driving force amplitude is the jump threshold. using this method, the jump threshold of the sinusoidal signal and square wave signal detection system is calculated, the results show that the method is fast, accurate and simple to calculate. However, this method may have a problem that the calculated threshold value is smaller than the real threshold value, our analysis is that the random selection of the subsequence used for calculation causes the calculation threshold value to be too small, so the method is improved in conjunction with genetic algorithm, using genetic algorithm to find the most complicated subsequence in the whole sequence, then this subsequence is used to solve the threshold, Through a large number of calculations and analysis, it can be seen that the problem of a small threshold is no longer present, and the improved method can obtain the jump threshold of the Duffing system very accurately.

**Keywords:** weak signal detection, Duffing system, multi-scale sample entropy, genetic algorithm

**PACS:** 05.45.-a, 43.60.+d

**DOI:** [10.7498/aps.69.20191642](https://doi.org/10.7498/aps.69.20191642)

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11874302, 11574250).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [liyaan@nwpu.edu.cn](mailto:liyaan@nwpu.edu.cn)