

周期驱动量子伊辛模型中非热统计的形成与抑制*

江璐冰 李宁轩 吉凯†

(上海师范大学物理系, 上海 200234)

(2019年10月29日收到; 2020年4月18日收到修改稿)

在一维伊辛模型基础上, 采用严格对角化方法研究孤立量子系统在周期驱动下量子微正则统计形成与抑制的条件. 研究表明用纵向磁场驱动时伊辛模型不能形成量子微正则统计, 用横向磁场驱动时可出现部分形成的趋势, 如果同时在伊辛模型内引入局域随机磁场则可完全实现. 量子微正则统计分布在系统中的形成或抑制取决于弗洛凯算符对量子系统作用的效果, 可通过信息熵定量描述, 信息熵越大则时间演化越能有效地遍历希尔伯特空间, 从而形成量子微正则统计. 这一行为是孤立量子系统可被热化的反映.

关键词: 微正则系综, 伊辛模型, 弗洛凯表象, 热化

PACS: 05.30.-d, 05.30.Ch, 75.10.Pq

DOI: 10.7498/aps.69.20191657

1 引言

近年来随着量子计算、量子模拟的迅速发展^[1,2], 以及单分子、单自旋操控水平的提高^[3,4], 孤立量子系统的统计力学性质再次引发了人们的研究热情. 在经典统计力学中, 一个孤立系统与相空间中的一个等能面对应, 它的性质可用微正则系综来描述^[5]. 而在量子统计力学中, 孤立量子系统的标准理论描述依赖于微正则密度矩阵的引入^[6]. 这个密度矩阵被限定在希尔伯特空间的一个子空间内, 该子空间的各个本征能量都落在以特征能量 E_0 为中心、宽度为 2Δ 的能量窗口内, 即在希尔伯特空间引入下面的约束条件

$$p_k = \begin{cases} \text{常数}, & E_k \in [E_0 - \Delta, E_0 + \Delta], \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad (1)$$

其中 p_k 表示第 k 个本征态的占据概率, 而 Δ 必须足够小 (但不能太小). 此约束条件是为了与经典微正则系综相比照而做的假定, 在逻辑上并没有严格的证明.

由于孤立量子系统具有确定的波函数, 近几年一种用量子纯态波函数来描述孤立量子系统的系综理论引起了人们的注意^[7-10]. 为与传统的微正则系综相区别, 本文中称其为量子微正则 (quantum micro-canonical, QMC) 系综. 这里所说的系综是指对孤立量子系统可能的纯态进行统计采样 (每个纯态由波函数描述). 对于给定的系统参数, 可以获得相应的波函数分布的概率密度. 这种使波函数本身满足某种概率分布的想法, 早先被用于讨论可观测量的统计性质, 如原子分子跃迁概率的计算^[11] 和振动激发态的分析^[12]. 而近年的研究则主要关注纯态系综的典型性问题^[7-9], 即可观测量的分布在合适的条件下变得非常狭窄, 使得 QMC 系综能够提供一种完全确定的统计描述. 在此意义下, QMC 系综可以看作经典微正则系综在量子力学框架内更为严格和自洽的对应^[13-17].

与传统微正则系综理论采用的约束条件 (1) 式不同, QMC 系综放弃了对选取能量本征态的限制, 但要求系统的能量期待值取给定的值. 一个 QMC 系综由以下三个条件确定: i) $\sum_{k=1}^N p_k = 1$;

* 上海市浦江人才计划 (批准号: 17PJ1407400) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: kji@shnu.edu.cn

ii) $p_k \geq 0$; iii) $\sum_{k=1}^N E_k p_k = E_{av}$, 这里 N 是希尔伯特空间的维数, E_k 是量子系统的第 k 个本征能量, E_{av} 是给定的平均能量. 条件 i) 和 ii) 是量子力学的基本要求, 而 iii) 是 QMC 系统对平均能量的限制. 从上面这些条件出发, Fine^[16] 证明了在希尔伯特空间中最可几的概率分布具有如下形式:

$$p_k = \frac{1}{N [1 + \lambda (E_k - E_{av})]}, \quad (2)$$

其中 λ 是一个特征参数. 显然 (2) 式所给的 p_k 具有一个较宽的分布, 而不再像 (1) 式那样只在能量窗口内有非零值. 另外, (2) 式给出的 QMC 分布具有能量的代数形式, 这与传统 e 指数形式的吉布斯分布有明显区别.

QMC 系统理论的有效性在文献 [18] 中用数值方法进行了研究. 通过对 XXZ 海森伯自旋模型施加周期磁场, Ji 和 Fine^[18] 发现系统本征态的占据概率 p_k 从初始给定的吉布斯分布逐渐演变成 QMC 分布. 虽然系统在外场驱动下最终将达到无穷温度状态, 即各个量子态被均匀占据, 使得吉布斯分布与 QMC 分布变得难以区分, 但在此之前仍然能够观察到 p_k 的分布明显更接近 QMC 统计规律. 这一结果表明在实验上可以利用外部周期驱动来获得 QMC 统计分布存在的证据. 然而另一方面, 近期有研究显示孤立量子系统在周期驱动下并不一定导致完全的热化^[19,20], 此外量子系统本身的性质怎样影响 QMC 统计的形成也并不清楚. 为此, 本文将以一维伊辛模型及其衍生形式为例研究孤立量子系统在周期驱动下 QMC 统计形成与抑制的情况. 计算表明, 对于一个量子系统, 量子微正则统计能够在其中形成的必要条件是这个系统可以被热化, 而热化的效果则可以用信息熵来表征.

2 理论模型和方法

本文理论研究的出发点是一维伊辛模型 (取 $\hbar = k_B = 1$):

$$H_1 = J_z \sum_{i=1}^{N_s} S_i^z S_{i+1}^z, \quad (3)$$

其中 S_i^z 表示第 i 格点上的自旋在 z 方向的分量, N_s 是系统的自旋总数, J_z 是相邻格点上自旋的 z 分量之间的相互作用常数. 除了 (3) 式, 后面还将用到

几个伊辛模型的衍生形式, 包括纵向 (沿 z 轴) 磁场作用的伊辛模型

$$H_2 = J_z \sum_{i=1}^{N_s} S_i^z S_{i+1}^z + h_0^z \sum_{i=1}^{N_s} S_i^z, \quad (4)$$

这里 h_0^z 表示沿 z 轴的均匀外磁场强度; 横向 (沿 x 轴) 磁场作用的伊辛模型

$$H_3 = J_z \sum_{i=1}^{N_s} S_i^z S_{i+1}^z + h_0^x \sum_{i=1}^{N_s} S_i^x, \quad (5)$$

这里 h_0^x 表示沿 x 轴的均匀外磁场强度; 带有局域随机磁场的伊辛模型

$$H_4 = J_z \sum_{i=1}^{N_s} S_i^z S_{i+1}^z + \sum_{i=1}^{N_s} h_i^y S_i^y, \quad (6)$$

这里 h_i^y 代表沿 y 轴、随格点 i 变化的局域随机内磁场强度; 横向 (沿 x 轴) 磁场作用且带有局域随机磁场的伊辛模型

$$H_5 = J_z \sum_{i=1}^{N_s} S_i^z S_{i+1}^z + h_0^x \sum_{i=1}^{N_s} S_i^x + \sum_{i=1}^{N_s} h_i^y S_i^y. \quad (7)$$

数值计算时, J_z , h_0^z 和 h_0^x 的强度取为 1, h_i^y 则在区间 $[-0.1, +0.1]$ 内取值.

下面仿照文献 [18] 的方法来引导系统生成 QMC 分布: 首先将初态选为温度 $T = 1$ 的吉布斯分布 ($p_k^{(0)} = \frac{1}{Z} e^{-E_k/T}$, Z 为归一化因子), 然后将一系列周期矩形磁脉冲作用于系统 (脉冲幅度为 1, 波形见图 1). 系统在周期脉冲的连续驱动下发生演化, 如果 QMC 统计能够建立, 那么随着脉冲数 n 的增加系统本征态占据概率 p 将逐渐趋向 QMC 分布. 但这里要注意, 文献 [18] 中采用的是短脉冲, 即 $t_{on} \gg t_{off}$, 而本文采用的是长脉冲 (见图 1 所画示意图), 其中磁场打开时间 $t_{on} = 100$, 磁场短暂关闭的时间 $t_{off} = 1 - 5$ (后面如不做说明都取 $t_{off} = 5$), 即有 $t_{on} \ll t_{off}$. 这意味着可以将外磁场打开时的哈密顿量 H_{on} 看作系统没有扰动时

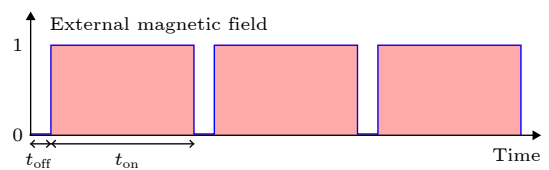


图 1 外磁场强度随时间做周期性变化示意图

Fig. 1. Schematic plot of external magnetic field intensity with a periodic change.

的哈密顿量 (H_{on} 对应 H_2 , H_3 或 H_5), 同时将磁场的短暂关闭看成对 H_{on} 的一个扰动. 这样选取的理由将在第 3 节说明.

为了比较占据概率的不同演化行为, 本文中针对三种情况进行数值模拟: 1) 伊辛模型加纵向磁场, 这种情况对应磁场打开时的哈密顿量为 H_2 , 磁场关闭时的哈密顿量为 H_1 ; 2) 伊辛模型加横向磁场, 这对应磁场打开时的哈密顿量为 H_3 , 磁场关闭时的哈密顿量为 H_1 ; 3) 伊辛模型加横向磁场和局域随机磁场, 这对应磁场打开时的哈密顿量为 H_5 , 磁场关闭时的哈密顿量为 H_4 .

在理论计算时, 系统总自旋数取 $N_s = 12$, 哈密顿量的本征值 E_k 和本征态 $\varphi_k (1 \leq k \leq 2^{N_s})$ 通过严格对角化获得. 在统计 p 的分布时, 为了减小涨落, 仿照文献 [18] 对 2^{N_s} 个本征态做分组平均 (本文分 128 组, 即相邻的 32 个态为一组), 计算第 α 组的占据概率 $p_\alpha^{(n)} = \sum_{k \in \alpha} p_k^{(n)}$ 和能量 $E_\alpha^{(n)} = \sum_{k \in \alpha} E_k p_k^{(n)} / p_\alpha^{(n)}$, 然后用 $p_\alpha^{(n)}$ 和 $E_\alpha^{(n)}$ 做进一步的理论分析. 本文后面所给数据均为分组平均后的结果.

3 计算结果

这里将对前面所述的三种情况进行数值模拟. 首先考察伊辛模型加上纵向 (沿 z 轴) 磁脉冲的情况, 结果如图 2 所示, 此时占据概率 p 不随脉冲数 n 变化. 在图中, 绿线和红线是在给定平均能量, 即在 $E_{av}^{(n)} = \sum_\alpha E_\alpha^{(n)} p_\alpha^{(n)}$ 约束条件下分别做 e 指数和 QMC 拟合的结果, 显然占据概率 p 始终保持初始时刻的吉布斯 (e 指数) 分布没有变化.

图 2 所示结果来自分段平均, 其中每个点代表 32 个相邻能态数据的平均值. 图 3 计算了三种伊辛模型的态密度 (density of states, DOS), 其中粗红线对应 H_1 , 蓝线对应 H_2 , 细绿线对应 H_3 . 可见 H_1 和 H_2 具有分立的能谱, 而且各能态有不同的简并度, 这种分立谱将导致对能态做分段平均时产生较大误差. 这个问题在图 2 中并不明显, 数据点与拟合曲线符合很好, 这是因为伊辛模型在纵向脉冲作用下占据概率实际上并没有发生演化. 如果将纵向脉冲改为横向脉冲, 则占据概率将发生明显变化, 这时能级不均匀性导致的误差将会显现. 为了减小这一影响, 本文在模拟横向脉冲作用的伊辛模型时, 取 H_3 作为无扰动哈密顿量, 把磁场的短暂

关闭作为一个小的扰动 (如图 1), 而 H_1 则作为扰动后的哈密顿量. 由图 3 可见, H_3 能态分布的均匀性和连续性都优于 H_1 , 因而可较好地抑制误差. 同时 H_3 比 H_1 更加远离可积模型, 因而长脉冲具有更强的热化作用.

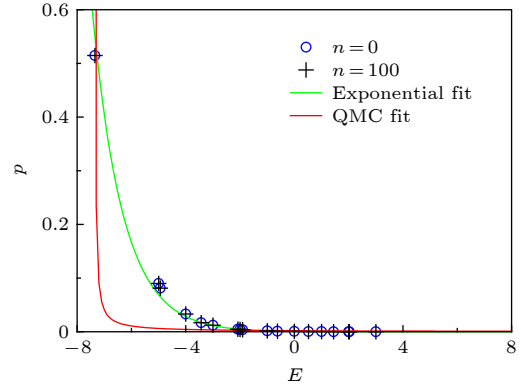


图 2 一维伊辛模型在纵向 (沿 z 轴) 周期磁脉冲作用下本征态占据概率不发生任何变化, 其中 n 是磁脉冲作用的次数, 图上每一数据点代表相邻 32 个态的平均值, 绿线和红线分别是 e 指数和 QMC 拟合的结果

Fig. 2. The eigenstate occupation numbers of one-dimensional Ising model keep invariant under longitudinal periodic magnetic pulses (along the z -axis). Here n is the number of magnetic pulses, each point in the graph represents the mean of 32 neighboring states, the green and red curves are the exponential and QMC fitting results, respectively.

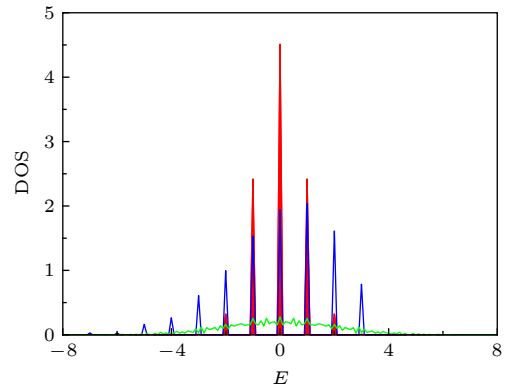


图 3 一维伊辛模型的态密度, 其中粗红线: 无外场伊辛模型; 蓝线: 纵场伊辛模型; 细绿线: 横场伊辛模型

Fig. 3. DOS of one-dimensional Ising model. Thick red curve: Ising model without external field; blue curve: Ising model with a longitudinal field; thin green curve: Ising model with a transverse field.

图 4 描绘了横向周期磁场作用下伊辛模型的情况, 这里占据概率分布随时间发生一些改变后就不再继续演化, n 从 2 到超过 100 都基本停留在从吉布斯向 QMC 分布过渡的中间状态.

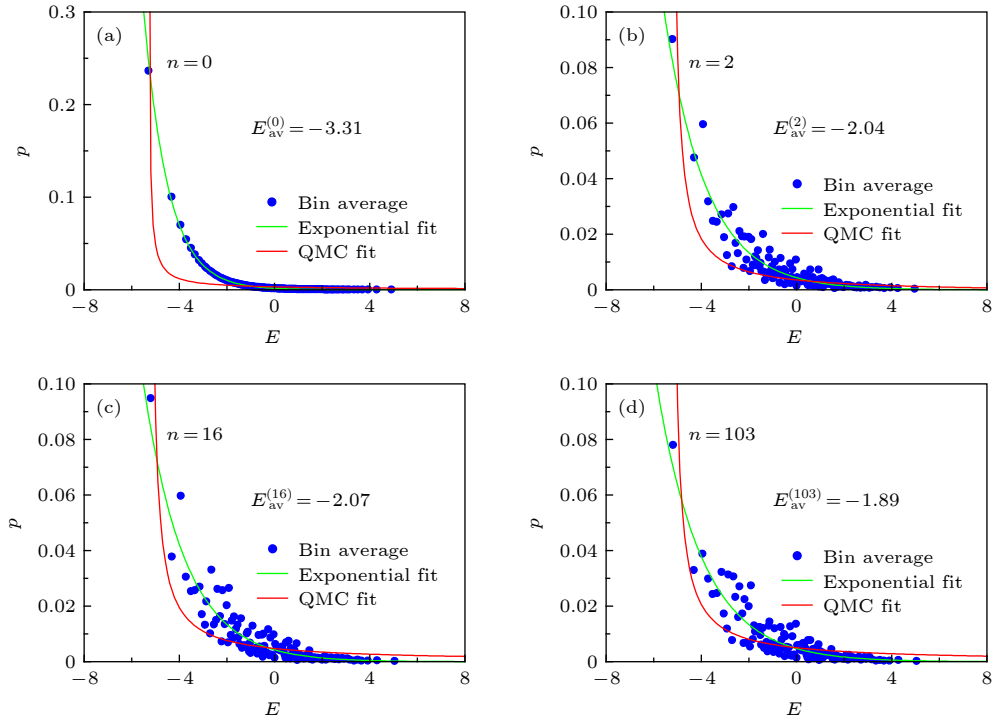


图 4 一维伊辛模型在横向(沿 x 轴)周期磁脉冲作用 n 次后本征态占据概率的分布 (a) $n = 0$; (b) $n = 2$; (c) $n = 16$; (d) $n = 103$. 图中每一点代表相邻 32 个态的平均值, 绿线和红线分别是 e 指数和 QMC 拟合的结果

Fig. 4. Distribution of eigenstate occupation numbers of one-dimensional Ising model after n periodic transverse (along x -axis) magnetic pulses: (a) $n = 0$; (b) $n = 2$; (c) $n = 16$; (d) $n = 103$. Each point in the graph represents the mean of 32 states, the green and red curves are the exponential and QMC fitting results, respectively.

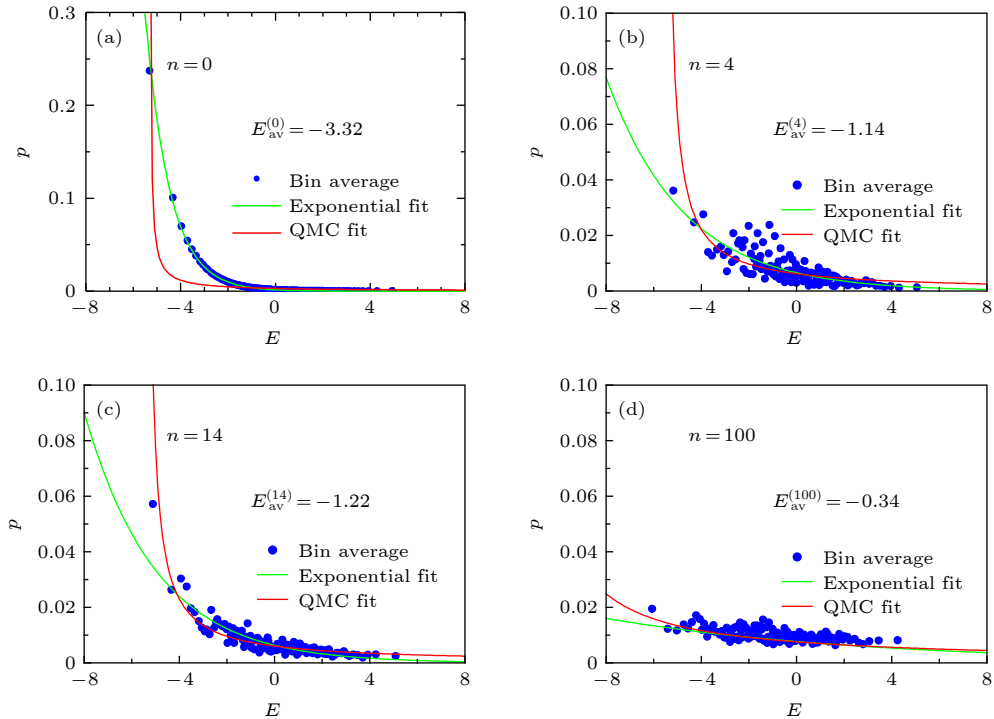


图 5 本征态占据概率分布 (a) $n = 0$; (b) $n = 4$; (c) $n = 14$; (d) $n = 100$. 与图 4 类似的情况, 区别是在模型中加入了微弱的随机局域磁场

Fig. 5. Distribution of eigenstate occupation numbers: (a) $n = 0$; (b) $n = 4$; (c) $n = 14$; (d) $n = 100$. The situation is similar to that of Fig. 4 except for the introduction of weak random local magnetic fields.

对于第三种情况, 横向磁场和局域随机磁场同时作用, 为便于和前面的情况比较, 外加磁场依然采用图 1 所示的长脉冲, 随机内磁场则不随时间变化. 模拟结果见图 5, 在 4 个脉冲后占据概率已到达中间状态, 在 14 个脉冲后就表现出明显的 QMC 分布的特征, 即 QMC 统计比 e 指数统计更好地描述了占据概率分布. 这种状态可以持续一段较长时间, $n = 14$ 是其中的一个代表. 如果继续施加更多脉冲, 比如 100 个脉冲之后, 系统逐渐完全热化, 所有能态几乎被等几率地占据, 这时吉布斯分布和 QMC 分布变得难以区分. 总体上看, 当增加局域随机磁场后, 系统产生 QMC 分布的速度明显加快, 与吉布斯分布的差异也得到强化.

4 分析与讨论

上述三种情况所演化出的不同占据概率分布是由各自的弗洛凯算符 F , 即系统做周期性时间演化的有效哈密顿量, 在无扰动哈密顿量 H_{on} 的本征表象下的性质所决定. 在一个演化周期内

$$e^{-iF(t_{\text{on}}+t_{\text{off}})} = e^{-iH_{\text{off}}t_{\text{off}}} e^{-iH_{\text{on}}t_{\text{on}}}, \quad (8)$$

对于第 1 种情况, H_{on} 和 H_{off} 对易, 可知在 H_{on} 的本征表象下, F 具有对角形式, 因而时间演化不会引起占据概率的扩散. 而对于第 2 和第 3 种情况, F 具有非对角项, 时间演化将引起不同量子态之间的跃迁以及占据概率的重新分布. 这些效果可通过信息熵来定量刻画. 在 H_{on} 的本征表象下, 如果 F 的本征态 ψ_{μ} 可展开成

$$\psi_{\mu} = \sum_k C_{\mu k} \varphi_k, \quad (9)$$

则在此表象下 ψ_{μ} 的信息熵为^[21]

$$S_{\mu} = - \sum_k |C_{\mu k}|^2 \ln |C_{\mu k}|^2, \quad (10)$$

这里 $C_{\mu k}$ 为展开系数, S_{μ} 度量了 ψ_{μ} 与 φ_k 的交叠程度, 即同 ψ_{μ} 有关联的 φ_k 的多寡.

图 6(a) 和图 6(b) 分别计算了前面第 2 和第 3 种情况下系统所有的弗洛凯本征态的信息熵, 这里 $\ln(0.48N)$ 是高斯正交系综信息熵的最大值^[22], N 代表希尔伯特空间的维数, ε_{μ} 是弗洛凯算符的本征值, $\varepsilon_{\mu}(t_{\text{off}} + t_{\text{on}})$ 表示弗洛凯相位, 取值在 $-\pi$ 到 π 之间. 图中的红、绿、蓝点分别对应 $t_{\text{off}} = 1, 2, 5$ 时的信息熵. 作为参照, 图中的水平虚线标出了

第 1 种情况下信息熵的大小, 显然这时 S_{μ} 处处为零, 表明 ψ_{μ} 与 φ_k 正交, 因而将弗洛凯算符作用于系统时不引起任何变化. 对于第 2 种情况, 图 6(a) 显示 $S_{\mu} > 0$ 但数值不是很大, 表明 ψ_{μ} 与 φ_k 有微弱的交叠, 这导致时间演化过程中不同 φ_k 之间可能通过 F 的作用实现跃迁, 从而改变占据概率的分布. 但此时希尔伯特空间存在对应不同波矢的独立子空间, 占据概率的转移只发生在各个子空间内, 不能遍及整个希尔伯特空间. 如果引入局域随机场, 这些子空间将能实现联通, 占据概率传播的范围也随之扩大. 所以对于第 3 种情况, S_{μ} 显示 ψ_{μ} 与 φ_k 交叠明显并且随着 t_{off} 的增大逐渐趋向深度混合, 表明在时间演化算符作用下, 一个本征态可

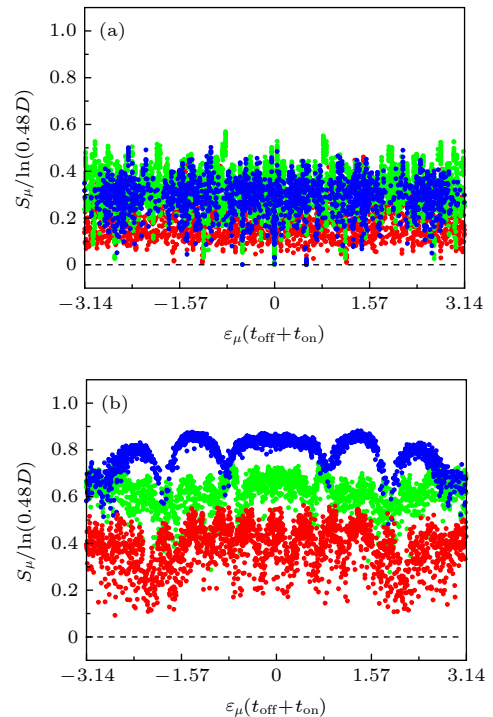


图 6 一维伊辛模型在横向(沿 x 轴)周期磁脉冲作用下弗洛凯本征态在哈密顿量 H_{on} 的本征表象下的信息熵 (a) 系统不含随机局域磁场; (b) 系统包含随机局域磁场. 其中红、绿、蓝点分别对应磁脉冲的时间间隔为 $t_{\text{off}} = 1, 2, 5$, 黑色虚线是一维伊辛模型在纵向(沿 z 轴)周期磁脉冲作用下的信息熵分布

Fig. 6. Information entropy of the Floquet eigenstates in the eigenstate representation of H_{on} for the one-dimensional Ising model under transverse (along x -axis) periodic magnetic pulses: (a) Systems without random local magnetic fields; (b) systems with random local magnetic fields, where the red, green, and blue points correspond to magnetic pulse interval $t_{\text{off}} = 1, 2, 5$, respectively, and the black dashed lines are the distribution of information entropy for the one-dimensional Ising model under longitudinal (along z -axis) periodic magnetic pulses.

以同其他多个态发生强烈的耦合,使得占据概率的转移遍及整个希尔伯特空间,进而能够表现出最可几分布,即 QMC 统计规律.

上面的分析表明, QMC 分布显现的机理与量子系统热化机制^[23]有着密切关联. 图 7 计算了单自旋平均能量 E_{av}/N_S 随施加脉冲数 n 的变化, 图 7(a) 和图 7(b) 分别对应第 2 和第 3 种情况. 其中图 7(a) 的平均能量明显只在某个非零值附近涨落而不会趋向于零, 即使改变 t_{off} 也没有明显变化, 表明系统发生了部分热化但并不彻底; 而图 7(b) 的演化则逐渐趋向于零点, 特别是 t_{off} 增大后更加明显, 说明此时系统可完全热化至无限温度状态. 在图 7 中, 黑色虚线给出了第 1 种情况下能量平均值的演化过程, 它呈现水平状且没有任何涨落, 表明此时系

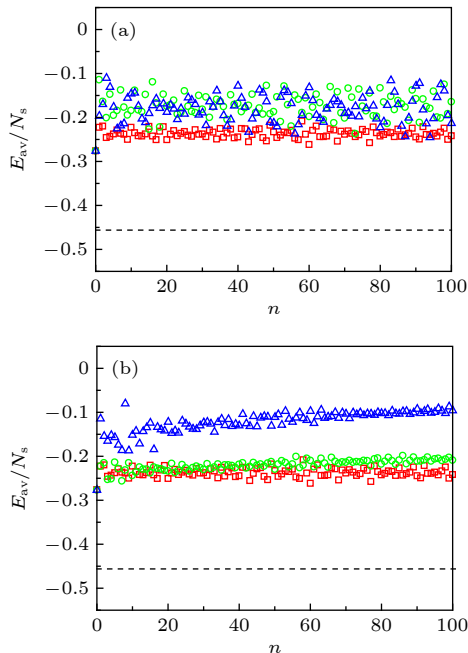


图 7 一维伊辛模型在横场(沿 x 轴)周期磁脉冲作用下单个自旋平均能量随脉冲数 n 的变化 (a) 系统不含随机局域磁场; (b) 系统含随机局域磁场. 这里红方块、绿圆圈、蓝三角分别对应磁脉冲的时间间隔为 $t_{off} = 1, 2, 5$, 黑色虚线是一维伊辛模型在纵向(沿 z 轴)周期磁脉冲作用下的单自旋平均能量

Fig. 7. Average energy per spin versus pulse number n for the one-dimensional Ising model under transverse (along x -axis) periodic magnetic pulses: (a) Systems without random local magnetic fields; (b) systems with random local magnetic fields, where the red squares, green circles, and blue triangles correspond to magnetic pulse interval $t_{off} = 1, 2, 5$, respectively, and the black dashed lines are the average energy per spin for the one-dimensional Ising model under longitudinal (along z -axis) periodic magnetic pulses.

统完全没有被热化. 这些结果与三种情况下占据概率趋向 QMC 统计的演化特点, 以及信息熵揭示的希尔伯特空间的结构特征是一致的. 信息熵的计算无需对量子系统做长时间的动力学演化, 从它可以比较方便地判断系统能否热化以及热化发生的快慢. 由于 QMC 统计的显现不仅依赖希尔伯特空间的结构, 还依赖演化初态的选取等因素, 因此可否热化是 QMC 统计形成的一个必要但不充分条件.

5 结 论

以一维伊辛模型为例研究了孤立量子系统在外驱动作用下从吉布斯热初态向 QMC 统计分布转化的可能性. 当施加纵向磁场时, 系统完全无法形成 QMC 分布; 当施加横向磁场时, 系统出现向 QMC 分布过渡的趋势, 但转化不彻底; 当施加横向磁场的同时系统内部存在局域随机磁场, 系统可以完全实现向 QMC 分布的过渡. 系统能否实现统计分布的转化与弗洛凯算符本征态在无扰动哈密顿量的本征表象下的信息熵有关, 信息熵越大表明与弗洛凯本征态关联的无扰动本征态就越多, 时间演化就越能有效地推动占据概率的转移, 实现希尔伯特空间的遍历. QMC 统计规律通过动力学过程得到显现的必要条件是一个孤立量子系统可以被热化. 随着局域随机场的增强, 系统可能出现位形空间的局域化现象^[24], 并影响热化效果^[25]. 这一效应与 QMC 统计的关系将在后续工作中考察.

参考文献

- [1] Arute F, Arya K, Babbush R, et al. 2019 *Nature* **574** 505
- [2] Tomza M, Jachymski K, Gerritsma R, Negretti A, Calarco T, Idziaszek Z, Julienne P S 2019 *Rev. Mod. Phys.* **91** 035001
- [3] Shi F, Kong X, Wang P, Kong F, Zhao N, Liu R B, Du J 2014 *Nat. Phys.* **10** 21
- [4] Gao W B, Imamoglu A, Bernien H, Hanson R 2015 *Nat. Photonics* **9** 363
- [5] Huang K 1987 *Statistical Mechanics* (New York: Wiley) pp131–135
- [6] Pathria R K, Beale P D 2011 *Statistical Mechanics* (3rd Ed.) (Boston: Academic) pp115–119
- [7] Popescu S, Short A J, Winter A 2006 *Nat. Phys.* **2** 754
- [8] Goldstein S, Lebowitz J L, Tumulka R, Zanghì N 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 050403
- [9] Reimann P 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 160404
- [10] Mahler G, Gemmer J, Michel M 2005 *Physica E* **29**, 53
- [11] Levine R D 1988 *J. Stat. Phys.* **52** 1203
- [12] Buch V, Gerber R B, Ratner M A 1982 *J. Chem. Phys.* **76** 5397
- [13] Brody D C, Hughston L P 1998 *J. Math. Phys.* **39** 6502

- [14] Bender C M, Brody D C, Hook D W 2005 *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** L607
- [15] Naudts J, Van der Straeten E 2006 *J. Stat. Mech.: Theory Exp.* **2006** 06015
- [16] Fine B V 2009 *Phys. Rev. E* **80** 051130
- [17] Campisi M 2013 *New J. Phys.* **15** 115008
- [18] Ji K, Fine B V 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 050401
- [19] D'Alessio L, Rigol M 2014 *Phys. Rev. X* **4** 041048
- [20] Ji K, Fine B V 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 050602
- [21] Izrailev F M 1990 *Phys. Rep.* **196** 299
- [22] Zelevinsky V, Brown B A, Frazier N, Horoi M 1996 *Phys. Rep.* **276** 85
- [23] Borgonovi F, Izrailev F M, Santos L F, Zelevinsky V G 2016 *Phys. Rep.* **626** 1
- [24] Basko D M, Aleiner I L, Altshuler B L 2006 *Ann. Phys.* **321** 1126
- [25] Abanin D A, Altman E, Bloch I, Serbyn M 2019 *Rev. Mod. Phys.* **91** 021001

Formation and suppression of nonthermal statistics in periodically driven quantum Ising models*

Jiang Lu-Bing Li Ning-Xuan Ji Kai[†]

(Department of Physics, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

(Received 29 October 2019; revised manuscript received 18 April 2020)

Abstract

In classic statistical physics, an isolated system corresponds to a constant energy shell in the phase space, which can be described by the microcanonical ensemble. While, for an isolated quantum system, the conventional treatment is to subject the system to a narrow energy window in the Hilbert space instead of the energy shell in classical phase space, and then confine the participating eigen states of system wave function in the narrow window, so that the microcanonical ensemble can be recovered in the framework of quantum mechanics. Apart from the traditional theory, there is a more self-consistent description for the isolated quantum system, that is, the quantum microcanonical (QMC) ensemble. The QMC ensemble abandons the narrow energy window assumption, and allows all the eigen states to contribute to the system wave function on condition that the system average energy is fixed at a given value. At the same time, the total occupation probability of these eigen states is conserved to unity. The most probable probability distribution obtained in the Hilbert space for an isolated quantum system according to the constraints specified above is called the QMC statistics. There is a clear difference between the QMC distribution and the traditional Gibbs distribution having an exponential form. Through the external periodic drives, an isolated quantum system may produce the QMC distribution, which is a consequence of the interplay between internal origins and external drives. In this paper, we investigate the conditions for the formation and suppression of QMC distribution by using the exact diagonalization method based on the one-dimensional Ising model. We start with the one-dimensional Ising model and focus on three different cases of periodic drives: systems under vertical (along the z axis), horizontal (along the x axis), horizontal magnetic field together with random internal (along the y axis) magnetic field. For all these three cases, the external magnetic fields are set to be ordinary rectangular pulses and the Gibbs distributions are taken as the initial states. We then study the evolutions and their asymptotic tendencies to the QMC distributions of the eigen state occupation probability under the effect of external periodic magnetic field. The results show that under the vertical magnetic field, the eigen state occupation probability does not change, and the system cannot produce the QMC distribution; under the horizontal magnetic field, the system tends to display a QMC distribution, but only partly; under horizontal and random internal magnetic fields at the same time, the transition to QMC distribution can be fully realized, and finally the system is almost completely thermalized. In order to clarify the different behaviors of the Ising model in the three cases, we also calculate

* Project supported by the Pujiang Program of Shanghai Committee of Science and Technology, China (Grant No. 17PJ1407400).

[†] Corresponding author. E-mail: kji@shnu.edu.cn

the information entropy of the eigen state of Floquet operator in the eigen representation of the unperturbed Hamiltonian. We find that as the information entropy of the Floquet eigen state increases, the convergence to the QMC distribution in the Hilbert space is improved. We also notice that the mechanism for the emergence of QMC distribution is closely related to the thermalization effect of the isolated quantum system. Our analyses show that when the magnetic field is vertical, it cannot trigger the thermalization of the system. When the magnetic field is horizontal, the system becomes partly, but not completely, thermalized. When we add a horizontal periodic magnetic field and a random internal magnetic field at the same time, the system can be completely thermalized to infinite temperature. Thus, the asymptotic behavior towards the QMC statistics is a reflection of the fact that the isolated quantum system is thermalizable under periodic drives.

Keywords: micro-canonical ensemble, Ising model, Floquet representation, thermalization

PACS: 05.30.-d, 05.30.Ch, 75.10.Pq

DOI: [10.7498/aps.69.20191657](https://doi.org/10.7498/aps.69.20191657)