

# 超声在液体中的非线性传播及反常衰减\*

陈海霞 林书玉†

(陕西师范大学物理学与信息技术学院, 陕西省超声学重点实验室, 西安 710062)

(2020年3月21日收到; 2020年4月16日收到修改稿)

本文从广义的 Navier-Stokes 流体方程出发, 考虑到流体介质的黏滞性和存在的热传导, 导出了更接近实际流体的三维非线性声波动方程. 鉴于声传播所涉及的空间和时间尺度的复杂性和多样性, 文中针对一维情形下的非线性波动方程进行了求解和分析. 由方程的二级近似解可以看出, 声压振幅的衰减遵循几何级数规律, 而且驱动声波的频率越高声压的衰减就越快. 在满足条件  $\omega b \ll \rho_0 c_0^2$  时, 基波的衰减系数与驱动频率的平方及耗散系数的乘积成正比; 二次谐波的衰减规律更加复杂, 与频率的更高次幂相关. 对声衰减系数及声压的分布进行数值计算发现, 声压的分布还与初始的声压幅值及频率有关, 初始的声压与频率越高衰减得越快. 另外, 当声压高于液体的空化阈值时, 液体中就会出现大量的空化泡, 文中模拟了单个空化泡的运动, 发现随着声压的增大空化泡的振动越剧烈、空化泡所受的黏滞力变大, 随着声波作用时间的增大黏滞力的幅值迅速增大并与驱动声压值同阶, 因而空化泡的非线性径向运动引起的声衰减不容忽视. 结果表明, 驱动声压越高在空化区域附近引起的声衰减越快、输出的声压越低.

**关键词:** 非线性超声, Navier-Stokes 方程, 空化泡

**PACS:** 43.25.+y, 47.10.ad, 43.35.+d

**DOI:** 10.7498/aps.69.20200425

## 1 引言

声波的非线性传播问题一直备受研究者的关注. 在实际工作中液体介质的组成成分、各成分的含量及分布状态、环境温度和驱动声场各不相同, 为此人们建立了许多声学模型进行理论研究. 如 2012 年 Louisnard<sup>[1,2]</sup> 通过建立的声传播简化模型研究了含气液体声衰减的物理机理. Ashokumar<sup>[3]</sup> 研究了在不同的实验条件下的空化现象. Wang 等<sup>[4,5]</sup> 和 Chen<sup>[6]</sup> 还在实验中发现了双层液体系统声的非对称传播现象和驱动功率对空化液体远场的负效应. Wijngaarden<sup>[7]</sup> 以及 Commander 和 Prosperetti<sup>[8]</sup> 对小振幅下的声传播特性与液体中气体含量及气泡分布进行了系统的研究. Vanhille 和 Cleofé<sup>[9]</sup> 在模拟实验中发现, 充入含泡液体时线性的超声驻波

场转变成了多频的非线性场. 液体中的声场与泡群间的耦合效应以及气泡的振动也一直是学者们的研究课题<sup>[10-18]</sup>. 但由于多空化泡物理场所涉及的空间和时间尺度的复杂性和多样性, 要用一个理论模型来完整地描述难度很大<sup>[19-22]</sup>. 本文在前人的研究基础上对实际液体中声的非线性传播进行了研究和分析, 得出液体的黏滞性、热传导以及空化是高驱动声波出现反常衰减的原因.

## 2 液体中的非线性声波方程及其解

### 2.1 液体中非线性声传播方程

声波在液体介质中的传播特性, 可以用物理量  $p, v, \rho$  即声压、声速、密度的平均值来描述, 计及非线性项时的连续性方程为

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11674206, 11874253) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [sylin@snnu.edu.cn](mailto:sylin@snnu.edu.cn)

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho' + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

考虑到实际液体中的黏滞性, 在不计体积力, 速度无旋的情况下, 动量方程采用广义的纳维-斯托克斯方程<sup>[16]</sup>

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (2)$$

式中的  $\eta$  是黏滞系数,  $\eta = \eta'' + \frac{4}{3} \eta'$ , 其中  $\eta''$ ,  $\eta'$  分别为液体的容变黏滞系数和切变黏滞系数.

考虑热传导的物态方程为<sup>[17]</sup>

$$p = c_0^2 \rho' + \frac{(\beta - 1)}{\rho_0} c_0^2 \rho'^2 - \kappa \left( \frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_P} \right) \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (3)$$

式中的  $\kappa$  为介质的热传导系数,  $C_V, C_P$  分别为介质的等容和等压比热容,  $\beta$  为介质的非线性系数,  $p = P - P_0$ ,  $\rho' = \rho - \rho_0$  分别表示由于声扰动引起的介质压强和密度的变化,  $P_0, \rho_0$  分别表示液体静态的压强与密度,  $c_0$  为绝热声速.

将 (3) 式代入 (2) 式, 并消去  $p$  可得

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 \right) \\ &= -c_0^2 \nabla \left( \rho' + \frac{(\beta - 1)}{\rho_0} \rho'^2 \right) \\ &+ \left[ \kappa \left( \frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_P} \right) + \eta \right] \nabla^2 \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (4)$$

分别将  $\partial/\partial t, \nabla$  作用于 (4) 式结合 (1) 式消去  $\partial \rho'/\partial t, \nabla \rho'$  项, 并引入  $\mathbf{v} = -\nabla \varphi$ , 其中  $\varphi$  为速度势. 利用线性关系  $p = c_0^2 \rho' = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , 即可求得非线性波动方程. 忽略三级以上微量, 二级近似下的非线性波动方程可以表示为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \varphi - \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \varphi) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ (\nabla \varphi)^2 + \frac{\beta - 1}{c_0^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (5)$$

式中耗散系数

$$b = \eta + \kappa \left( \frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_P} \right). \quad (6)$$

(5) 式为计及介质的黏滞性和热传导后, 各向同性液体介质的三维波动方程.

## 2.2 非线性波动方程的近似解

为使问题简化, 先考虑一维情形, 即沿  $x$  方向

的声波方程

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\beta - 1}{c_0^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] \\ &- \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

忽略三级以上微量, 取二级近似得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\beta - 1}{c_0^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

在不考虑声衰减时, 方程 (8) 将退化为理想媒质中非线性声波传播方程<sup>[18]</sup>.

设声波沿  $x$  方向传播时方程 (7) 的解为

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots,$$

其中  $\varphi_1$  为一级近似解,  $\varphi_2$  为二级近似解. 一级近似方程为

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} - c_0^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) - \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (9)$$

二级近似方程为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{\beta - 1}{c_0^2} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

令  $\varphi_1 = \varphi_a e^{i(\omega t - k'x)}$  代入方程 (9), 解得

$$k'^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2 + i(\omega b/\rho_0)} = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{1}{1 + iA},$$

即

$$k' = \frac{\omega}{c_0} \left[ \frac{\cos \frac{1}{2} \arctan A}{(1 + A^2)^{1/4}} - i \frac{\sin \frac{1}{2} \arctan A}{(1 + A^2)^{1/4}} \right]. \quad (11)$$

设  $c_0/c = \lambda - i\tau$ , 其中  $c = \omega/k'$  是液体中的实际声速, 则  $k' = \omega(\lambda - i\tau)/c_0$ , 其中

$$A = \frac{\omega b}{\rho_0 c_0^2}, \quad \lambda = \frac{\cos \frac{1}{2} \arctan A}{(1 + A^2)^{1/4}},$$

$$\tau = \frac{\sin \frac{1}{2} \arctan A}{(1 + A^2)^{1/4}},$$

考虑到  $e^{i(\omega t - k'x)} = \exp\left(-\frac{\omega\tau}{c_0}x\right) \exp\left[i\omega\left(t - \frac{\lambda}{c_0}x\right)\right]$ , 衰减系数为  $\alpha = \omega\tau/c_0$ , 在满足条件  $A \ll 1$  时, 基波的衰减系数可以表示为

$$\alpha = \frac{\omega}{c_0} \frac{\sin \frac{1}{2} \arctan A}{(1 + A^2)^{1/4}} \approx \frac{\omega A}{2c_0} = \frac{\omega^2 b}{2\rho_0 c_0^3}. \quad (12)$$

将  $\varphi_1$  的解代入 (8) 式的右边可得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) \\ &= -\frac{2i\varphi_a^2 \omega^3}{c_0^2} \left[ \frac{1}{1 + iA} + (\beta - 1) \right] e^{2i(\omega t - k'x)}, \end{aligned} \quad (13)$$

根据边界条件

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \Big|_{x=0} = 0, \quad -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \quad (14)$$

方程 (13) 式的解可表示为

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & -\frac{\varphi_a^2 \omega^3 x}{2c_0^4} \left[ \frac{\beta - 5A^2\beta + 3A^2}{1 + 5A^2 + 4A^4} \right. \\ & \left. + \frac{iA(2A^2\beta - 2A^2 + 2\beta + 1)}{1 + 5A^2 + 4A^4} \right] e^{2i(\omega t - k'x)}. \end{aligned} \quad (15)$$

从 (11) 式和 (15) 式可以看出, 波在传播过程中的波数发生了改变, 波数  $k'$  变成了复数, 并且在距声源位置  $x$  处还产生了频率为  $2\omega$  的二次谐波, 驱动声压幅值、频率、液体介质的黏滞性和热传导都对声波的传输有影响.

考虑到声波在  $y, z$  方向上的传播, 用类似的方法可以得到三维情形下, 各向同性液体中的波动方

程的近似解为

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 \\ &= \varphi_a e^{i(\omega t - k' \cdot r)} - \frac{\varphi_a^2 \omega^3 r}{2c_0^4} \left[ \frac{\beta - 5A^2\beta + 3A^2}{1 + 5A^2 + 4A^4} \right. \\ & \quad \left. + \frac{iA(2A^2\beta - 2A^2 + 2\beta + 1)}{1 + 5A^2 + 4A^4} \right] e^{2i(\omega t - k' \cdot r)}. \end{aligned} \quad (16)$$

由关系式  $p = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , 可以求出液体中的声压表达式

$$\begin{aligned} p &= \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial (\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial t} \\ &= p_{1a} e^{i(\omega t - k' \cdot r)} + p_{2a} e^{2i(\omega t - k' \cdot r)}, \end{aligned} \quad (17)$$

式中

$$p_{1a} = i\rho_0 \varphi_a \omega, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} p_{2a} = & \frac{\rho_0 \varphi_a^2 \omega^4 r}{c_0^4} \left[ \frac{A(2A^2\beta - 2A^2 + 2\beta + 1)}{1 + 5A^2 + 4A^4} \right. \\ & \left. - \frac{i(\beta - 5A^2\beta + 3A^2)}{1 + 5A^2 + 4A^4} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

由关系式  $\mathbf{v} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}}$ , 可以求出液体中的介质质点的振动速度表达式

$$\mathbf{v} = -\frac{\partial (\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{v}_{1a} e^{i(\omega t - k' \cdot r)} + \mathbf{v}_{2a} e^{2i(\omega t - k' \cdot r)} \quad (20)$$

式中

$$\mathbf{v}_{1a} = i\mathbf{k}' \varphi_a, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{2a} = & \frac{\varphi_a^2 \omega^3 \mathbf{r}}{2c_0^4} \left[ \frac{\beta - 5A^2\beta + 3A^2}{1 + 5A^2 + 4A^4} + \frac{iA(2A^2\beta - 2A^2 + 2\beta + 1)}{1 + 5A^2 + 4A^4} \right] (1 - 2i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}) \\ &= \frac{\varphi_a^2 \omega^3 \mathbf{r}}{2c_0^4} \left[ \frac{(\beta - 5A^2\beta + 3A^2) + 2A\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}(2A^2\beta - 2A^2 + 2\beta + 1)}{1 + 5A^2 + 4A^4} \right] \\ & \quad + i\frac{\varphi_a^2 \omega^3 \mathbf{r}}{2c_0^4} \left[ \frac{A(2A^2\beta - 2A^2 + 2\beta + 1) - 2\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}(\beta - 5A^2\beta + 3A^2)}{1 + 5A^2 + 4A^4} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

方程<sup>[7,8]</sup>

$$\nabla^2 p + k''^2 p = 0, \quad (23)$$

式中  $p$  为声压幅值,  $k''$  为等效波数. 为了简化分析, 假定空化液体中的空化泡分布均匀且大小相同, 有

$$k''^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} + \frac{4\pi\omega^2 N R_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib'\omega}, \quad (24)$$

其中  $\omega$  是驱动声场的角频率,  $\omega_0$  是平衡半径为  $R_0$

### 2.3 空化对声传播的影响

以上的讨论没有计及空化的影响, 当驱动声压高于液体的空化阈值时, 声波传播的过程中还会出现空化现象. 这种伴随空化的二相流体不同于通常的含气泡液体, 空化泡的大小和数量密度随着驱动声压发生变化. 这时的声场满足非线性 Helmholtz

的空化泡的共振频率,  $N$  为空化泡数密度,  $b'$  为阻尼系数.

$$\omega_0^2 = \frac{P_0 + 2\sigma/R_0}{\rho R_0^2} \left( \text{Re}\phi - \frac{2\sigma}{R_0(P_0 + 2\sigma/R_0)} \right), \quad (25)$$

$$b' = \frac{2\mu}{\rho R_0^2} + \frac{(P_0 + 2\sigma/R_0)}{2\omega\rho R_0^2} \text{Im}\phi + \frac{\omega^2 R_0}{2c_0}, \quad (26)$$

$$\phi = \frac{3\gamma}{1 - 3(\gamma - 1)i\chi[(i/\chi)^{1/2} \coth(i/\chi)^{1/2} - 1]}, \quad (27)$$

式中  $\phi$  是一个无量纲的复数,  $\chi = D/(\omega R_0^2)$ ,  $D$  是泡内的热扩散系数,  $\gamma$  是空化泡内气体的比热比,  $\sigma$  是表面张力. 取  $c' = \omega/k''$ , 因此有

$$\frac{c_0^2}{c'^2} = 1 + \frac{4\pi c_0^2 N R_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ib'\omega}, \quad (28)$$

设  $c_0/c' = \lambda' - i\tau'$ , 考虑到  $\exp i(\omega t - k''x) = \exp\left(-\frac{\omega\tau'}{c_0}x\right) \exp\left[i\omega\left(t - \frac{\lambda'}{c_0}x\right)\right]$ , 空化液体中的声衰减系数可表示为

$$\alpha' = \omega\tau'/c_0, \quad (29)$$

式中

$$\lambda' = \sqrt[4]{F^2 + E^2} \cos \frac{1}{2} \arctan(E/F),$$

$$\tau' = \sqrt[4]{F^2 + E^2} \sin \frac{1}{2} \arctan(E/F),$$

$$F = 1 + \frac{4\pi c_0^2 N R_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2b'\omega)^2},$$

$$E = \frac{8\pi c_0^2 N R_0 b'\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2b'\omega)^2}.$$

在计及空化现象时, 液体中声传播的波数由于空化泡的存在发生了变化, (24) 式—(29) 式表明空化泡的含量及大小依赖于引起空化的驱动声场, 同时空化泡的非线性振动又反作用于原声场加速了声能量的耗散. 液体空化后产生的空化泡、热传导、液体的黏滞性、驱动声压的幅值及频率都是导致液体中声反常衰减的直接因素.

### 3 计算结果与分析

#### 3.1 无空化声场中的压强分布及其衰减

声在液体介质中传播时, 驱动声压的幅值和频率不同所引起的声衰减也会不同. 根据 (12) 式可

知, 声衰减系数与频率的平方成正比, 即驱动声波的频率越大衰减越快. 以超声反应器中的水为例, 当驱动声压一定时, 以频率为 1 MHz 的超声波的声压衰减值为参考值, 并定义不同频率下基波振幅的衰减值与其之比为  $B$ , 则  $B$  是一个无量纲比值. 由图 1 可以看出, 当声波频率一定时,  $B$  随着传播距离的增大而增大; 当传播距离一定时, 频率越大  $B$  也越大;  $B$  随传播距离呈几何指数增加, 且频率越大  $B$  值的变化幅度越大, 声衰减越快.

如图 2 所示, 在不计空化效应时, 声压总体上随着距离的增大而衰减的. 声压的分布还与初始声压及频率有关, 随着驱动声压及频率的增大声衰减的速度增大, 驱动频率一定时, 声压越大声衰减得越快. 从图 2 可以看出, 频率为 2 MHz 声压分别为 3 和 2 bar 的两列声波, 在 0.9 m 附近具有相同的输出声压, 在更远处声压为 3 bar 的波比 2 bar 的波的输出声压要小.

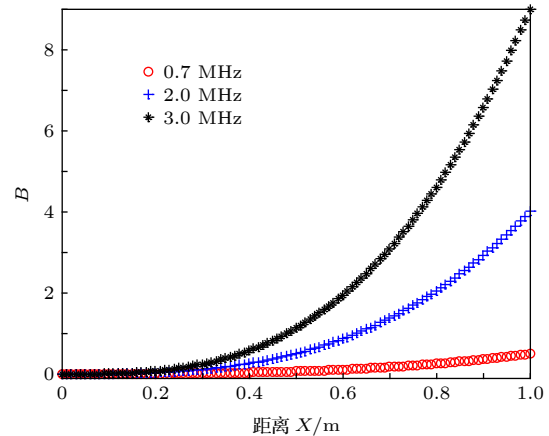


图 1 声衰减随距离的变化曲线

Fig. 1. The curve of sound attenuation with distance.

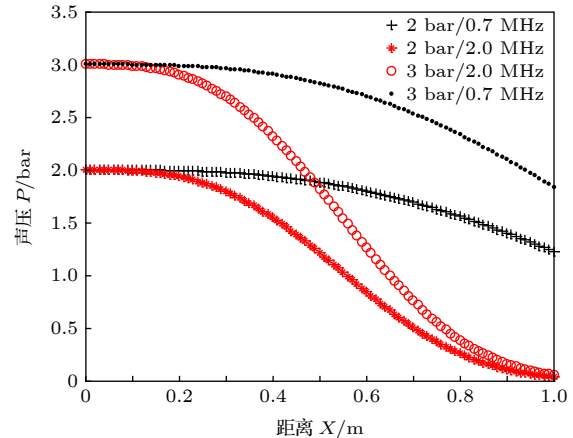


图 2 声压分布曲线

Fig. 2. Distribution of the sound pressure.

### 3.2 空化场中单个空化泡的振动

液体中的空化泡在驱动声波的作用下做非线性振荡, 从 (26) 式可知, 阻尼系数与空化泡的半径和数密度、表面张力、声波的频率以及热传导和液体介质黏滞作用等因素有关, 使得单个空化泡在一个振动周期内消耗的声能量要远远大于单个线性振荡的气泡消耗的能量, 其中最主要的是黏滞耗散. 为此采用模型 Rayleigh-Plesset 对单个空化泡在基波激励下的受迫振动进行了模拟, 数值模拟过程中使用的参数有,  $R_0 = 40 \mu\text{m}$ ,  $p_0 = 1.0135 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $f = 40 \text{ kHz}$ ,  $dR/dt = 0$ ,  $p_v = 2.33 \times 10^3 \text{ Pa}$ ,  $\mu = 1 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $\rho = 1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\sigma = 7.25 \times 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ ,  $\gamma = 4/3$ . 在满足  $kR_0, kR \ll 1$  的条件下, 初始半径为  $40 \mu\text{m}$  的空化泡在一个周期内的运动如图 3 所示. 在驱动频率一定的情况下, 随着驱动声压的增大空化泡的半径增大, 泡壁的振动速

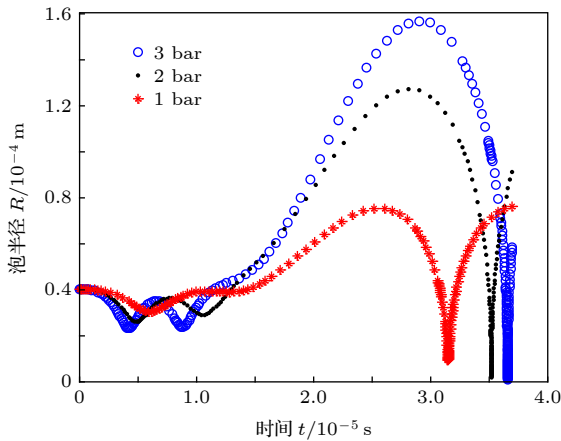


图 3 声空泡半径随驱动声压的变化曲线

Fig. 3. The curve of bubbles radius with pressure.

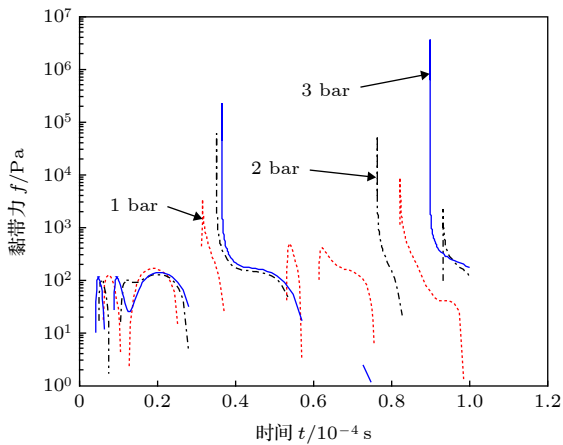


图 4 黏滞力随时间的变化曲线

Fig. 4. The curve of viscosity with distance.

度也增大.

单个声空化泡所受黏滞力在不同声压下的变化曲线如图 4 所示. 由图可知, 空化泡所受的黏滞力随着作用时间的变化关系很复杂, 随着作用时间的增大, 黏滞力的幅值不断增大, 而且声压越大黏滞力增大得越快. 从图 4 中可知, 驱动声压幅值为 3bar 的声波的作用下, 空化泡在 0.1 ms 附近所受的黏滞力的幅值已经超过了驱动声压值. 声波的连续作用时间越长、声压越大黏滞耗散就越大.

### 3.3 空化场中的声压分布及其衰减

当驱动声压高于液体的空化阈值时, 空化场中的声衰减不仅与驱动声场有关还与空化泡的大小、数密度、热传导、液体介质的黏滞性密切相关. 在不同驱动下液体中的声压分布如图 5 所示. 可以看出, 在计及空化影响时波在传播过程中声压减小的速度加快, 远场处的声压更低; 驱动声压越高频率越大衰减越明显.

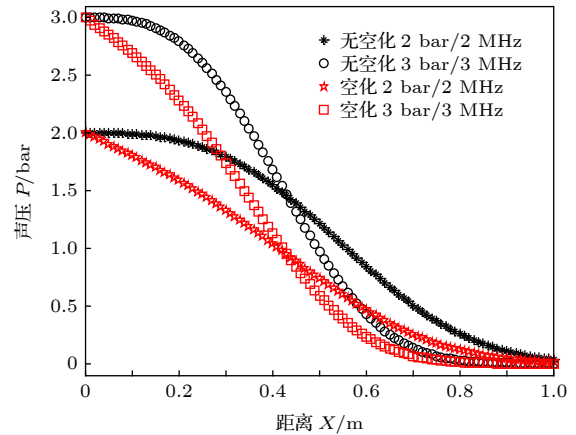


图 5 有无空化两种情况下的声压分布

Fig. 5. Distribution of the sound pressure with or without cavitation.

考虑到空化对声衰减的影响, 以及液体中的黏滞性及热传导后, 就会发现驱动声压越高声波在远场输出的声压就会越低, 这种现象被称为反常衰减<sup>[6]</sup>.

## 4 结 论

声波在液体中的非线性传播是一个非常复杂的过程, 本文从基本的流体方程出发, 推导出了声压、声速和声衰减系数的表达式以及各个量之间的定量关系. 在不计空化的影响时, 从图 1 和图 2 中可以看出, 在驱动声压一定时, 声衰减系数随着距

离的增大而增大,而且频率越大衰减越显著;此外声压分布还与初始的驱动声压有关,驱动声压越大衰减系数也越大;在频率一定时,驱动声压高的声波输出的声压值要更小.由图3和图4可知,当声压高于液体的空化阈值并继续增大时,单个空化泡的振动加剧,黏滞力增大,声衰减增大;随着空化泡体积的增大,由(29)式可知,声衰减系数也要增大;空化泡振动的同时还向外散射高次声波,且高次谐波更容易被液体吸收进一步加速了基波的衰减.文献[4,5]中的实验研究也证明了这个结论,文献[6]中的实验也表明,在声空化区域内基波能量的损失甚至达到了70%以上,同时还产生了大量的高次谐波.最终的结果是高驱动产生了比低驱动更低的声压分布,如图5所示.因此在研究声的非线性传播时,需综合考虑液体的黏滞性、热传导、声空化等诸多因素的影响.综合以上分析,液体的黏滞性、热传导和空化泡的非线性振动引起的强黏滞耗散及其散射等的共同作用,是导致声非线性传播过程出现反常衰减现象的根本原因.

## 参考文献

- [1] Louisnard O 2012 *Ultrason. Sonochem.* **19** 56
- [2] Louisnard O 2012 *Ultrason. Sonochem.* **19** 66
- [3] Ashokumar M 2011 *Ultrason. Sonochem.* **18** 864
- [4] Wang X, Chen W Z, Liang S D, Zhao T Y, Liang J F 2017 *Phys. Rev. E* **95** 033118
- [5] Wang X, Chen W Z, Yang J, Liang S D 2018 *J. Appl. Phys.* **123** 214904
- [6] Chen W Z 2018 *J. Appl. Acoustics* **37** 675 (in Chinese) [陈伟中 2018 *应用声学* **37** 675]
- [7] Wijngaarden L V 1972 *Ann. Rev. Fluid Mech.* **4** 369
- [8] Commander K W, Prosperetti A 1989 *J. Acoust. Soc. Am.* **85** 732
- [9] Vanhille C, Cleofé C P 2011 *Ultrason. Sonochem.* **18** 679
- [10] Thiessen R J, Cheviakov A F 2019 *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul.* **73** 244
- [11] Xu F S, Midoux N, Li H Z, Hébrard G, Dietrich N 2019 *Chem. Eng. Technol.* **42** 2321
- [12] Zhang H H 2020 *J. Acoust. Soc. Am.* **147** 399
- [13] Church C C 1995 *J. Acoust. Soc. Am.* **97** 1510
- [14] Rayleigh L 1917 *Philos. Mag.* **34** 94
- [15] Smerera P 2002 *J. Fluid Mech.* **454** 287
- [16] Chen W Z 2014 *Acoustic Cavitation Physics* (Beijing: Science Press) p58 (in Chinese) [陈伟中 2014 *声空化物理* (北京: 科学出版社) 第58页]
- [17] Qian Z W 2009 *Nonlinear Acoustics* (Beijing: Science Press) p29 (in Chinese) [钱祖文 2009 *非线性声学* (北京: 科学出版社) 第29页]
- [18] Du G H, Zhu Z M, Gong X F 2001 *Fundamentals of Sound* (Nanjing: Nanjing University Press) p491 (in Chinese) [杜功焕, 朱哲民, 龚秀芬 2001 *声学基础* (南京: 南京大学出版社) 第491页]
- [19] Qian Z W 1981 *Acta Phys. Sin.* **30** 442 (in Chinese) [钱祖文 1981 *物理学报* **30** 442]
- [20] Shen Z Z, Lin S Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 104302 (in Chinese) [沈壮志, 林书玉 2011 *物理学报* **60** 104302]
- [21] Shen Z Z, Lin S Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 084302 (in Chinese) [沈壮志, 林书玉 2011 *物理学报* **60** 084302]
- [22] Tomko J, O'Malley S M, Trout C, Naddeo J J, Jimenez R, Griepenburg J C, Soliman W, Bubb D M 2017 *Colloids Surf., A* **522** 368

# Nonlinear propagation and anomalous absorption of ultrasound in liquid\*

Chen Hai-Xia    Lin Shu-Yu †

(School of Physics & Information Technology, Shaanxi Key Laboratory of Ultrasonic, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)  
( Received 21 March 2020; revised manuscript received 16 April 2020 )

## Abstract

Recent work has rendered possible the formulation for the nonlinear propagation of pressure waves in liquids by using the generalized Navier - Stokes equations and the modified equations of state, with the heat transfer and fluid viscosity taken into consideration. And the nonlinear approximation solution of the second order term is obtained. The conclusion concerns the acoustic pressure, phase speed, attenuation, and velocity distribution function. When the amplitude of driving acoustic pressure is higher than the cavitation threshold of the host liquid, the cavitation occurs. The cavitation bubbles will prevent the sound field from spreading in the liquid, and the acoustic energy accumulates near the cavitation zone. So when studying the transmission characteristics of acoustic wave in the liquid, the cavitation attenuation must be considered. Note that the particularity of cavitation bubble movement, cavitation bubble vibration and viscous force are simulated under the initial driving sound. Through the analysis, it is found that the transmission of sound is influenced by the viscosity of the fluid, heat transfer, driving sound pressure (amplitude, frequency, duration) and cavitation bubble in liquid. The physical mechanism is that the higher driving pressure causes the cavitation to turn stronger, the acoustic loss to be faster, the sound propagation distance to be smaller and the vibration of bubbles to transfer energy from the fundamental wave to harmonics. As a result, the stronger absorption from the liquid causes abnormal phenomena, and the output sound is lower finally. It shows that the nonlinear radial motion of cavitation bubble is mainly responsible for the sound intensity attenuation.

**Keywords:** nonlinear acoustics, Navier-Stokes equations, cavitation bubbles

**PACS:** 43.25.+y, 47.10.ad, 43.35.+d

**DOI:** [10.7498/aps.69.20200425](https://doi.org/10.7498/aps.69.20200425)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos.11674206, 11874253).

† Corresponding author. E-mail: [sylin@snnu.edu.cn](mailto:sylin@snnu.edu.cn)