

## 级联四波混频相干反馈控制系统量子纠缠特性\*

仲银银<sup>1)</sup> 潘晓州<sup>1)</sup> 荆杰泰<sup>1)2)†</sup>

1) (华东师范大学, 精密光谱科学与技术国家重点实验室, 上海 200062)

2) (山西大学, 极端光学协同创新中心, 太原 030006)

(2020年1月7日收到; 2020年4月22日收到修改稿)

本文在级联四波混频结构基础上, 利用光学分束器作为反馈控制器理论构造了一种相干反馈控制系统. 考虑相干反馈回路中光束传输损耗以及原子对光束吸收损耗, 通过计算系统的协方差矩阵以及利用部分转置正定判据, 分析了该系统在不同反馈强度、增益以及相位下的纠缠特性. 结果表明, 系统存在真正的三组份纠缠, 但是反馈控制器过度反馈会破坏系统的三组份量量子纠缠特性. 另外, 将相位设为 $180^\circ$ , 通过适当改变增益大小以及在 $0.1-0.4$ 范围内调节分束器反射率的大小可以增强系统的量子纠缠程度. 本文为实验上基于级联四波混频相干反馈控制系统制备多组份纠缠奠定理论基础, 在量子通信领域有着潜在应用.

关键词: 四波混频, 相干反馈, 量子纠缠

PACS: 03.67.Bg, 42.50.-p

DOI: 10.7498/aps.69.20200042

## 1 引言

多组份纠缠作为量子信息技术中一种重要资源, 已经在量子计算<sup>[1,2]</sup>以及量子通信<sup>[3,4]</sup>等领域有着广泛应用. 它对未知量子态的密集编码<sup>[5,6]</sup>、量子隐形传态<sup>[7]</sup>以及量子纠缠变换<sup>[8]</sup>等量子信息技术的实现非常关键. 目前, 在诸多产生多组份纠缠的方案中<sup>[9-14]</sup>, 常用方法是将多个单模压缩态通过光学分束器网络结构线性混合来产生<sup>[9]</sup>, 这个方法的缺陷是可扩展性低. 另外, 最新的研究趋势是通过时间和频率复用方式实现大尺度纠缠<sup>[15,16]</sup>. 四波混频过程由于具有强非线性相互作用效应, 输出光场自然分离以及空间多模特性等优点<sup>[17]</sup>, 被认为是一个非常具有前景的光学参量放大器, 它可以利用多种级联结构或者空间结构的泵浦光来产生多组份量量子纠缠<sup>[18-22]</sup>. 最近一篇工作报道了通过空间结构泵浦在单个铷原子系综内同时激发七个四

波混频过程, 结果产生六组份量量子纠缠态, 并且发现系统的纠缠结构可灵活配置<sup>[22]</sup>, 这让四波混频系统在未来量子通讯领域有了更大的应用潜力. 光束的纠缠数量决定着量子通信的信息容量. 然而除了提高纠缠的组份, 高度纠缠的量子网络同样是量子计算和量子通信的核心, 因此如何优化提高量子系统的纠缠特性也很重要. 近期国内的一篇实验研究通过采用带有楔角晶体的非简并光学参量放大器, 产生了纠缠度高达 $8.4$  dB的纠缠态<sup>[23]</sup>.

反馈控制是经典控制的重要策略之一<sup>[24]</sup>, 它通过将输出信号反馈到原系统中对系统进行有效调控. 它也被用于量子系统实现量子相干反馈控制<sup>[25-27]</sup>, 对量子态进行操控. 量子相干反馈控制过程由于不涉及测量, 不会在系统中引入额外测量噪声, 已经被应用于量子误差校正<sup>[28]</sup>以及增强光场量子关联特性<sup>[29]</sup>等. 最近, 我们小组在实验上实现了基于单个四波混频过程的相干反馈控制系统, 并且证明了反馈控制器能够对两个输出光场的量子

\* 国家自然科学基金(批准号: 11874155, 91436211, 11374104, 10974057)、上海市自然科学基金(批准号: 17ZR1442900)、上海市科学技术发展基金(批准号: 17JC1400401)和国家基础研究计划(批准号: 2016YFA0302103)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: jtjing@phy.ecnu.edu.cn

关联特性进行有效调控甚至增强<sup>[30]</sup>. 受此启发, 本文将反馈策略应用于级联四波混频过程, 理论分析了反馈对系统的多组份量子纠缠特性的调控.

## 2 级联四波混频相干反馈控制系统理论模型

图 1(a) 为级联四波混频相干反馈控制系统模型, 其中单四波混频过程的能级结构如图 1(b) 所示, 在该非线性过程中两个泵浦光子 (紫色线) 转化为一个探针光子 (红色线) 和一个共轭光子 (蓝色线), 其中,  $5S_{1/2}$  与  $5P_{1/2}$  之间跃迁所对应的波长约为 795 nm,  $5S_{1/2}$  的两个超精细能级 ( $F=2$  与  $F=3$ ) 的间距约为 3.036 GHz. 为了构造基于级联四波混频过程的相干反馈控制系统, 首先, 一束强泵浦光 ( $P_1$ ) 和一束弱探针光 ( $\hat{a}_1$ ) 以一个小角度耦合注入到第一个铷原子蒸汽池 (cell<sub>1</sub>) 中, 经历过第一个四波混频过程后, 探针光被放大, 同时产生一束新的共轭光 ( $\hat{b}_2$ ). 放大后的探针光束 ( $\hat{a}_2$ ) 与泵浦光 ( $P_2$ ) 以一个小角度耦合注入到第二个铷原子蒸汽池 (cell<sub>2</sub>) 中. 同样产生了一束被放大的探针光 ( $\hat{a}_3$ ) 和一束新的共轭光 ( $\hat{b}_4$ ). 这样的过程构成一个级联四波混频系统, 其中两个四波混频过程的输入输出关系可以表示为:

$$\begin{aligned} \text{cell}_1 : \begin{cases} \hat{a}_2 = \sqrt{G_1}\hat{a}_1 + \sqrt{G_1 - 1}\hat{b}_2^\dagger, \\ \hat{b}_2^\dagger = \sqrt{G_1 - 1}\hat{a}_1 + \sqrt{G_1}\hat{b}_1^\dagger, \end{cases} \\ \text{cell}_2 : \begin{cases} \hat{a}_3 = \sqrt{G_2}\hat{a}_2 + \sqrt{G_2 - 1}\hat{b}_3^\dagger, \\ \hat{b}_3^\dagger = \sqrt{G_2 - 1}\hat{a}_2 + \sqrt{G_2}\hat{b}_4^\dagger, \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $G_1$  和  $G_2$  分别对应两个四波混频过程的强度增益,  $\hat{a}_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 为探针光的湮灭算符,  $\hat{b}_j^\dagger$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ) 为共轭光的产生算符. 将共轭光 ( $\hat{b}_4$ ) 入

射到光学分束器中, 后端输出光场 ( $\hat{c}_2$ ) 通过反馈回路注入到第一个四波混频过程的共轭光端口, 构成一个级联四波混频相干反馈控制系统. 光学分束器的输入输出关系表示为

$$\begin{aligned} \hat{c}_1 &= \sqrt{1 - k}\hat{b}_4 + \sqrt{k}\hat{\nu}_1, \\ \hat{c}_2 &= -\sqrt{k}\hat{b}_4 + \sqrt{1 - k}\hat{\nu}_1, \quad \hat{b}_1 = e^{i\phi}\hat{c}_2, \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $k$  是光学分束器的反射率,  $\phi$  是在反馈回路中引入的相位延迟,  $\hat{\nu}_1$  为真空态,  $\hat{c}_1$  和  $\hat{c}_2$  为光学分束器的两个输出光场.

本文考虑了两种损耗, 即反馈过程中的光束传输损耗和铷原子蒸汽池内部对共轭光束与探针光束的吸收损耗<sup>[31,32]</sup>. 如图 2 中的绿色虚线框所示, 可以用光学分束器来模拟反馈路径上光束在自由空间的传输损耗. 分束器通过引入一个真空态 ( $\hat{\nu}_6$ ), 将真空噪声引入到被反馈的共轭光当中<sup>[33]</sup>. 光束在铷原子蒸汽池中发生的四波混频过程可分为增益放大与损耗两个部分, 原子对共轭光束与探针光束的吸收影响也可以简单地用上述的分束器模型来刻画<sup>[34]</sup>. 如图 2 中的两个紫红色虚线框所示, 光学分束器端口引入的真空态信号用湮灭算符表示为  $\hat{\nu}_j$  ( $j=2, 3, 4, 5$ ), 将  $\hat{\nu}_j$  当作损耗分别引入到探针光束与共轭光束当中, 则:

$$\begin{aligned} \hat{a}'_2 &\rightarrow \sqrt{L_1}\hat{a}_2 + \sqrt{1 - L_1}\hat{\nu}_2, \\ \hat{b}'_2 &\rightarrow \sqrt{L_2}\hat{b}_2 + \sqrt{1 - L_2}\hat{\nu}_3, \\ \hat{a}'_3 &\rightarrow \sqrt{L_3}\hat{a}_3 + \sqrt{1 - L_3}\hat{\nu}_4, \\ \hat{b}'_4 &\rightarrow \sqrt{L_4}\hat{b}_4 + \sqrt{1 - L_4}\hat{\nu}_5, \\ \hat{c}'_2 &\rightarrow \sqrt{\eta}\hat{c}_2 + \sqrt{1 - \eta}\hat{\nu}_6, \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $L_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) 表示铷池内部的光束传输效率,  $\eta$  为反馈路径上的光束传输效率. 令  $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = L$ , 利用 (1) 式—(3) 式, 消除中间

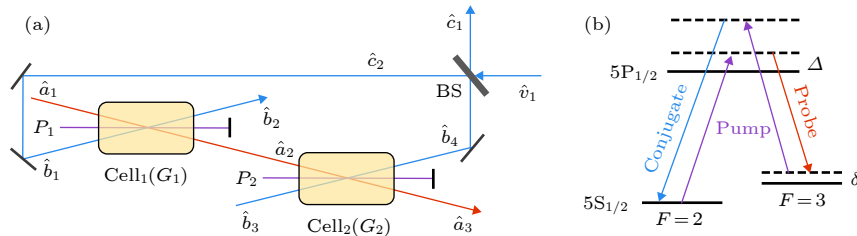


图 1 (a) 级联四波混频相干反馈控制系统简图; (b)  $^{85}\text{Rb}$  原子 D1 线的双  $\Lambda$  型跃迁能级结构图能级图.  $\Delta$  对应单光子失谐,  $\delta$  对应双光子失谐

Fig. 1. (a) The scheme of coherent feedback control system based on the cascade four wave mixing processes; (b) The Double- $\Lambda$  type transition energy-level diagram of  $^{85}\text{Rb}$  D1 line.  $\Delta$  corresponds to one-photon detuning,  $\delta$  corresponds to two-photon detuning.

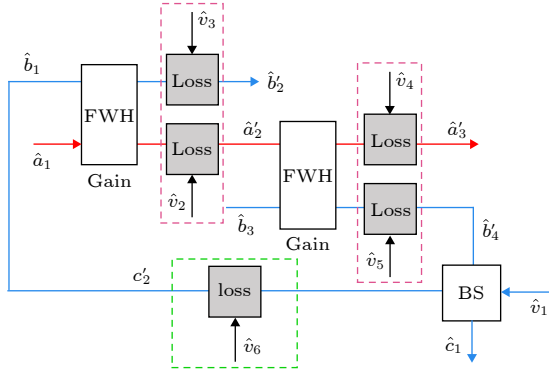


图2 级联四波混频相干反馈控制系统. 绿色虚线框为反馈回路中的光传输损耗模型, 紫红色虚线框为原子吸收损耗模型  
 Fig. 2. The coherent feedback system based on the cascaded four wave mixing processes. The green dashed frame is the optical transmission loss model in the feedback loop, and the pink dashed frames are the loss model of atomic absorption.

变量后, 可以得到输出光场 ( $\hat{a}'_3, \hat{b}'_2, \hat{c}_1$ ) 与输入光场 ( $\hat{a}_1, \hat{b}_3, \hat{\nu}_1, \hat{\nu}_2, \hat{\nu}_3, \hat{\nu}_4, \hat{\nu}_5, \hat{\nu}_6$ ) 的关系. 在连续变量领域, 一个量子态可以用其正交振幅和相位算符来刻画. 我们用正交振幅与相位算符刻画该级联四波混频相干反馈控制系统中的三个输出光场, 令

$$\begin{aligned}\hat{X}_1 &= \hat{a}'_3 + \hat{a}'_3{}^\dagger, \hat{Y}_1 = -i(\hat{a}'_3 - \hat{a}'_3{}^\dagger), \\ \hat{X}_2 &= \hat{b}'_2 + \hat{b}'_2{}^\dagger, \hat{Y}_2 = -i(\hat{b}'_2 - \hat{b}'_2{}^\dagger), \\ \hat{X}_3 &= \hat{c}_1 + \hat{c}_1{}^\dagger, \hat{Y}_3 = -i(\hat{c}_1 - \hat{c}_1{}^\dagger),\end{aligned}\quad (4)$$

其中正交振幅与相位算符的对易关系为  $[\hat{X}, \hat{Y}] = 2i$  ( $i$  为虚数单位). 那么将系统的输入输出光场的关系转化为正交分量算符形式, 可以得到:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \\ \hat{X}_3 \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} & A_{18} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} & A_{28} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} & A_{38} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{\text{in}}^\text{T}, \quad (5)$$

和

$$\begin{pmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \\ \hat{Y}_3 \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{12} & -A_{13} & A_{14} & -A_{15} & A_{16} & -A_{17} & -A_{18} \\ -A_{21} & A_{22} & A_{23} & -A_{24} & A_{25} & -A_{26} & A_{27} & A_{28} \\ -A_{31} & A_{32} & A_{33} & -A_{34} & A_{35} & -A_{36} & A_{37} & A_{38} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_{\text{in}}^\text{T}, \quad (6)$$

其中

$$O = \frac{1}{1 + e^{-i\phi} \sqrt{(G_1 - 1)(G_2 - 1)\eta k L}}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{X}}_{\text{in}}^\text{T} &= (\hat{X}_{\hat{a}_1}, \hat{X}_{\hat{b}_3}, \hat{X}_{\hat{\nu}_1}, \hat{X}_{\hat{\nu}_2}, \hat{X}_{\hat{\nu}_3}, \hat{X}_{\hat{\nu}_4}, \hat{X}_{\hat{\nu}_5}, \hat{X}_{\hat{\nu}_6})^\text{T}, \\ \hat{\mathbf{Y}}_{\text{in}}^\text{T} &= (\hat{Y}_{\hat{a}_1}, \hat{Y}_{\hat{b}_3}, \hat{Y}_{\hat{\nu}_1}, \hat{Y}_{\hat{\nu}_2}, \hat{Y}_{\hat{\nu}_3}, \hat{Y}_{\hat{\nu}_4}, \hat{Y}_{\hat{\nu}_5}, \hat{Y}_{\hat{\nu}_6})^\text{T},\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}A_{11} &= \sqrt{G_1 G_2 L}, A_{21} = \sqrt{(G_1 - 1)L} - e^{-i\phi} \sqrt{(G_2 - 1)\eta k L^{3/2}}, A_{31} = \sqrt{G_1(G_2 - 1)(1 - k)L}, \\ A_{12} &= \sqrt{(G_2 - 1)L} - e^{-i\phi} \sqrt{(G_1 - 1)\eta k L^{3/2}}, A_{22} = -e^{-i\phi} \sqrt{G_1 G_2 \eta k L}, A_{32} = \sqrt{G_2(1 - k)L}, \\ A_{13} &= e^{-i\phi} \sqrt{(G_1 - 1)G_2 \eta (1 - k)L}, A_{23} = e^{-i\phi} \sqrt{G_1 \eta (1 - k)L}, A_{33} = \sqrt{k} + e^{-i\phi} \sqrt{(G_1 - 1)(G_2 - 1)\eta L}, \\ A_{14} &= \sqrt{G_2(1 - L)L}, A_{24} = -e^{-i\phi} \sqrt{G_1(G_2 - 1)\eta k(1 - L)L}, A_{34} = \sqrt{(G_2 - 1)(1 - k)(1 - L)L}, \\ A_{15} &= 0, A_{25} = \sqrt{1 - L} + e^{-i\phi} \sqrt{(G_1 - 1)(G_2 - 1)\eta k(1 - L)L}, A_{35} = 0, \\ A_{16} &= A_{25}, A_{26} = 0, A_{36} = 0, \\ A_{17} &= -e^{-i\phi} \sqrt{(G_1 - 1)G_2 \eta k(1 - L)L}, A_{27} = -e^{-i\phi} \sqrt{G_1 \eta k(1 - L)L}, A_{37} = \sqrt{(1 - k)(1 - L)}, \\ A_{18} &= e^{-i\phi} \sqrt{(G_1 - 1)G_2(1 - \eta)L}, A_{28} = e^{-i\phi} \sqrt{G_1(1 - \eta)L}, A_{38} = e^{-i\phi} \sqrt{(G_1 - 1)(G_2 - 1)(1 - \eta)(1 - k)L}.\end{aligned}\quad (9)$$

由于量子态的量子特性可以完全被协方差矩阵所描述, 定义正交振幅的协方差为  $\langle \hat{X}_m \hat{X}_n \rangle = \langle \hat{X}_m \hat{X}_n + \hat{X}_n \hat{X}_m \rangle / 2 - \langle \hat{X}_m \rangle \langle \hat{X}_n \rangle$  ( $m, n = 1, 2, 3$ ), 类似也可以得到正交相位的协方差. 系统中  $\hat{a}_1$  和  $\hat{b}_3$  为

真空态注入信号,  $\hat{v}_j$  ( $j = 1, \dots, 6$ ) 为光学分束器端口引入的真空态. 利用 (5) 式—(9) 式, 可以得到系统正交振幅与正交相位的协方差, 并表示为:

$$\begin{aligned} \langle \hat{X}_1^2 \rangle &= \langle \hat{Y}_1^2 \rangle = \frac{1}{B} \{1 + 2L(G_2 - 1) - 2\eta L^3 k(G_1 - 1)(G_2 - 1) + L^2(G_1 - 1)(2G_2 - \eta k + G_2 \eta k) \\ &\quad - 2L(2L - 1) \cos \phi \sqrt{(G_1 - 1)(G_2 - 1)\eta k}\}, \\ \langle \hat{X}_2^2 \rangle &= \langle \hat{Y}_2^2 \rangle = \frac{1}{B} \{1 + 2L(G_1 - 1) + \eta L^2 k(3G_1 - 1)(G_2 - 1) - 2\eta L^3 k(G_1 - 1)(G_2 - 1) - 2L(2L \\ &\quad - 1) \cos \phi \sqrt{(G_1 - 1)(G_2 - 1)\eta k}\}, \\ \langle \hat{X}_3^2 \rangle &= \langle \hat{Y}_3^2 \rangle = \frac{1}{B} \{1 + 2L(G_2 - 1)(k + 1) + L^2(G_1 - 1)(G_2 - 1)[2 + k(\eta - 2)] \\ &\quad + 2L \cos \phi \sqrt{(G_1 - 1)(G_2 - 1)\eta k}\}, \end{aligned} \quad (10)$$

以及

$$\begin{aligned} \langle \hat{X}_1 \hat{X}_2 \rangle &= -\langle \hat{Y}_1 \hat{Y}_2 \rangle = \frac{1}{B} \{2\sqrt{G_1(G_1 - 1)G_2} L^{3/2} - 2\cos \phi \sqrt{G_1 G_2(G_2 - 1)\eta k} L^{3/2}\}, \\ \langle \hat{X}_1 \hat{X}_3 \rangle &= -\langle \hat{Y}_1 \hat{Y}_3 \rangle = \frac{1}{B} \{2L[(G_1 - 1)L + 1] \sqrt{G_2(G_2 - 1)(1 - k)}\}, \\ \langle \hat{X}_2 \hat{X}_3 \rangle &= \langle \hat{Y}_2 \hat{Y}_3 \rangle = \frac{1}{B} \{2\sqrt{G_1(G_1 - 1)(G_2 - 1)(1 - k)} L^{3/2} - 2\cos \phi (G_2 - 1) \sqrt{G_1 \eta k(1 - k)} L^{3/2}\}, \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$B = 1 + (G_1 - 1)(G_2 - 1)\eta k L^2 + 2L \cos \phi \sqrt{(G_1 - 1)(G_2 - 1)\eta k}. \quad (12)$$

下面用得到的公式计算量子纠缠判据, 研究系统的纠缠特性.

### 3 三组份量子纠缠特性

自从将部分转置正定 (PPT) 判据推广到连续变量领域后 [35,36], PPT 判据常被用来判断连续变

量系统中光束的多组份纠缠. PPT 判据是描述两组份系统纠缠特性的充分必要判据 [37], 如果系统的转置协方差矩阵的最小辛本征值小于 1, 那么系统存在两组份纠缠. 对于  $N$  组份系统, 若要验证真正的  $N$  组份纠缠, 则需要验证  $2^{N-1} - 1$  个可能的二分情况. 如果所有的二分情况不可分离, 就可以证明系统产生了真正的  $N$  组份纠缠态. 对于该级联四波混频相干反馈控制系统产生的三组份光束, 共有三个可能的  $1 \times 2$  划分, 分别为  $\hat{a}'_3 |(\hat{b}'_2, \hat{c}_1)\rangle$ ,  $\hat{b}'_2 |(\hat{a}'_3, \hat{c}_1)\rangle$ ,  $\hat{c}_1 |(\hat{a}'_3, \hat{b}'_2)\rangle$ . 系统的协方差矩阵表示为

$$CM = \begin{pmatrix} \langle \hat{X}_1^2 \rangle & 0 & \langle \hat{X}_1 \hat{X}_2 \rangle & 0 & \langle \hat{X}_1 \hat{X}_3 \rangle & 0 \\ 0 & \langle \hat{Y}_1^2 \rangle & 0 & \langle \hat{Y}_1 \hat{Y}_2 \rangle & 0 & \langle \hat{Y}_1 \hat{Y}_3 \rangle \\ \langle \hat{X}_1 \hat{X}_2 \rangle & 0 & \langle \hat{X}_2^2 \rangle & 0 & \langle \hat{X}_2 \hat{X}_3 \rangle & 0 \\ 0 & \langle \hat{Y}_1 \hat{Y}_2 \rangle & 0 & \langle \hat{Y}_2^2 \rangle & 0 & \langle \hat{Y}_2 \hat{Y}_3 \rangle \\ \langle \hat{X}_1 \hat{X}_3 \rangle & 0 & \langle \hat{X}_2 \hat{X}_3 \rangle & 0 & \langle \hat{X}_3^2 \rangle & 0 \\ 0 & \langle \hat{Y}_1 \hat{Y}_3 \rangle & 0 & \langle \hat{Y}_2 \hat{Y}_3 \rangle & 0 & \langle \hat{Y}_3^2 \rangle \end{pmatrix}. \quad (13)$$

将 (10) 式—(12) 式代入到上述协方差矩阵当中, 并且对矩阵进行部分转置处理, 可以求得这三种二分情况的最小辛本征值. 如果三种二分情况的最小辛本征值都小于 1, 便认为每一束输出光都与另外两束输出光存在纠缠, 证明系统产生了真正的三组份纠缠态. 此外, 最小辛本征值越小, 说明光束之间的纠缠程度越好 [38]. 下面令  $\eta = 0.98, L = 0.95$ , 研究这三种二分情况的最小辛本征值随相位、增益以及反射率的变化.

图 3(a)—图 3(c) 描绘的是三种二分情况的最小辛本征值随相位和反射率的变化关系, 等高线上的值为最小辛本征值, 令  $G_1 = G_2 = 3$ . 从图中可以看出,  $\phi$  在  $0-360^\circ$  范围内, 三种二分情况的最小辛本征值随着反射率  $k$  变化而变化, 当  $0 < k < 0.8$  时, 三种二分情况的最小辛本征值都小于 1, 这表明系统产生了真正的三组份纠缠. 但是当  $k$  大于 0.8 时, 如图 3(b) 所示, 存在最小辛本征值大于 1 的区域, 表明在该  $\phi$  和  $k$  范围内  $\hat{b}'_2$  和  $(\hat{a}'_3, \hat{c}_1)$  之间不再纠缠. 此外, 从图 3(a) 和图 3(c) 可以看到, 随着反射率  $k$  的增大,  $\hat{a}'_3$  和  $(\hat{b}'_2, \hat{c}_1)$  以及  $\hat{c}_1$  和  $(\hat{a}'_3, \hat{b}'_2)$  这两种二分情况的最小辛本征值也趋向于 1. 这表明光学分束器的过度反馈会使系统不再存在真正的三组份纠缠. 结合图 1(a), 可以理解为, 当反射率  $k$  为 1 时, 共轭光  $\hat{b}_4$  全部被反馈到了第一个四波混频过程的输入端口, 输出光场  $\hat{c}_1$  变为真空态, 这使得  $\hat{c}_1$  与另外两个输出光场之间的纠缠结构被破坏, 从而系统不会产生真正的三组份纠缠. 另外对比  $\phi \neq 180^\circ$  时的区域, 从图 3 中还可以看出, 当  $\phi = 180^\circ$  时系统容易获得纠缠程度较高的真正的三组份量量子纠缠态. 对于  $\hat{c}_1 |(\hat{a}'_3, \hat{b}'_2)$  二分情况, 当  $\phi = 180^\circ$  时, 反射率  $k$  越小,  $\hat{c}_1$  和  $(\hat{a}'_3, \hat{b}'_2)$  之间的纠缠程度越高.

从系统光场强度角度来分析相位应设在  $180^\circ$  的成因. 系统无反馈时是一个非相敏的级联四波混频, 它的输出光场强度是恒定的, 而反馈过程引入的相位延迟使得系统变成了相敏系统. 如图 4 所示, 在不同的铷池增益情形下, 系统三个输出光场的强度 ( $\langle \hat{N}_1 \rangle, \langle \hat{N}_2 \rangle, \langle \hat{N}_3 \rangle$ ) 因为干涉效应会随着相位的 变化而发生变化, 并且都是当  $\phi = \pi$  时, 三个输出光场强度达到最大. 这说明在  $\pi$  相位处干涉相长, 使得该级联四波混频相干反馈控制系统在此相位处获得了最大的光场强度增益. 它增强了系统

的非线性相互作用, 并且可以进一步增强光场之间的量子特性. 此外, 对比图 4(a)—图 4(d) 可以发现, 铷池的强度增益大小会影响到  $\pi$  相位处输出光场的强度. 随着  $G_1$  和  $G_2$  值的增大, 输出光场的强度并非越来越强, 而是呈现先增大后减小的趋势. 因此在固定的反射率情况下, 理论上也存在最佳的铷池强度增益使得系统的非线性作用强度最大. 下面固定相位的值, 研究在不同的反射率和铷池增益条件下系统的纠缠特性, 寻找最佳的参数平衡范围.

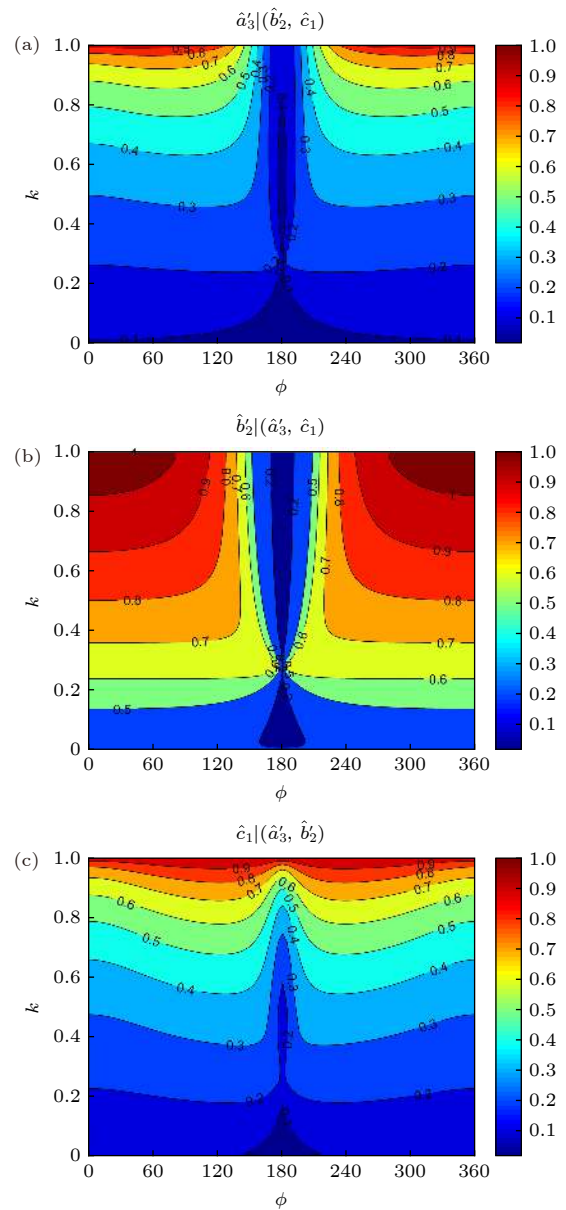


图 3 (a)(b)(c) 分别对应三种二分情况的最小辛本征值与相位和反射率的关系

Fig. 3. (a) (b) (c) correspond to the smallest symplectic eigenvalues of the three bipartitions varying with the value of phase and reflectivity, respectively.

设  $\phi = 180^\circ$ ,  $G_1 = G_2 = G$ , 令  $G$  的范围为 2—5,  $k$  的范围为 0—1, 研究三种二分情况的最小

辛本征值随增益和反射率的变化, 结果如图 5(a)—图 5(c) 所示. 从等高线的值可以看出这三种二分

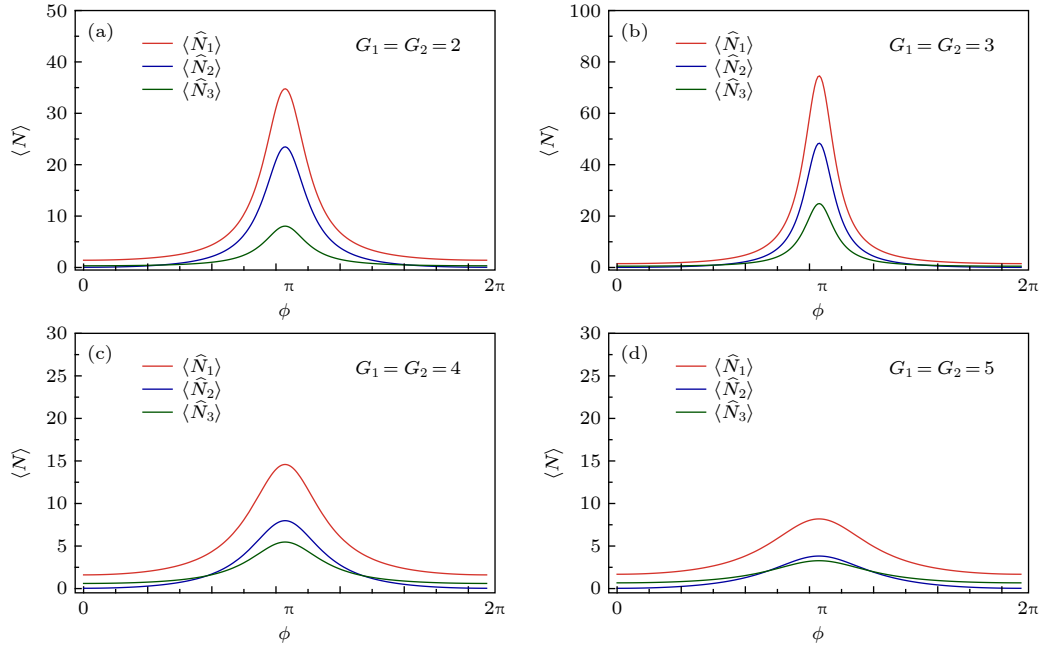


图 4 (a)(b)(c)(d) 分别为四种铷池增益情形下系统的三个输出光场强度随相位  $\phi$  的变化. 这里,  $k = 0.5$ ,  $\hat{N}_1 = \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3'$ ,  $\hat{N}_2 = \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2'$ ,  $\hat{N}_3 = \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1$

Fig. 4. (a)(b)(c)(d) show the relationship between the intensity of three output fields and the phase  $\phi$  under different gains condition, respectively. Here,  $k = 0.5$ ,  $\hat{N}_1 = \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3'$ ,  $\hat{N}_2 = \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2'$ ,  $\hat{N}_3 = \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1$ .

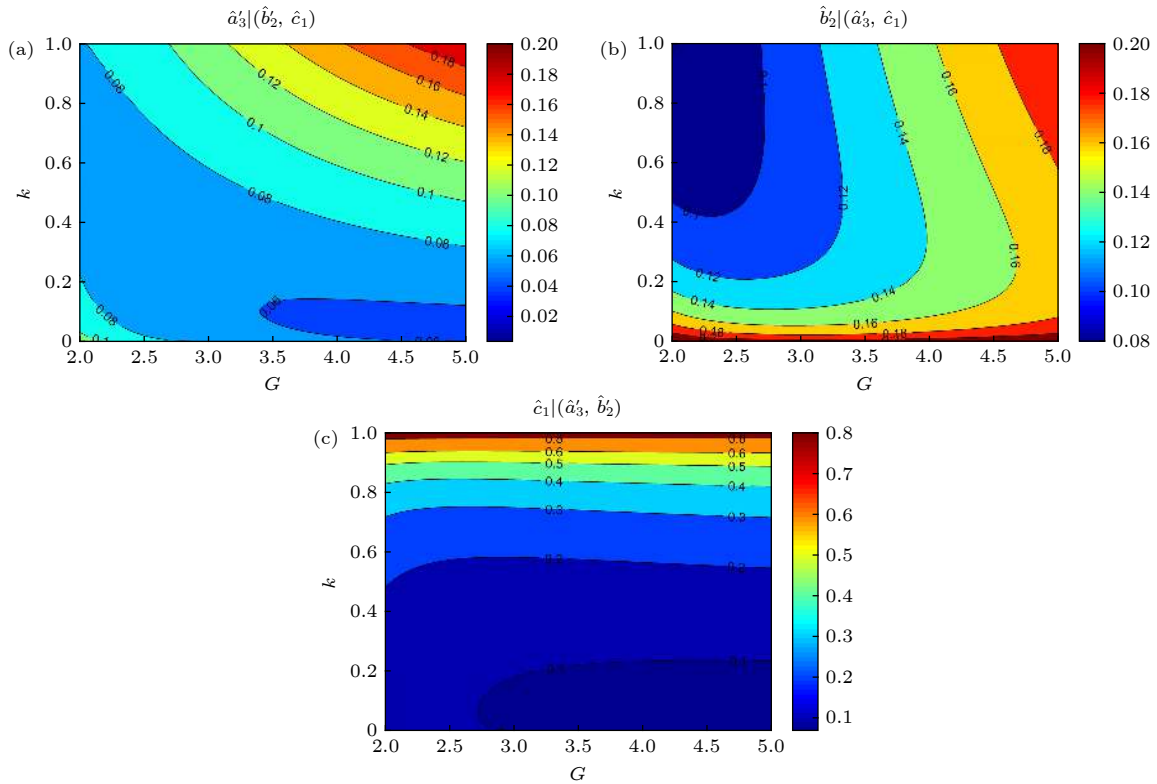


图 5 (a)(b)(c) 分别对应三种二分情况的最小辛本征值与增益和反射率的关系

Fig. 5. (a) (b) (c) correspond to the smallest symplectic eigenvalues of the three bipartitions varying with the value of gain and reflectivity, respectively.

情况的最小辛本征值都小于 1, 这说明系统在该增益范围内, 随着反射率  $k$  的变化系统一直存在真正的三组份纠缠. 此外,  $\hat{a}'_3 |(\hat{b}'_2, \hat{c}_1)$  和  $\hat{b}'_2 |(\hat{a}'_3, \hat{c}_1)$  这两种二分情况的最小辛本征值不大于 0.2, 表明  $\hat{a}'_3$  和  $(\hat{b}'_2, \hat{c}_1)$  以及  $\hat{b}'_2$  和  $(\hat{a}'_3, \hat{c}_1)$  之间有着较好的量子纠缠程度. 如图 5(a) 所示, 当增益  $G$  在 3.5—5 的范围内时,  $k$  越小,  $\hat{a}'_3$  和  $(\hat{b}'_2, \hat{c}_1)$  之间纠缠程度越好, 但是在此增益范围内辛本征值随着  $k$  的变化相比于  $G$  在 2—3.5 时的变化更明显. 考虑到反馈控制器在一定范围内对系统进行操控时, 若要保持系统稳定的纠缠状态, 理论上应该控制两个铷池增益的大小在 2—3.5 范围. 图 5(b) 的情况与图 5(a) 相反,  $G$  越小,  $k$  越大, 辛本征值越小, 这时  $\hat{b}'_2$  和  $(\hat{a}'_3, \hat{c}_1)$  之间的纠缠程度越好. 对于  $\hat{c}_1 |(\hat{a}'_3, \hat{b}'_2)$  情况, 在 2—5 的  $G$  值范围内, 随着反射率  $k$  逐渐变大,  $\hat{c}_1$  和  $(\hat{a}'_3, \hat{b}'_2)$  之间纠缠程度明显降低, 这与图 3(c) 所示的结果相符.

为了更加直观地看出反射率  $k$  对这三种二分情况的量子纠缠程度的影响, 令  $\phi = 180^\circ$ , 画出  $G = 3$  和  $G = 5$  情形下系统三种二分情况的最小辛本征值与反射率  $k$  的变化关系. 当分束器的反射率  $k$  为 0 时, 相当于无反馈, 若随着  $k$  的增大, 最小辛本征值减小, 即可说明系统的量子纠缠特性可以被优化. 从图 6 中可以看出, 随着  $k$  在 0—1 范围内变化, 系统一直存在真正的三组份纠缠. 并且, 反射率  $k$  的增大对  $\hat{b}'_2$  和  $(\hat{a}'_3, \hat{c}_1)$  之间的纠缠程度有所增强,  $G$  越小, 增强越明显. 但是对于  $\hat{c}_1 |(\hat{a}'_3, \hat{b}'_2)$  情况而言,  $k$  的增大对  $\hat{c}_1$  和  $(\hat{a}'_3, \hat{b}'_2)$  之间纠缠程度有着较大的负面影响. 当  $k = 1$  时,  $\hat{c}_1$  和  $(\hat{a}'_3, \hat{b}'_2)$  的最

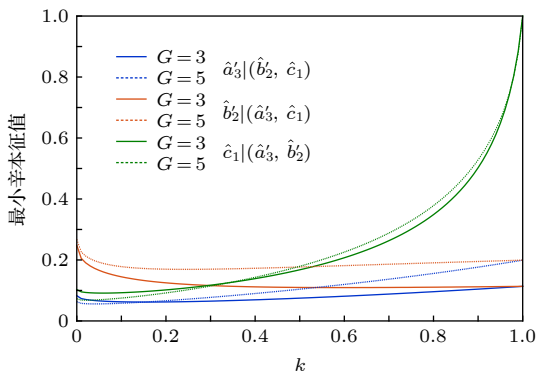


图 6 当  $\phi$  取  $180^\circ$  及  $G = 3$  和 5 时, 三种二分情况的最小辛本征值与反射率的关系

Fig. 6. The smallest symplectic eigenvalues of the three bipartitions vary with reflectivity when  $\phi$  is taken the value of  $180^\circ$  and  $G = 3, 5$ .

小辛本征值不再小于 1, 此时系统也不再存在真正的三组份纠缠. 最后从总体上考虑, 为了使级联四波混频相干反馈控制系统产生纠缠程度较高的真正三组份量量子纠缠, 相位应设为  $180^\circ$ , 通过适当改变增益大小以及在 0.1—0.4 范围内调节分束器反射率的大小, 达到对该系统量子纠缠特性进行有效调控的目的.

## 4 结 论

本文基于级联四波混频过程构造了一种相干反馈控制系统, 在考虑了两种损耗情况下理论计算研究了该系统的量子纠缠特性. 利用部分转置正定判据证明了该相干反馈控制系统能够产生真正的三组份纠缠, 但是反馈控制器的过度反馈会破坏系统的三组份量量子纠缠特性. 结果表明将相位设为  $180^\circ$ , 通过适当改变增益大小以及在 0.1—0.4 范围内调节分束器反射率的大小可以增强系统的量子纠缠程度. 因为小组之前已经在实验上成功构建了基于单个四波混频过程的相干反馈控制系统<sup>[30]</sup>, 并且通过级联方案产生多光束已经在实验上实现<sup>[39]</sup>, 参考这样的实验水平, 本文的计算与分析结果将为实验上对多组份量量子纠缠进行相干反馈调控提供可靠的理论依据.

## 参考文献

- [1] DiVincenzo D P 1995 *Science* **270** 255
- [2] Lloyd S, Braunstein S L 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 1784
- [3] Braunstein S L, Loock P van 2005 *Rev. Mod. Phys.* **77** 513
- [4] Weedbrook C, Pirandola S, Garcia-Patrón R, Cerf N J, Ralph T C, Shapiro J H, Lloyd S 2012 *Rev. Mod. Phys.* **84** 621
- [5] Bennett C H, Wiesner S J 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 2881
- [6] Jing J, Zhang J, Yan Y, Zhao F, Xie C, Peng K 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 167903
- [7] Yonezawa H, Braunstein S L, Furusawa A 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 110503
- [8] Jia X, Su X, Pan Q, Gao J, Xie C, Peng K 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 250503
- [9] Yonezawa H, Aoki T, Furusawa A 2004 *Nature* **431** 430
- [10] Loock P van, Braunstein S L 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 3482
- [11] Coelho A S, Barbosa F A S, Cassemiro K N, Villar A S, Martinelli M, Nussenzeig P 2009 *Science* **326** 823
- [12] Armstrong S, Wang M, Teh R Y, Gong Q, He Q, Janousek J, Bachor H A, Reid M D, Lam P K 2015 *Nat. Phys.* **11** 167
- [13] Cassemiro K N, Villar A S 2008 *Phys. Rev. A* **77** 022311
- [14] Daems D, Cerf N J 2010 *Phys. Rev. A* **82** 032303
- [15] Yokoyama S, Ukai R, Armstrong S C, et al. 2013 *Nat. Photonics* **7** 982
- [16] Roslund J, de Araújo R M, Jiang S, Fabre C, Treps N 2014 *Nat. Photonics* **8** 109

- [17] McCormick C F, Boyer V, Arimondo E, Lett P D 2007 *Opt. Lett.* **32** 178
- [18] Wang W, Cao L, Lou Y, Du J, Jing J 2018 *Appl. Phys. Lett.* **112** 034101
- [19] Lv S, Jing J 2018 *Opt. Commun.* **424** 63
- [20] Lv S, Jing J 2017 *Phys. Rev. A* **96** 043873
- [21] Wang H, Zheng Z, Wang Y, Jing J 2016 *Opt. Express* **24** 23459
- [22] Zhang K, Wang W, Liu S, Pan X, Du J, Lou Y, Yu S, Lv S, Treps N, Fabre C, Jing J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 090501
- [23] Zhou Y, Jia X, Li F, Xie C, Peng K, 2015 *Opt. Express* **23** 4952
- [24] Bechhoefer J 2005 *Rev. Mod. Phys.* **77** 783
- [25] Wiseman H M, Milburn G J 1994 *Phys. Rev. A* **49** 4110
- [26] Nelson R J, Weinstein Y, Cory D, Lloyd S 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 3045
- [27] Lloyd S 2000 *Phys. Rev. A* **62** 022108
- [28] Kerckhoff J, Nurdin H I, Pavlichin D S, Mabuchi H 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 040502
- [29] Iida S, Yukawa M, Yonezawa H, Yamamoto N, Furasawa A 2012 *IEEE Trans. Autom. Control* **57** 2045
- [30] Pan X, Chen H, Wei T, Zhang J, Marino A M, Treps N, Glasser R T, Jing J 2018 *Phys. Rev. B* **97** 161115
- [31] Jasperse M, Turner L D, Scholten R E 2011 *Opt. Express* **19** 3765
- [32] Fox M 2006 *Quantum Optics: An Introduction* (New York: Oxford University Press)
- [33] Wiseman H M, Jones S J, Doherty A C 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 140402
- [34] Jasperse M 2010 *M. S. Thesis* (Melbourne: The University of Melbourne)
- [35] Simon R 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2726
- [36] Duan L M, Giedke G, Cirac J I, Zoller P 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2722
- [37] Werner R F, Wolf M M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3658
- [38] Barbosa F A S, Coelho A S, Muñoz-Martínez L F, et al. 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 073601
- [39] Qin Z, Cao L, Wang H, Marino A M, Zhang W, Jing J 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 023602

## Quantum entanglement in coherent feedback system based on the cascaded four wave mixing processes\*

Zhong Yin-Yin<sup>1)</sup> Pan Xiao-Zhou<sup>1)</sup> Jing Jie-Tai<sup>1)2)†</sup>

1) (State Key Laboratory of Precision Spectroscopy, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

2) (Collaborative Innovation Center of Extreme Optics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

( Received 7 January 2020; revised manuscript received 22 April 2020 )

### Abstract

Based on the cascaded four wave mixing processes, a coherent-feedback control system is constructed by utilizing a linear beam splitter as the feedback controller. Considering the loss of optical propagation in the coherent feedback loop and the absorption effect of Rb vapor cells to beams, we theoretically investigate the entanglement properties of this system under different feedback ratio, gain and phase by calculating the covariance matrix of system and applying the positivity under partial transpose (PPT) criterion to all possible bipartitions. The result shows that the genuine tripartite entanglement exists in the coherent feedback control system, but the entanglement structure of system will be destroyed by the excessive feedback. In addition, when the phase is  $\pi$ , we find that the tripartite entanglement can be enhanced by changing the gains and the reflectivity of the beam splitter in the range of 0.1 to 0.4. The results pave the way for manipulating multipartite entanglement by coherent feedback control and have potential application in quantum communication.

**Keywords:** four wave mixing, coherent feedback, quantum entanglement

**PACS:** 03.67.Bg, 42.50.-p

**DOI:** 10.7498/aps.69.20200042

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11874155, 91436211, 11374104, 10974057), the Natural Science Foundation of Shanghai, China (Grant No. 17ZR1442900), the Development of Science and Technology Foundation of Shanghai, China (Grant No. 17JC1400401), and the National Basic Research Program of China (Grant No. 2016YFA0302103).

† Corresponding author. E-mail: [jtjing@phy.ecnu.edu.cn](mailto:jtjing@phy.ecnu.edu.cn)