

专题：超材料

各向异性三维非对称双锥五模超材料的能带结构及品质因数*

蔡成欣^{1)2)3)†} 陈韶赓³⁾ 王学梅³⁾ 梁俊燕³⁾ 王兆宏⁴⁾

1) (河南工业大学粮食信息处理与控制教育部重点实验室, 郑州 450001)

2) (河南工业大学河南省粮食光电探测与控制重点实验室, 郑州 450001)

3) (河南工业大学信息科学与工程学院, 郑州 450001)

4) (西安交通大学电子科学与工程学院, 物理电子与器件教育部重点实验室, 西安 710049)

(2020年3月12日收到; 2020年4月28日收到修改稿)

五模超材料是一类可以解除剪切模量的人工固体微结构, 具有类似流体的性质, 在声波调控中有着潜在的应用. 声学变换作为声波调控的一种重要手段, 在超材料声学器件的设计中被广泛使用. 声学变换的引入会压缩均匀各项同性五模超材料. 因此, 需要研究各向异性对三维非对称双锥五模超材料带隙及品质因数的影响. 本文利用有限元方法, 对各项异性三维非对称双锥五模超材料的能带结构及品质因数进行了研究. 研究表明, 三维非对称双锥五模超材料单模区域的相对带宽随着各向异性的增大而减小, 第一带隙的相对带宽增大到 123%, 品质因数增大到 6.9 倍. 本研究可为声学变换在三维非对称双锥五模超材料中的应用提供指导.

关键词: 五模超材料, 各向异性, 声子带隙, 品质因数

PACS: 43.20.+g, 43.40.+s, 43.50.+y

DOI: 10.7498/aps.69.20200364

1 引言

五模超材料是 Milton 与 Cherkaey^[1] 提出的一类具有固体形态和“流体”特性的人工微结构极值材料. 通过解除压缩波和剪切波的耦合, 使其周期性结构很难被压缩, 但却很容易发生剪切形变^[2]. 由这样的结构单元周期排列构成的声学超材料, 可以实现类似“流体”的性质. 五模超材料可调的模量各向异性、较小的填充率、宽频等特点赋予五模超材料优越的水下声波调控能力^[3,4].

2006 年, Milton 等^[5] 通过对传统弹性动力学方程在曲线变换下的变化规律, 提出了五模超材料

用于弹性波隐身的可行性. 2008 年, Norris^[6] 系统分析了惯性声隐身与五模超材料声隐身衣, 提出了变换声学理论在五模超材料中应用的可行性. 2010 年, Scandrett 等^[7,8] 和 Boisvert 等^[9] 利用分层化的五模超材料提出了声隐身衣的设计方法. 理想的五模超材料是由窄直径很小的双锥单元连接构成的面心立方结构, 结构稳定性较差. 为了能够得到稳定性相对较好的三维五模超材料, Kadic 等^[2] 和 Schittny 等^[10] 加入实心小球来替代点连接, 并利用侵入式激光直写光刻技术与 3D 打印技术制作出了微米及毫米量级的三维实物结构. 此后, 研究人员开始对五模超材料的声学与力学特性进行研究^[11–15], 设计出声学超表面^[16]、声学波导^[17] 与

* 河南省教育厅重点科研项目 (批准号: 20A140008, 15A120007)、粮食信息处理与控制教育部重点实验室 (批准号: KFJJ-2020-106) 和河南工业大学高层次人才基金 (批准号: 31401120) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: cxcai2018@haut.edu.cn

声学隐身衣^[18,19]等多种二维五模超材料声波调控器件.

基于变换声学理论,五模超材料声学隐身衣能够避免惯性声学隐身衣壳层内部质量奇异点的问题,这为五模声学隐身衣的设计和制作提供了基础^[6].由于在二维情况下,声波方程可以与麦克斯韦方程组一一对应,因此对五模超材料的研究多集中在二维结构器件的设计与实验.2015年,张向东等^[20]采用分层近似的方法,对圆柱形分层五模超材料声学隐身衣的散射声压场进行了理论分析,并通过数值计算验证了理论推导的正确性.2016年,陆智森等^[21]对基于五模超材料的声学变换方程进行了研究,分析了影响五模超材料声学隐身衣性能的因素及规律,结果表明合适的坐标变换方程能够有效地改善隐身效果.同年,陈毅等基于准对称映射梯度算法获得了任意形状的二维五模声学隐身衣.此外,Chen等^[19]还提出基于五模超材料的隐身斗篷.

由于三维五模超材料结构的复杂性,目前对三维五模超材料的研究还比较缺乏.Chen和Chan^[22,23]利用直流电导方程在坐标变换下的不变性,将声波方程和直流电导方程建立了一一对应的关系,首次导出一般的三维变换声学方程,给出了声学坐标变换前后三维空间等效参数需要满足的对应关系,为三维五模超材料声学隐身衣的设计提供了可行的研究方法和理论基础.在设计三维五模超材料隐身衣时,除了需要对外部声波进行调控之

外,还需要考虑对隐身衣内部声波的抑制^[13].声学坐标变换下,五模超材料的周期性结构会被不同程度地压缩,引起双锥单元的结构参数发生变化,并对其能带结构、品质因数和填充率产生作用,进而影响五模超材料对其内部声波的控制^[24,25].因此,本文基于有限元方法研究各向异性对三维非对称双锥五模超材料能带特性及品质因数的影响,为变换声学在三维五模超材料声学器件的设计及应用提供参考.

2 三维非对称双锥五模超材料的各向异性及能带结构

2.1 三维各向异性结构模型

三维各向同性非对称双锥五模超材料晶胞结构如图1(a)所示,由十六个非对称双锥相交构成面心立方晶格.非对称双锥的宽直径为 D ,窄直径分别为 d_1 和 d_2 ,高度为 H ,晶格常数为 a .构造三维各向异性五模超材料有很多方式,其中最直接的方法就是:选取一个原胞的窄直径交点 P 为参考点,分别沿四个不同方向移动交点 P 来构造三维各向异性五模超材料,对应的各向异性晶胞结构如图1(b)—图1(e)所示,分别命名为模型1(X 轴)、模型2(Y 轴)、模型3(Z 轴)、模型4(体对角线).当点 $P(0.25a, 0.25a, 0.25a)$ 如图1(a)所示时,三维五模超材料为各向同性的,其各向异性程度最低;当 P 点移动时,距离点 $(0.25a, 0.25a, 0.25a)$ 的位置越远,其各向异性程度就越高.

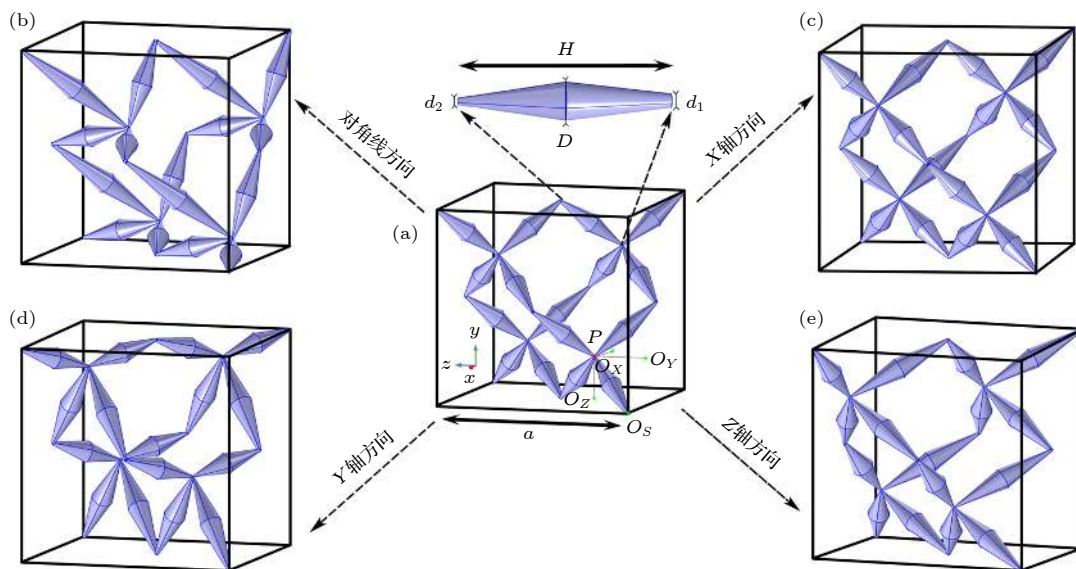


图1 (a)各向同性五模超材料晶胞与(b)—(e)各向异性五模超材料晶胞结构示意图
Fig. 1. The unit cell structure of isotropy (a) and (b)–(e) anisotropic pentamode materials.

2.2 能带结构及品质因数

各向异性的引入会对组成三维非对称双锥五模超材料原胞的基元结构参数 H 产生影响, 使得原胞内原本相同的四个基元变得不同, 从而影响原胞内部的本征振动形态. 因此, 各向异性会影响三维非对称双锥五模超材料的带隙特性、单模区域、压缩模量及剪切模量. 为了系统地研究各向异性对三维非对称双锥五模超材料的能带结构及五模特性的影响, 利用有限元仿真软件 Comsol Multiphysics, 在布洛赫边界条件下对各向异性原胞进行数值计算. 原胞结构参数为 $a = 37.3$ mm, $H = 16.15$ mm, $D = 3$ mm, $d_1 = 0.6$ mm, $d_2 = 0.3$ mm. 组成材料的质量密度为 1190 kg/m³、泊松比为 0.4 、杨氏模量 3 GPa.

图 2 为 P 点沿空间对角线方向偏移 0.25 倍对角线长度时所对应的能带结构图, 其中横纵坐标分别对应整个简约布里渊区边界与频率. 第一带隙 (黑色区域) 的下边界 (f_l) 与上边界 (f_u) 频率分别为 9.017 与 10.466 kHz, 对应的相对带宽 $\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_g} = \frac{f_u - f_l}{(f_u + f_l)/2}\right)$ 为 0.149 , 频率落在带隙范围内的压缩波和剪切波的传播均被抑制. 单模区域 (灰色区域) 的下边界与上边界频率分别为 0.457 与 2.333 kHz, 相对带宽为 1.345 . 在单模区域频率范围内, 压缩波与剪切波将被解耦合, 即只有压缩波可以传播, 剪切波将被抑制.

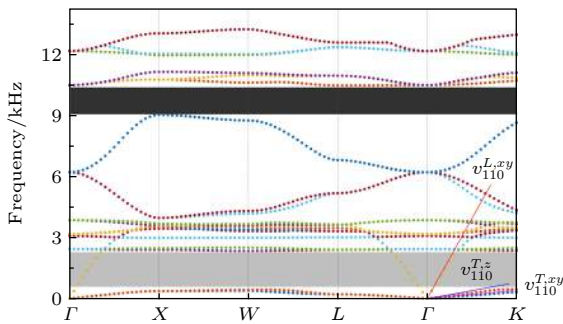


图 2 P 点沿空间对角线方向偏移 0.25 倍对角线长度时的能带结构

Fig. 2. The band structure of pentamode material with $O_3P/\sqrt{3}a = 0.25$.

理想的三维五模超材料是难压缩、易变形的固体人工微结构, 其体积弹性模量 B 与剪切模量 G 具有较大比值. 为了描述单模区域对应压缩波与剪切波的解耦合能力, 将体积弹性模量 B 与剪切

模量 G 的比值定义为品质因数 (figure of merit). 品质因数越大, 五模超材料解除压缩波与剪切波耦合的能力就越好. 对于各向异性三维非对称双锥五模超材料, 弹性模量 B 与剪切模量 G 的值可由以下式子得到^[26]:

$$C_{11} = 2\rho\left(v_{110}^{T,xy}\right)^2 + C_{12}, \quad (1)$$

$$C_{12} = \rho\left(v_{110}^{L,xy}\right)^2 - C_{44} - \rho\left(v_{110}^{T,xy}\right)^2, \quad (2)$$

$$C_{44} = \rho\left(v_{110}^{T,z}\right)^2, \quad (3)$$

$$G = C_{44}, \quad (4)$$

$$B = (C_{11} + 2C_{12})/3, \quad (5)$$

式中 C_{11} , C_{12} 和 C_{44} 为三维五模超材料弹性矩阵的 3 个独立弹性系数, $v_{110}^{T,xy}$, $v_{110}^{L,xy}$ 和 $v_{110}^{T,z}$ 分别为压缩波与剪切波沿 $[110]$ (ΓK) 方向的相速度, $\rho = f\rho_0$ 是三维五模超材料的等效密度, f 和 ρ_0 分别为三维五模超材料的填充率与组成材料的质量密度. 因此, 图 2 中三维五模超材料的品质因数约为 251 .

3 数值仿真结果及讨论

基于有限元方法, 对于四种类型的三维各向异性非对称双锥五模超材料的原胞进行能带结构数值计算, 并对其第一带隙、单模区域、品质因数的变化规律进行了系统研究, 结果如图 3—图 7 所示.

对于模型 1, 当 P 点沿 X 轴方向移动时, 其第一带隙与单模区域随移动距离的变化如图 3 所示. 当 $O_xP/a = 0.25$ 时, 五模超材料的原胞为各向同性的三维结构, 这时 P 点的各向异性程度最小; 当 $O_xP/a = 0.05$ 或 0.45 时, 各向异性程度最大. 随着各向异性程度的增加, 第一带隙的下界频率从 8.845 kHz 上升到 11.753 kHz, 对应的上界频率从 9.538 kHz 上升到 14.846 kHz, 其相对带宽从 0.148 增加到 0.233 , 大约增加了 57.4% . 单模区域的下界频率在 0.457 与 0.601 kHz 之间变化, 对应的上界频率在 1.938 与 2.333 kHz 之间变化, 其相对带宽从 1.344 减小到 1.053 , 大约减小了 21.6% .

对于模型 2, 当 P 点沿 Y 轴方向移动时, 各向异性五模超材料的第一带隙与单模区域随移动距离的变化如图 4 所示. 随着各向异性程度的增加, 第一带隙的下界频率在 8.017 — 11.27 kHz 之间变

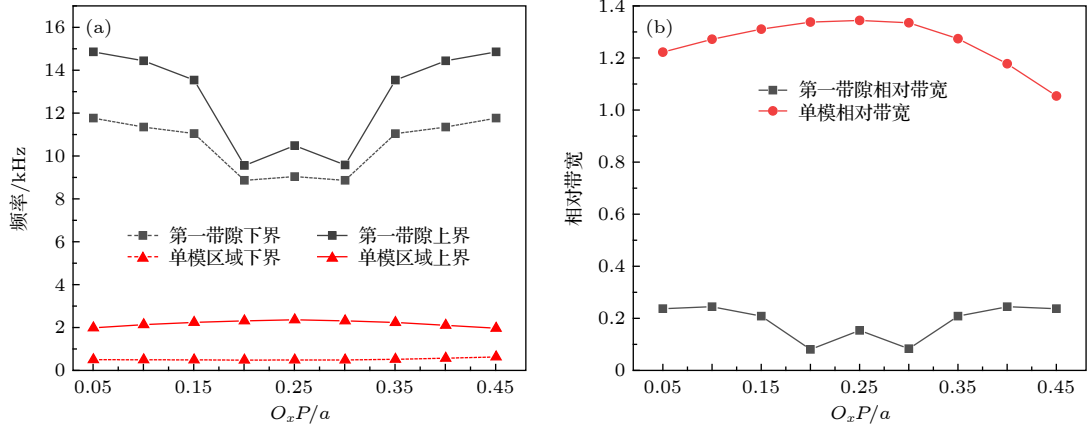


图 3 模型 1 的第一带隙与单模区域的 (a) 上下界频率; (b) 相对带宽

Fig. 3. (a) The upper and lower edges and (b) relative bandwidth of the first phononic band gaps and single mode area of model 1.

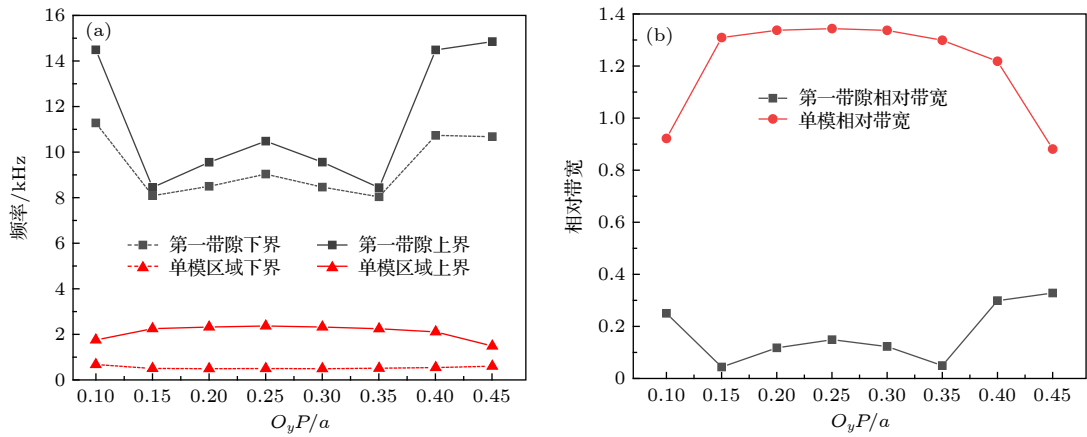


图 4 模型 2 的第一带隙与单模区域的 (a) 上下界频率; (b) 相对带宽

Fig. 4. (a) The upper and lower edges and (b) relative bandwidth of the first phononic band gaps and single mode area of model 2.

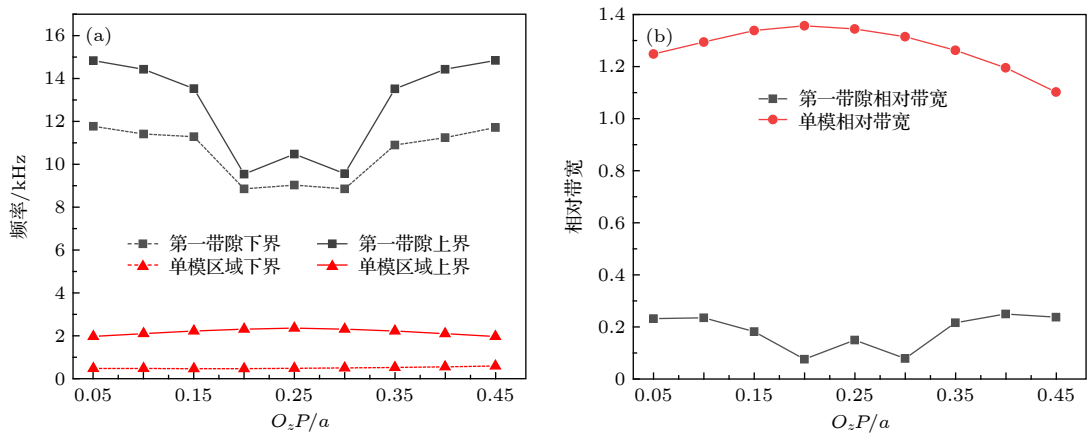


图 5 模型 3 的第一带隙与单模区域的 (a) 上下界频率; (b) 相对带宽

Fig. 5. (a) The upper and lower edges and (b) relative bandwidth of the first phononic band gaps and single mode area of model 3.

化, 对应的上界频率在 8.421—14.852 kHz 之间变化, 其相对带宽从 0.147 增加到 0.328, 大约增加了 123%. 单模区域的下界频率从 0.457 kHz 上升到 0.632 kHz, 对应的上界频率从 2.333 kHz 减小

到 1.448 kHz, 其相对带宽从 1.344 减小到 0.881, 大约减小了 34.4%. 单模区域相对带宽在各向异性程度最大处明显下降的主要原因是由于第一带隙相对带宽增大, 单模区域的频率范围受到压缩.

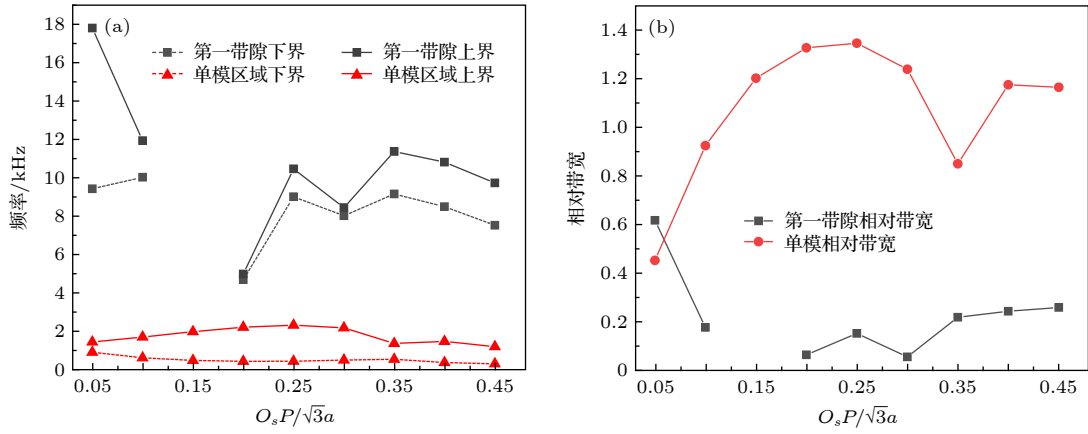


图 6 模型 4 的第一带隙与单模区域的 (a) 上下界频率; (b) 相对带宽

Fig. 6. (a) The upper and lower edges and (b) relative bandwidth of the first phononic band gaps and single mode area of model 4.

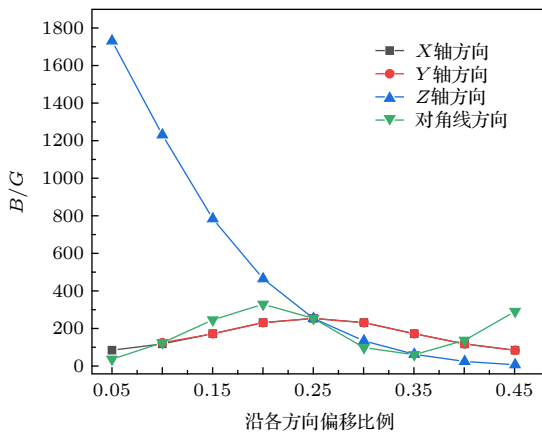


图 7 各向异性对非对称双锥五模超材料品质因数的影响
Fig. 7. The influence of anisotropy on the figure of merit of asymmetric double-cone pentamode materials.

对于模型 3, 当 P 点沿 Z 轴方向移动时, 各向异性五模超材料的第一带隙与单模区域随移动距离的变化如图 5 所示. 随着各向异性程度的增加, 第一带隙的下界频率从 8.839 kHz 上升到 11.764 kHz, 对应的上界频率从 9.527 kHz 上升到 14.847 kHz, 其相对带宽从 0.148 增加到 0.236, 大约增加了 59.4%. 单模区域的下界频率在 0.438—0.562 kHz 之间变化, 对应的上界频率在 1.941—2.333 kHz 之间变化, 其相对带宽从 1.344 减小到 1.101, 大约减小了 18.1%.

对于模型 4, 当 P 点沿对角线方向移动时, 各向异性五模超材料的第一带隙与单模区域随移动距离的变化如图 6 所示. 随着各向异性程度的增加, 第一带隙的下界频率在 4.701—10.034 kHz 之间变化, 对应的上界频率在 4.992—17.794 kHz 之间变化, 其相对带宽从 0.147 增加到 0.256, 约增加了

74.1%. 单模区域的下界频率在 0.322—0.923 kHz 之间变化, 对应的上界频率在 1.217—2.333 kHz 之间变化, 其相对带宽从 1.344 减小到 0.449, 大约减小了 66.6%. 在 $O_s P / \sqrt{3}a = 0.05$ 处, 第一带隙的拓宽对单模区域的上界产生了较强的影响, 使单模区域的上界频率下降, 同时其下界频率上升, 从而单模区域相对带宽在此处下降比较明显.

“流体”特性是非对称双锥五模超材料的主要特性之一, 而品质因数是衡量这种性质的重要参数. 各向异性对五模超材料品质因数的影响如图 7 所示, 由于三维非对称双锥五模超材料的各向异性变化是沿着四个不同的方向, 因此对原胞内四个双锥基元高度的影响是不同的, 即不同方向上的各向异性对三维非对称双锥五模超材料能带结构的影响也不相同. 当 P 点沿 X 轴与 Y 轴方向变化时, 其品质因数最大值约为 251; 当 P 点沿 Z 轴变化时, 其品质因数最大值约为 1730; 当 P 点沿对角线方向变化时, 其品质因数最大值约为 327. 相对于各向同性三维非对称双锥五模超材料, 各向异性三维非对称双锥五模超材料的品质因数可以增加近 6.9 倍.

4 结 论

通过调节基元窄直径连接点 P 的位置, 构建了四种各向异性三维非对称双锥五模超材料模型. 由于不同方向上的各向异性变化对非对称双锥结构基元参数的影响不尽相同, 其能带结构与品质因数也会受到不同程度的影响, 本文给出了各向异性程度与三维非对称双锥五模超材料带隙特性、单模

区域与品质因数的关系. 与各向同性三维非对称双锥五模超材料相比, 各向异性三维非对称双锥五模超材料第一带隙的相对带宽可被有效地拓宽, 品质因数可增大 6.9 倍. 研究结果可为基于三维非对称双锥五模超材料的声学器件设计提供参考. 由于各向异性的引入, 使得三维非对称双锥五模超材料的结构更为复杂, 样件加工的需求进一步提高, 整体稳定性也有所降低, 因此对具有较高稳定性且易加工的新型三维五模超材料原胞结构还需进一步研究探索.

参考文献

- [1] Milton G W, Cherkaev A V 1995 *J. Eng. Mater. Technol.* **117** 483
- [2] Kadic M, Bückmann T, Stenger N, Thiel M, Wegener M 2012 *Appl. Phys. Lett.* **100** 191901
- [3] Chen Y, Liu X N, Xiang P, Hu G K 2016 *Adv. Mech.* **46** 201609 (in Chinese) [陈毅, 刘晓宁, 向平, 胡更开 2016 *力学进展* **46** 201609]
- [4] Wang Z H, Cai C X, Chu Y Y, Liu G S 2017 *Opto-Electron. Eng.* **44** 34 (in Chinese) [王兆宏, 蔡成欣, 楚杨阳, 刘广顺 2017 *光电工程* **44** 34]
- [5] Milton G W, Briane M, Willis J R 2006 *New J. Phys.* **8** 248
- [6] Norris A N 2008 *Proc. R. Soc. A* **464** 2411
- [7] Scandrett L C, Boisvert J E, Howarth T R 2010 *J. Acoust. Soc. Am.* **127** 2856
- [8] Scandrett L C, Boisvert J E, Howarth T R 2011 *Wave Motion* **48** 505
- [9] Boisvert J E, Scandrett L C, Howarth T R 2016 *J. Acoust. Soc. Am.* **139** 3404
- [10] Schittny R, Bückmann T, Kadic M, Wegener M 2013 *Appl. Phys. Lett.* **103** 231905
- [11] Gokhale N H, Cipolla J L, Norris A N 2012 *J. Acoust. Soc. Am.* **132** 4
- [12] Kadic M, Bückmann T, Schittny R, Gumbsch P, Wegener M 2014 *Phys. Rev. Appl.* **2** 054007
- [13] Cai C X, Wang Z H, Li Q W, Xu Z, Tian X G 2015 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **48** 175103
- [14] Huang Y, Lu X G, Liang G Y, Xu Z 2016 *Phys. Lett. A* **380** 1334
- [15] Wang G, Jin L, Zhang L, Xu Z 2017 *AIP Adv.* **7** 025309
- [16] Tian Y, Wei Q, Cheng Y, Xu Z, Liu X J 2015 *Appl. Phys. Lett.* **107** 221906
- [17] Sun Z Y, Jia H, Chen Y, Wang Z, Yang J 2018 *J. Acoust. Soc. Am.* **143** 1029
- [18] Chen Y, Liu X N, Hu G K 2015 *Sci. Rep.* **5** 15745
- [19] Chen J G, Liu J H, Liu X Z 2018 *AIP Adv.* **8** 085024
- [20] Zhang X D, Chen H, Wang L, Zhao Z G, Zhao A G 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 134303 (in Chinese) [张向东, 陈虹, 王磊, 赵志高, 赵爱国 2015 *物理学报* **64** 134303]
- [21] Lu Z M, Cai L, Wen J H, Wen X S 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 174301 (in Chinese) [陆智森, 蔡力, 温激鸿, 温熙森 2016 *物理学报* **65** 174301]
- [22] Chen H Y, Chan C T 2007 *Appl. Phys. Lett.* **91** 183518
- [23] Chen H Y, Chan C T 2010 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **43** 113001
- [24] Cai C X, Han C, Wu J F, Wang Z H, Zhang Q H 2019 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **52** 045601
- [25] Wang Z H, Cai C X, Li Q W, Li J, Xu Z 2016 *J. Appl. Phys.* **120** 024903
- [26] Bückmann T, Schittny R, Thiel M, Kadic M, Milton G W, Wegener M 2014 *New J. Phys.* **16** 033032

SPECIAL TOPIC—Metamaterials

Phononic band structure and figure of merit of three-dimensional anisotropic asymmetric double-cone pentamode metamaterials*

Cai Cheng-Xin^{1)2)3)†} Chen Shao-Geng³⁾ Wang Xue-Mei³⁾

Liang Jun-Yan³⁾ Wang Zhao-Hong⁴⁾

1) (*Key Laboratory of Grain Information Processing and Control (Henan University of Technology), Ministry of Education, Zhengzhou 450001, China*)

2) (*Henan Provincial Key Laboratory of Grain Photoelectric Detection and Control, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, China*)

3) (*College of Information Science and Engineering, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, China*)

4) (*School of Electronic and Information Engineering, Key Laboratory for Physical Electronics and Devices of the Ministry of Education, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*)

(Received 12 March 2020; revised manuscript received 28 April 2020)

Abstract

Pentamode metamaterial (PM) is a kind of artificial microstructure extremum material with solid morphology and fluid properties proposed by Milton and Cherkaey. By decoupling the compression and the shear waves, the periodic structure is difficult to be compressed, but the shear deformation occurs easily. Theoretically, acoustic metamaterials consisting of such periodic arrangement of structural units can achieve complete matching with water. Therefore, the characteristics of adjustable modulus anisotropy, small stuffing rate and broadband endow the PMs with excellent acoustic control ability, which has attracted more attention of researchers.

In this paper, the narrow-diameter intersection point P ($0.25a, 0.25a, 0.25a$) of an isotropic three-dimensional PM selected as the reference point in four different directions (X-axis, Y-axis, Z-axis and body diagonal). When the P -point moves, the farther the P -point is, the greater the degree of anisotropy is. The introduction of anisotropy will cause the structural bifurcation of the three-dimensional PM to change structural parameters, and the structural parameters are important factors affecting the band characteristics of the three-dimensional PM of Bragg scattering. In order to study the influence of anisotropy on the band structure and pentamode properties of three-dimensional asymmetric double-cone PMs, we use the finite element simulation software COMSOL to calculate the primitive-cell of three-dimensional anisotropic PMs under Bloch boundary conditions.

By adjusting the position of P point, four different types of three-dimensional anisotropic asymmetric double-cone PMs are constructed. Since the anisotropy changes in different directions have different effects on the parameters of the asymmetric double-cone structure, the band characteristics and the pentamode

* Project supported by the Key Scientific Research Project of Henan Education Department, China (Grant Nos. 20A140008, 15A120007), the Key Laboratory of Grain Information Processing and Control (Henan University of Technology), Ministry of Education (Grant No. KFJJ-2020-106), and the High-level Talent Fund of Henan University of Technology, China (Grant No. 31401120).

† Corresponding author. E-mail: cxcai2018@haut.edu.cn

characteristics will also receive different degrees of influence. In this paper, the relationship between the degree of anisotropy and the band gap characteristics, single-mode region and figure of merit (FOM) are given, and the result can provide guidance for the design of asymmetric double-cone PM acoustic device. Compared with the isotropic double-cone PMs, the relative bandwidth of the first band gap of the anisotropic double-cone PMs can be broadened to 123%, and the FOM can be increased to 6.9 times. Due to the introduction of anisotropy, Due to the introduction of anisotropy, the structure of three-dimensional asymmetric double-cone PMs are more complex, the demand for sample fabrication is further improved, and the stability of PMs also reduced. Therefore, PMs with high stability and easy to be fabricated still needs further research and exploration.

Keywords: pentamode metamaterial, anisotropy, phononic band gap, broadband

PACS: 43.20.+g, 43.40.+s, 43.50.+y

DOI: [10.7498/aps.69.20200364](https://doi.org/10.7498/aps.69.20200364)