

# 线性引力论的引力磁分量及其磁效应

郝迪 郭三栋<sup>†</sup> 马智远 惠宇廷

(西安邮电大学电子工程学院, 西安 710121)

(2019年11月1日收到; 2020年4月13日收到修改稿)

根据广义相对论, 弱场近似条件下引力场中不仅含有经典的牛顿引力场, 还存在一种类比于磁场概念的引力“磁”场, 引力磁场的命名借用了电动力学中磁场的概念. 为了研究引力磁场的物理性质和它引发的一些关联效应, 本文首先从线性爱因斯坦方程出发, 利用相似变换的方法从方程的二级张量场中分解出了引力的“磁”分量并定义了引力磁场; 在此基础上考虑了一种通有匀速流体的环状微管模型, 通过电动力学的分析方法研究了远离微管区域的引力磁场分布特征, 重点在计算过程中改进了以往对这类环状模型引力磁场的计算方法, 表明了这类模型的引力磁场远场分布模式与磁偶极子磁场的远场分布类似; 之后利用类磁场的性质研究了引力磁场的动力学特征, 首次研究了测试粒子在线性时变引力磁场及余弦时变引力磁场中的运动规律, 同时通过设计一种具有双层结构且通有加速流动流体的环状微管模型改进了前人对时变引力磁场中引力感应、惯性系拖曳现象的研究办法, 从更清晰的角度用更简单的数学通过引力电磁理论研究和展示了引力感应现象和广义相对论中的惯性系拖曳现象. 全文为引力磁场及其关联效应的研究提供了一些新的方法和思路.

**关键词:** 线性引力论, 环状微管模型, 引力磁场, 引力磁效应

**PACS:** 04.20.Cv, 04.25.-g, 04.80.Cc

**DOI:** 10.7498/aps.69.20191673

## 1 引言

描述弱引力场规律的线性爱因斯坦方程在数学形式上是一个非齐次的波动方程, 它是爱因斯坦场方程在弱场近似条件下的结果. 1918年, Lense 和 Thirring 在求解线性爱因斯坦方程时发现, 这样一个与电磁场 d'Alembert 方程相似的引力场方程若满足适当的变换条件可以分解成与 Maxwell 方程内容相似的 4 个独立方程<sup>[1]</sup>, 它们分别对应了电场和磁场各自的散度及旋度方程. 由于从引力场方程中分解出了引力的磁分量, 那么引力理论中便引入一种不同于牛顿引力场的新形式场, 将其称作引力磁场 (gravitomagnetic field), 引力的磁效应后来也被统称作 Lense-Thirring(L-T) 效

应<sup>[1,2]</sup>. 引力磁场的研究热度持续至今, 人们根据引力磁场与经典磁场的对应关系相继建立了“引力洛伦兹力”、“引力电动势”、“引力感应”等全新的物理概念, 并据此更为简便地解释了广义相对论的惯性系拖曳效应<sup>[3]</sup>, 同时人们还设计了一系列实验来验证引力的磁效应, 很多实验都直接或间接地证明了引力磁场及其连带效应的真实性, 详见文献 [4–8].

引力磁场是弱引力场问题中的一个新颖且重要的物理概念, 而通过一些具体的物理模型来研究引力磁场的性质是解决实际弱场问题的重要手段. 截至目前, 研究者设计了多种物理模型对引力磁场的空间分布模式以及动力学效应进行研究. 在场的分布模式方面, Ruggiero<sup>[2]</sup> 设计了模拟太阳系行星轨道的刚性旋转圆环模型, 研究了圆环远场及环内的引力磁场分布情况. Mashhoon 等<sup>[9]</sup> 总结过低速

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: sandongyuwang@163.com

旋转引力源引力磁场分布模式的一般形式. 文献 [10] 研究了刚性旋转球壳模型的引力磁场, 还基于开普勒轨道模型研究了大质量旋转环的引力磁场. 在引力磁效应方面, Tajmar 和 Assis<sup>[3]</sup> 通过一种旋转球壳模型研究了引力磁场的磁感应效应, 该研究有助于引力磁感应效应在球壳类模型中的推广. 同时, Bini 等<sup>[11]</sup> 通过一种连通圆环模型研究了引力磁感应效应, 并总结了这类感应效应与法拉第电磁感应之间的差异, Tartaglia 和 Ruggiero<sup>[12]</sup> 还研究了大质量旋转体的引力磁感应效应. 在动力学性质方面, 文献 [11, 13–15] 均研究了被测物体在引力磁场中的运动规律, 同时 Mashhoon<sup>[16]</sup> 通过一种可激发线性时变引力磁场的引力源模型研究了时变引力磁场对测试陀螺仪进动现象的影响.

然而, 在以上围绕具体模型展开的引力磁场及引力磁效应的研究中, 很多都存在一些不可避免的缺陷. 例如 Ruggiero<sup>[2]</sup> 的模型是仅针对宏观行星运动轨道所设计的, 并没有说明其结论是否适用于微观或其他环状模型的情形, 且他们对环状模型引力磁场远场分布模式的求解过程过于复杂, 不具备应用的普适性; Tajmar 和 Assis<sup>[3]</sup> 用于研究引力磁感应效应的球壳模型由于结构的复杂性而不利于内环受力情况的分析, 同时该研究缺乏对内外闭合环路与引力感应过程之间相关性的演示; 而在引力磁场动力学效应的研究中, 国内外一直缺乏对时变引力磁场中粒子运动规律的研究, 而粒子在时变引力磁场中的运动又是弱引力场研究中的一个重要部分. 为了弥补旧模型的缺陷, 简化以往研究过程中的复杂计算从而改进以往的研究手段, 本文基于 Ruggiero<sup>[2]</sup> 及 Tajmar 和 Assis<sup>[3]</sup> 设计的模型, 建立了一类以环状微管结构为基础的简单物理模型, 这类模型受自然界中最小磁单元——磁偶极子的启发, 具有可激发引力磁场的基本单元属性, 在引力磁效应的研究中会更具有普适性. 利用这类微管模型, 本文重新研究了引力磁场的空间分布模式, 且在此过程中极大地简化了以往对这类环状模型引力磁场的计算过程, 并首次对这类模型的场分布作了仿真, 这对今后环状模型引力磁场的计算和研究提供了便利. 在此基础上, 设计了一种具有双层结构的微管模型, 通过这种相对简单的结构, 利用比 Tajmar 和 Assis<sup>[3]</sup> 设计的球壳模型更为简单的数学研究了引力磁感应效应, 并据此更为方便地解释了引力电磁理论背景下的惯性系拖曳现象, 有望为

地面实验室中研究引力磁感应现象及惯性系拖曳现象提供便利的理论基础. 除此之外, 本文还首次研究了中性粒子在线性时变及余弦时变引力磁场中的运动轨迹, 从而弥补了以往引力磁场动力学研究中关于粒子运动方面的缺陷.

## 2 引力的磁效应

### 2.1 引力场方程中的引力磁分量

广义相对论中, 引力场的爱因斯坦方程写作<sup>[17]</sup>

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

其中,  $R_{\mu\nu}$  是描述时空弯曲程度的里奇张量,  $T_{\mu\nu}$  代表物质场的能动张量,  $G$  为引力常数,  $c$  为光速. 时空近似平直 ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}$ ) 时, 采用弱场近似条件<sup>[17]</sup>, (1) 式将退化成一个线性偏微分方程, 表示为

$$\partial^\sigma \partial_\sigma \bar{\gamma}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\gamma}_{\mu\nu} - \nabla^2 \bar{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (3)$$

其中  $\bar{\gamma}_{\mu\nu} \equiv \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\gamma$ . (2) 式是几何单位制下微分几何学的表达形式, (3) 式是比较常见的国际单位制笛卡尔坐标下的表达形式. 可以看到 (3) 式描述的是一个非齐次的经典波动方程, 它在数学形式上与电磁场的 d'Alembert 方程一致.

令物质场的能动张量为一个 4 维行向量, 表示为

$$T_{\mu\nu} = (T_{00}, T_{01}, T_{02}, T_{03}) = (T_{00}, T_{0i}),$$

其中,  $T_{00} = \rho_m c^2$  代表能量密度,  $T_{0i} = -j_m c$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 代表能流密度. 同时令二级张量场  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  也为一个 4 维行向量, 表示为

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = (\bar{\gamma}_{00}, \bar{\gamma}_{01}, \bar{\gamma}_{02}, \bar{\gamma}_{03}) = (\bar{\gamma}_{00}, \bar{\gamma}_{0i}).$$

现对  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  的时空分量进行类电磁学的相似变换, 定义引力场的广义标势  $\phi = \frac{c^2}{4}\bar{\gamma}_{00}$  和广义矢势  $\mathbf{A}_g = -\frac{c^2}{2}\bar{\gamma}_{0i}$ <sup>[2, 11]</sup>, 这样一来 (3) 式将分解成两个关于  $\phi$  和  $\mathbf{A}_g$  的 d'Alembert 方程, 表示为

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho_m, \quad (4)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{1}{2} \mathbf{A}_g \right) - \nabla^2 \left( \frac{1}{2} \mathbf{A}_g \right) = \frac{4\pi G}{c} \mathbf{j}_m. \quad (5)$$

显然, (4) 式及 (5) 式分别对应了电动力学中

电磁场标势和矢势所满足的波动方程, 此时引力场的类电磁学性质已经显现出来. 进一步可用引力场的广义标势和广义矢势定义引力场的两个场量如下:

$$\mathbf{g} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{A}_g \right), \quad (6)$$

$$\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{A}_g. \quad (7)$$

采用常见的洛伦兹规范条件, (4) 式及 (5) 式将分解成 Maxwell 方程的基本形式, 表示为

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = 4\pi G \rho_m, \quad (8a)$$

$$\nabla \times \mathbf{g} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{b} \right), \quad (8b)$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \mathbf{b} \right) = 0, \quad (8c)$$

$$\nabla \times \left( \frac{1}{2} \mathbf{b} \right) = \frac{4\pi G}{c} \mathbf{j}_m + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{g}. \quad (8d)$$

方程 (8a)—(8d) 就是引力电磁理论 (gravitoelectromagnetism, GEM) 的 4 个基本方程, 本文得到的结论与 Mironov 和 Mironov<sup>[18]</sup> 以及 Demir<sup>[19]</sup> 给出的结论在形式上基本一致, 而内容上的差异源于对广义标势和广义矢势定义的不同, 不同的定义方式得到的结论会有所差别. 从类比角度来看, 方程中的  $\mathbf{b}$  就是对应于磁场概念的引力磁场. 从 (8a) 式—(8d) 式分析中可知,  $\mathbf{b}$  是对引力场广义矢势  $\mathbf{A}_g$  求旋度的结果, 而引力场广义矢势  $\mathbf{A}_g$  是线性爱因斯坦方程场量  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  空间分量的  $-c^2/2$  倍, 所以引力磁场  $\mathbf{b} = -c^2/2 \cdot (\nabla \times \bar{\gamma}_{0i})$ , 可见引力磁场就是场量  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  的一个分量, 它是线性引力论的一个特有结果.

需要注意的是, 虽然通过相似变换法从场量  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  中分解出了引力场的广义标势  $\phi$  与广义矢势  $\mathbf{A}_g$ , 但这种变换都是在张量场  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  的脚标  $\mu = 0$  的前提下进行的, 即忽略了  $\mu = i (i = 1, 2, 3)$  的情形. 但实际上由于广义相对论的引力场方程本质上是一个张量场方程, 这区别于我们所研究的 4 维引力矢势  $(\phi, \mathbf{A}_g)$ , 所以要说明这种类电磁学变换所适用的情形. 事实上, (3) 式的希尔伯特推迟解为<sup>[20]</sup>

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(ct - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (9)$$

对于这个解, 符合类电磁学变换的是  $\bar{\gamma}_{00}$  与  $\bar{\gamma}_{0i}$ , 剩下的矩阵元素表示为  $\bar{\gamma}_{ij}$ . 我们考虑何时可以忽略  $\bar{\gamma}_{ij}$  的情形,  $\bar{\gamma}_{ij}$  可表示为

$$\bar{\gamma}_{ij} = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{ij}(ct - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (10)$$

当引力源由一种具有有限范围且运动缓慢的松散物质组成时, 那么其能动张量的  $i, j$  分量表示为  $T_{ij} \sim \rho_m v_i v_j + p \delta_{ij}$ <sup>[20]</sup>, 其中  $p$  为应力. 由于物质源的运动缓慢, 所以  $|\mathbf{v}| \ll c$ , 再考虑到物质为松散介质, 所以应力  $p$  在数量级上也远小于光速  $c$ , 则  $T_{ij} \sim \rho_m v_i v_j + p \delta_{ij} \ll c$ . 那么根据 (10) 式,  $\bar{\gamma}_{ij} = O(c^{-4})$ , 此时这些无穷小项就可以忽略不计<sup>[20]</sup>. 所以总结为, 当所研究的引力源满足①具有有限范围; ②运动速度缓慢,  $|\mathbf{v}| \ll c$ ; ③应力  $p$  数量级很小的条件时, 可以不考虑含  $c^{-4}$  的无穷小场量, 那么此时的张量场  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  将表示为

$$\bar{\gamma}_{00} = \frac{4\phi}{c^2}, \quad \bar{\gamma}_{0i} = -\frac{2\mathbf{A}_g}{c^2}, \quad \bar{\gamma}_{ij} = O(c^{-4}). \quad (11)$$

在略去  $O(c^{-4})$  的条件下, 表征 GEM 理论的 (8) 式便是成立的. 而对于地面实验室环境, 地球系统以及太阳系等弱引力场情形而言, 这类限定条件总是满足的, 这也是可以利用空间实验及地面实验来验证引力磁效应的原因.

## 2.2 引力磁场及其关联效应的实验验证

对引力磁场及引力磁效应的实验验证是证明广义相对论正确的一个途径, 也是表明引力磁场具备可研究意义的必要条件. 这类验证最初是通过以 GP-B 实验卫星为首的空间实验展开的, 其主要的目标就是以预期 1% 的精度验证广义相对论中的惯性系拖曳效应<sup>[4,5]</sup>. 这种惯性系拖曳体现为旋转引力源会对其周围的惯性参考系产生拖曳力, 其强度与引力源的自转角动量 (或角速度) 成正比关系. 因为惯性系拖曳可以看作是惯性系质点受到了转动参考系中科里奥利力的作用, 根据等效原理这种惯性力对应于电动力学中被测电荷受到的磁洛伦兹力, 所以转动参考系的角速度就对应了磁场的概念, 这也是将引力磁场与转动参考系角速度相关联的一个原因, 本文 4.1 节中关于测试粒子在弱引力场中运动规律的内容对这一点作了进一步说明. GP-B 实验卫星的目的就是想通过测量惯性系拖曳的结果来验证引力磁效应, 从而验证广义相对论的正确性, 但因为实验最终的精度只控制了 19%<sup>[4]</sup>, 并没有达到预期的 1%, 所以整个实验的结论并没有得到广泛的认可. 而截至目前, 能够精准表明引力磁场及引力磁效应真实存在的证据可

以体现在以下几个实验和推论当中:

1) 比较受关注的一项实验是由 Tajmar 等<sup>[8]</sup>进行的液氦低温超导铌环旋转实验, 这是研究人员首次在地面实验室中检测到了可测量性的引力磁场, 该实验也受到了 GP-B 实验卫星负责人 Everitt 的肯定<sup>[21]</sup>. 根据 de Matos 和 Tajmar<sup>[22]</sup>的理论, 超导铌环中的引力子由于获得了质量从而使旋转的铌环能够产生比以往更强的引力磁场. 研究者将铌环置于液氦低温环境下, 利用伺服电机驱动铌环做绕中心轴旋转的加速运动, 同时在铌环附近多个位置放置了粒子加速度计用以计量拖曳力, 实验结果显示加速度计受到了强烈的拖曳力, 检测到的加速度场的平均值是噪声 (干扰信号) 的 3.3 倍以上. 现普遍认为 de Matos 的理论是正确的, 该实验同时也验证了引力磁场及惯性系拖曳现象的真实性<sup>[8]</sup>;

2) 另一项能够验证引力磁效应的实验是中子-引力干涉实验. 最早由 Aharonov 与 Carmi<sup>[23]</sup>根据等效原理提出引力体系中存在类似于 Aharonov-Bohm(A-B) 效应的 Aharonov-Carmi(A-C) 效应, 即在旋转坐标系中沿闭合路径传播的物质波将获得一个几何相位因子, 该相位因子与旋转坐标系的角速度相关, 在 GEM 理论中这个相位因子就与引力磁场有关. Overhauser 与 Colella<sup>[24]</sup>根据这种推论设计了中子-引力干涉实验, 用于证明中子物质波的 A-C 效应, 由此也能证明引力磁场的真实性. 后来研究者们利用理想晶体硅干涉仪, 在一系列中子干涉实验中观测到了大质量粒子在引力磁场作用下的几何相移<sup>[25]</sup>, 并通过分析干涉仪自身弹性形变引起的系统效应排除了实验误差, 进一步确定了 A-C 效应的正确性和 GEM 理论的正确性;

3) 最近一项关于惯性系拖曳现象的重要实验是由 Krishnan 等<sup>[26]</sup>对脉冲双星系统 PSR J1141-6545 的研究而展开的, 该实验从脉冲双星系统中观测到了比 GP-B 实验卫星更为显著的惯性系拖曳效应. 研究者通过脉冲计时法发现了 PSR J1141-6545 系统轨道参数发生的漂移现象, 为了解释该现象, Krishnan 等<sup>[26]</sup>将广义相对论的 L-T 进动效应的影响引入到系统中, 因此这类表征轨道参数漂移的数据得到了很好的解释. 通过大量的数值模拟, 实验最终表明从这类脉冲双星系统中观测到了较为明显的惯性系拖曳现象, 也从很好的精度上证实了惯性系拖曳现象的正确性, 弥补了 GP-B 实

验卫星精度性差的缺陷, 同时再次证明了广义相对论的正确性. 对惯性系拖曳现象的证明也说明了引力磁场及其关联效应的真实性, 这一点也将促进人们对引力磁场的研究.

对以往验证引力磁场及其关联效应的实验作了讨论后, 本文重点关注地面实验室中对引力磁效应的研究. 根据 Tajmar 和 de Matos<sup>[27]</sup>已有的实验结论以及建议, 我们将试图建立一些通有超流体的简单环状微管模型来研究引力磁场及其关联效应的性质, 从而为在地面实验室中研究引力磁效应提供一些可行的思路和办法.

### 3 通有匀速流体的环状微管的引力磁场

#### 3.1 环状微管模型的引力磁场远场分布

本节研究匀速旋转圆环的引力磁场远场 (远离场源中心的任意点位置) 分布表达式. 选定匀速旋转圆环模型作为研究对象的原因在于, 电动力学中由小尺度闭合环电流构成的简单磁偶极子单元是自然界中最基本的磁单元, 同样也是静磁场研究中的一个重要物理模型. 假定匀速旋转圆环模型也是静引力磁场的一种基本单元, 从这种基本单元出发可以通过叠加原理得到任何形式的引力磁场分布.

为此, 本文设计了如图 1 所示的圆环模型, 需要说明的是由于在实验上不易实现圆环刚体绕其轴心稳定旋转, 所以本文改用向环状微管内通入匀速流动的均匀流体 (或超流体<sup>[27]</sup>) 来等效匀速旋转圆环模型 (后简称微管模型).

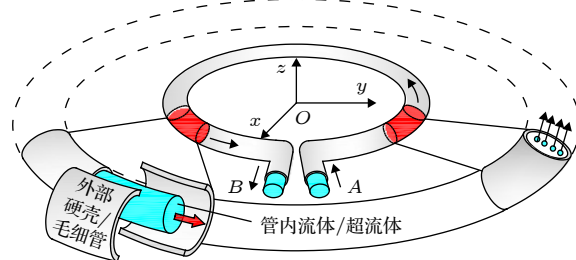


图 1 通有匀速流体的环状微管模型

Fig. 1. The circular microtube model with uniform velocity fluids.

本节旨在得到微管模型引力磁场的远场分布表达式从而研究其空间分布特征. 前面的分析中已经定义了引力场的广义矢势, 而通过求广义矢势

$\mathbf{A}_g$  的旋度就可以得到引力磁场  $\mathbf{b}$  的数学表达式, 所以针对引力磁场的求解要依赖于广义矢势  $\mathbf{A}_g$ . 方程 (5) 所对应的希尔伯特推迟解为

$$\mathbf{A}_g = \frac{2G}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}_m(x', t - r/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (12)$$

在一维环路上, 该推迟解用闭合环路积分表示为

$$\mathbf{A}_g = \frac{2G}{c} \oint_C \frac{\rho_m \mathbf{v}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{l}', \quad (13)$$

其中  $\rho_m = \frac{m}{2\pi R}$  是微管内部流体物质的单位质量密度,  $R$  是微管的半径,  $\mathbf{v}$  是管内流体的切向流速. 被积项中  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'$  以及  $d\mathbf{l}'$  在球面坐标系下表示为:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r = r \sin \theta \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_z, \quad (14)$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{e}_{r'} R = R \cos \phi' \mathbf{e}_x + R \sin \phi' \mathbf{e}_y, \quad (15)$$

$$d\mathbf{l}' = \mathbf{e}_\phi R d\phi' = (-\mathbf{e}_x \sin \phi' + \mathbf{e}_y \cos \phi') R d\phi', \quad (16)$$

则根据 (14) 式及 (15) 式,  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  可以表示为

$$\begin{aligned} & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \\ &= \left[ (r \sin \theta - R \cos \phi')^2 + (R \sin \phi')^2 + (r \cos \theta)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[ r^2 \sin^2 \theta - 2Rr \sin \theta \cos \phi' + R^2 \cos^2 \phi' \right. \\ &\quad \left. + R^2 \sin^2 \phi' + r^2 \cos^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= (r^2 + R^2 - 2Rr \sin \theta \cos \phi')^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

进一步, 得到其倒数形式为

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \left( \frac{R}{r} \right)^2 - \frac{2R}{r} \sin \theta \cos \phi' \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

在远场区考虑到  $r \gg R$ , 则 (17) 式中的  $\left(\frac{R}{r}\right)^2$  项可略去, 则有

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{2R}{r} \sin \theta \cos \phi' \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} [1 - \varepsilon]^{-\frac{1}{2}}, \quad (18)$$

其中,  $\varepsilon = \frac{2R}{r} \sin \theta \cos \phi'$ .

对 (18) 式应用广义二项式定理展开, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} [1 - \varepsilon]^{-\frac{1}{2}} &\approx \frac{1}{r} \left[ 1 + \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot (-\varepsilon) + \frac{1}{2!} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \left( -\frac{1}{2} - 1 \right) \cdot (-\varepsilon)^2 + \dots \right], \quad (19) \end{aligned}$$

略去含  $\varepsilon^2$  项及其之后的所有无穷小项, 只保留 (19) 式的前两项, 则有

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} \left[ 1 + \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot (-\varepsilon) \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{R}{r} \sin \theta \cos \phi' \right]. \quad (20) \end{aligned}$$

将 (16) 式及 (20) 式代入 (13) 式中, 引力磁矢势表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_g &= \frac{2G\rho_m v}{c} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{R}{r} \sin \theta \cos \phi' \right) \\ &\quad \cdot (-\mathbf{e}_x \sin \phi' + \mathbf{e}_y \cos \phi') R d\phi' \\ &= \frac{2GR\rho_m v}{c} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{R}{r^2} \sin \theta \cos \phi' \right) \\ &\quad \cdot (-\mathbf{e}_x \sin \phi' + \mathbf{e}_y \cos \phi') d\phi' \\ &= \frac{2GR\rho_m v}{c} \int_0^{2\pi} \mathbf{e}_y \frac{R}{r^2} \sin \theta \cos^2 \phi' d\phi' \\ &= \frac{2GR\rho_m v}{c} \int_0^{2\pi} \mathbf{e}_y \frac{R}{2r^2} \sin \theta d\phi' \\ &= \frac{2GR\rho_m v}{c} \cdot \frac{\pi R}{r^2} \sin \theta \mathbf{e}_y \\ &= \frac{G}{c} \cdot \frac{mvR}{r^2} \mathbf{e}_\phi \sin \theta. \end{aligned}$$

定义微管内流体的旋转角动量为  $L = mvR$ , 则引力磁矢势用含角动量的形式表示为

$$\mathbf{A}_g = \mathbf{e}_\phi \frac{G}{c} \cdot \frac{L}{r^2} \sin \theta = \frac{G \mathbf{L} \times \mathbf{r}}{c r^3}. \quad (21)$$

利用引力磁场与引力磁矢势的关系  $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{A}_g$ , 计算直角坐标系下微管模型的远场区域引力磁场分布为

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \\ &\quad \times \frac{G \mathbf{L} \mathbf{e}_z \times (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z)}{c (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{G}{c} \left\{ \left[ \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} zyL}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \right] \mathbf{e}_y \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} zxL}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \right] \mathbf{e}_x \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{L(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} x^2 L}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \right] \mathbf{e}_z \right. \\ &\quad \left. - \left[ \frac{L(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} y^2 L}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \right] \mathbf{e}_z \right\}, \end{aligned}$$

在此基础上, 用矢径  $\mathbf{r}$  及其模值代替上式中各分量

的内容,有

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \frac{G}{c} \left[ \frac{3zyL}{r^5} \mathbf{e}_y + \frac{L}{r^3} \mathbf{e}_z - \frac{3x^2L}{r^5} \mathbf{e}_z + \frac{L}{r^3} \mathbf{e}_z \right. \\ &\quad \left. - \frac{3y^2L}{r^5} \mathbf{e}_z + \frac{3zxL}{r^5} \mathbf{e}_x - \frac{3z^2L}{r^5} \mathbf{e}_z + \frac{3z^2L}{r^5} \mathbf{e}_z \right] \\ &= \frac{G}{c} \left[ \frac{3zyL}{r^5} \mathbf{e}_y + \frac{3zxL}{r^5} \mathbf{e}_x + \frac{3z^2L}{r^5} \mathbf{e}_z + \frac{2L}{r^3} \mathbf{e}_z \right. \\ &\quad \left. - \frac{3x^2L}{r^5} \mathbf{e}_z - \frac{3y^2L}{r^5} \mathbf{e}_z - \frac{3z^2L}{r^5} \mathbf{e}_z \right] \\ &= \frac{G}{c} \left[ \frac{3(\mathbf{L} \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{L}}{r^3} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

(22) 式是基于对小尺度环状微管模型引力磁场远场分布模式的求解结果,与 Ruggiero<sup>[2]</sup> 对大尺度质量环模型引力磁场远场分布模式的计算结果类似. 而这两类结果的异同之处则体现在以下几个方面:

1) 模型的目标和适用性不同: Ruggiero<sup>[2]</sup> 的结论是针对宏观行星模型的运动轨道所得到的引力磁场远场分布模式,并未说明这类计算结果是否适用于微观或其他环状模型的情形,是否能够解释其他形式引力磁场的产生机制;而 (22) 式是考虑了一种普遍的可以激发引力磁场的最小引力磁单元——小尺度闭合微管模型,相比于大质量环模型,这种类磁偶极子的微观模型作为本文所假设的基本引力磁单元在引力磁效应的研究中更具有普适性;

2) 方程的物理内容不同: 在 Ruggiero<sup>[2]</sup> 的结论中,与 (22) 式相似的远场结果表示为<sup>[2,9]</sup>

$$\mathbf{B}^{\text{ring}} = \frac{G}{c} \left[ \frac{3(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{s}}{r^3} \right], \quad (r \gg R) \quad (23)$$

其表征了距离中心天体  $R$  处的圆形轨道上由于物体运动产生的远场区的引力磁场. 式中的  $\mathbf{s}$  表示圆形轨道上运动物体的角动量,其单位模值为  $|\mathbf{s}_0| = s_0 = vR$ ,  $v$  为运动物体的轨道线速度;而在 (22) 式中,取代  $\mathbf{s}$  的物理量为微管中流体流动产生的相对于圆环中心的角动量  $\mathbf{L}$ ,其单位模值也为  $vR$ ,但  $v$  作为流体的流速可以被人为调节,从而可以实现对引力磁场强度的调控;

3) 方程的求解过程不同: (22) 式的求解过程避免了在求解引力磁矢势  $\mathbf{A}_g$  的过程中对复杂分式的直接积分,这一点是对 Ruggiero<sup>[2]</sup> 做法的一个改进. 如 (13) 式—(20) 式所示,本文采用了“先近似,

后积分”的办法,先对复杂分式作近似处理,再对简化后的分式进行简单积分. 整个求解过程相比传统的求解过程降低了复杂程度,缩短了计算过程.

单从数学形式上来看, (22) 式类比于磁偶极子磁场在远场空间的分布表达式,所以从定量角度出发可以认为在场的空间分布模式上,通有匀速流体的环状微管模型很好地对应了磁偶极子模型.

### 3.2 微管模型的引力磁场空间分布特征

根据微管模型的引力磁场远场分布表达式以及微管模型与磁偶极子模型的对应关系可以进一步绘制其引力磁场在全空间的分布图像,从而直观地表达微管模型的引力磁场空间分布特征. 如图 2

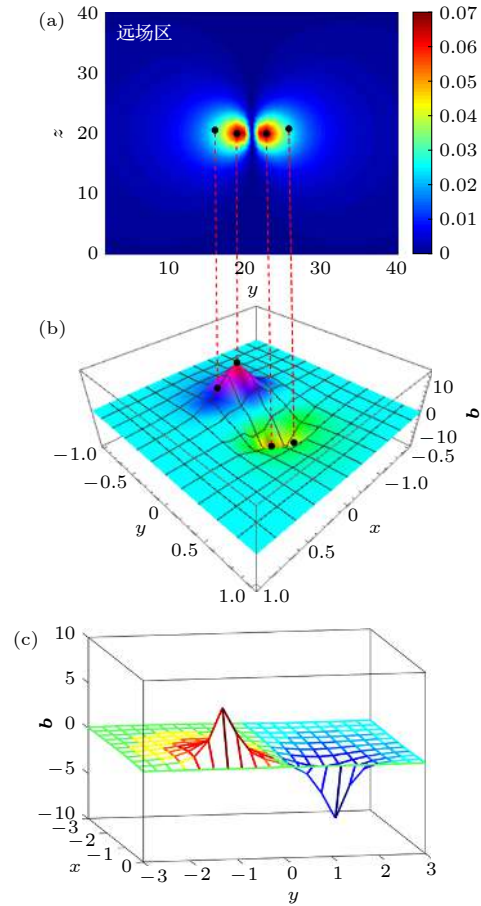


图 2 微管模型引力磁场远场分布特征 (a) 微管模型  $y-z$  平面沿  $y$  方向的引力磁场分布色谱图; (b) 微管模型  $x-y$  平面沿  $y$  方向的引力磁场强度分布特征图; (c) 微管模型  $x-y$  平面沿  $y$  方向上引力磁场强度随  $y$  坐标轴的变化曲线  
Fig. 2. The far-field distribution of GM field in the microtube model: (a) The intensity plots of GM field's along  $y$ -direction in  $y-z$  plane of microtube model; (b) the distribution of GM field's along  $y$ -direction in  $x-y$  plane of microtube model; (c) the  $b$ - $y$  function along  $y$ -direction in  $x-y$  plane of microtube model.

所示, 本文通过仿真手段绘制了微管模型  $y-z$  平面 (与微管垂直的平面) 的引力磁力线分布图,  $x-y$  平面 (与微管平行的平面) 的引力磁场强度色谱图以及相应的三维函数图像. 从仿真图像反映出的信息能够观察到, 这种特殊的分布模式与磁偶极子磁场的分布模式类似, 本文认为不论是从定量关系出发还是从定性关系出发都可以认为微管模型很好地对应了磁偶极子模型, 这与 Ruggiero<sup>[2]</sup> 得到的结论基本一致.

从图 2(a) 的色谱仿真上可以看到微管模型  $y-z$  平面沿  $y$  方向上的引力磁场分布特征. 可以看到在远场区中,  $y$  方向上引力磁场的强度是从微管边缘向远场区域逐步衰减的, 再结合图 2(c) 的曲线可以看到这种衰减速度很快. 对应到 (22) 式所表征的引力磁场远场分布表达式, 代入  $\mathbf{L} = L\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{r} = Lz$ , (22) 式可分解为

$$\mathbf{b} = \frac{G}{c} \left[ \frac{3Lz \cdot (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{L\mathbf{e}_z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (24)$$

令  $x = 0$ , 则得到  $y-z$  平面的引力磁场分布

$$\mathbf{b}_{x=0} = \frac{G}{c} \left[ \frac{3Lz \cdot (y\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z)}{(y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{L\mathbf{e}_z}{(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right], \quad (25)$$

再令  $z = 0$ , 得到微管模型  $y-z$  平面沿  $y$  方向上的引力磁场

$$\mathbf{b}_{x=0, z=0} = -\frac{G}{c} \cdot \frac{L}{y^3} \mathbf{e}_z, \quad (26)$$

其强度为  $\frac{G}{c} \cdot \frac{L}{y^3}$ . 所以在理论层面,  $y$  方向上的引力磁场从微管边缘向远场区呈现  $y^3$  形式的衰减规律, 这一结论与我们的仿真结果相对应.

类似地, 根据图 2(b) 所示的仿真图像可以研究  $x-y$  平面的引力磁场分布特征, 可以看到引力磁场的强度同样也是从微管边缘向远场区域逐步衰减的. 对应到 (22) 式所表征的引力磁场远场分布表达式, 代入  $\mathbf{L} = L\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{r} = Lx$ , (22) 式可写成

$$\mathbf{b} = \frac{G}{c} \left[ \frac{3Lx \cdot \mathbf{r}}{r^5} - \frac{L\mathbf{e}_x}{r^3} \right]. \quad (27)$$

令  $z = 0$ , 则得到  $x-y$  平面的引力磁场分布

$$\mathbf{b}_{z=0} = -\frac{G}{c} \cdot \frac{L}{r^3} \mathbf{e}_z, \quad (28)$$

其强度为  $\frac{G}{c} \cdot \frac{L}{r^3}$ . 所以在理论层面,  $z = 0$  平面上引力磁场从微管边缘向远场区呈现  $r^3$  形式的衰减规

律, 这一结论同样与我们的仿真结果相对应.

另外, 从图 2(b) 及图 2(c) 的仿真图像上可以研究微管环内部引力磁场的分布特征, 可以看到在  $x-y$  平面沿  $y$  方向上, 引力磁场的强度在环内从环边缘向圆心处逐步递减, 圆心处的场强为环内部的最小值, 数值为零. 不论是环外还是环内, 引力磁场的衰减程度都比较剧烈, 引力磁场的最大值总是出现在微管的边缘附近.

## 4 引力磁场的动力学特征及动力学效应

### 4.1 测试粒子在弱引力场中的运动

测试粒子在弱引力场中的运动是引力磁场动力学效应的一个重要的研究内容. 在转动坐标参考系下, 一个测试粒子 (质荷) 将受到惯性离心力和科里奥利力 (Coriolis force) 这两种惯性力<sup>[28]</sup>, 而在 2.2 节中提到的 A-C 效应就是粒子动量与旋转参考系之间的相互作用, 该作用本质上归结于运动物质所受到的科里奥利力<sup>[29]</sup>. A-C 效应中的科里奥利力类比于 A-B 效应中的洛伦兹力 (磁场力), 根据等效原理可认为科里奥利力就是测试粒子在引力磁场中的受力, 其中转动坐标系的旋转角速度  $\boldsymbol{\omega}$  对应了引力磁场  $\mathbf{b}$ . 这也就说明在引力磁场中, 运动的粒子将受到一种类似于磁洛伦兹力的引力洛伦兹力.

现设定一个物理场景, 一个质量为  $m$  的中子作为测试粒子以相对转动参考系为  $\mathbf{v}$  的速度进入到参考系中, 参考系的旋转角速度为  $\boldsymbol{\omega}$ , 则中子受到的惯性力为

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{cen}} + \mathbf{F}_{\text{cor}} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (29)$$

其中,  $\mathbf{F}_{\text{cen}}$  为惯性离心力,  $\mathbf{F}_{\text{cor}}$  为科里奥利力. 参考 Mashhoon 等<sup>[30]</sup> 的做法, 根据等效原理令  $\mathbf{b} = -2\boldsymbol{\omega}$ , 则试探粒子受到的引力洛伦兹力可以表示为

$$\mathbf{F}_{\text{GMF}} = m\mathbf{v} \times \mathbf{b}, \quad (30)$$

所以, 在弱引力场中描述测试粒子的运动方程可以表示为:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g} + m\mathbf{v} \times \mathbf{b}, \quad (31)$$

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{g} + m\mathbf{v} \times \mathbf{b}. \quad (32)$$

而另外一个重要的引力磁效应——引力磁场的耦合效应, 其本质上是自旋粒子与转动参考系之

间的相互作用<sup>[29]</sup>,即在引力磁场  $\mathbf{b}$  是时变的前提下,固定在参考系上的粒子波(物质波)将产生一个与自旋相关的几何相位因子.因此,我们考虑研究测试粒子在时变引力磁场中的运动规律,并绘制粒子在时变引力磁场中的运动轨迹,因为这可能对引力磁场的探测起到有效作用.在时空中,经典牛顿引力场和引力磁场在直角坐标系下展开后表示为:

$$\mathbf{g} = g_x(x, y, z, t) \mathbf{e}_x + g_y(x, y, z, t) \mathbf{e}_y + g_z(x, y, z, t) \mathbf{e}_z, \quad (33)$$

$$\mathbf{b} = b_x(x, y, z, t) \mathbf{e}_x + b_y(x, y, z, t) \mathbf{e}_y + b_z(x, y, z, t) \mathbf{e}_z. \quad (34)$$

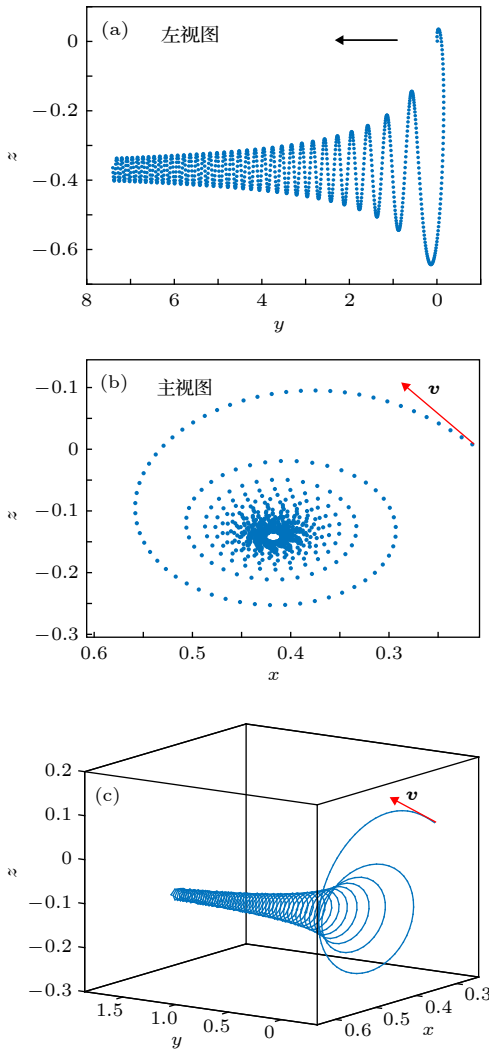


图3 模式一下测试粒子的运动轨迹 (a) 测试粒子在线性时变引力磁场中运动轨迹的左视图; (b) 测试粒子在线性时变引力磁场中运动轨迹的主视图; (c) 测试粒子在线性时变引力磁场中的全空间运动轨迹

Fig. 3. The test-particle's track in linear time-varying GM field: (a) The left view of the test-particle's track; (b) the main view of the test-particle's track; (c) the test-particle's track in the whole space.

位矢  $\mathbf{r}$  与速度  $\mathbf{v}$  在直角坐标系下表示为:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z, \quad (35)$$

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z. \quad (36)$$

将(33)式、(34)式及(35)式代入(32)式中,测试粒子在弱引力场中沿各空间分量  $x, y, z$  方向的动力学方程表示为:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= g_x(x, y, z, t) + \frac{d}{dt}y \cdot b_z(x, y, z, t) \\ &\quad - \frac{d}{dt}z \cdot b_y(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (37)$$

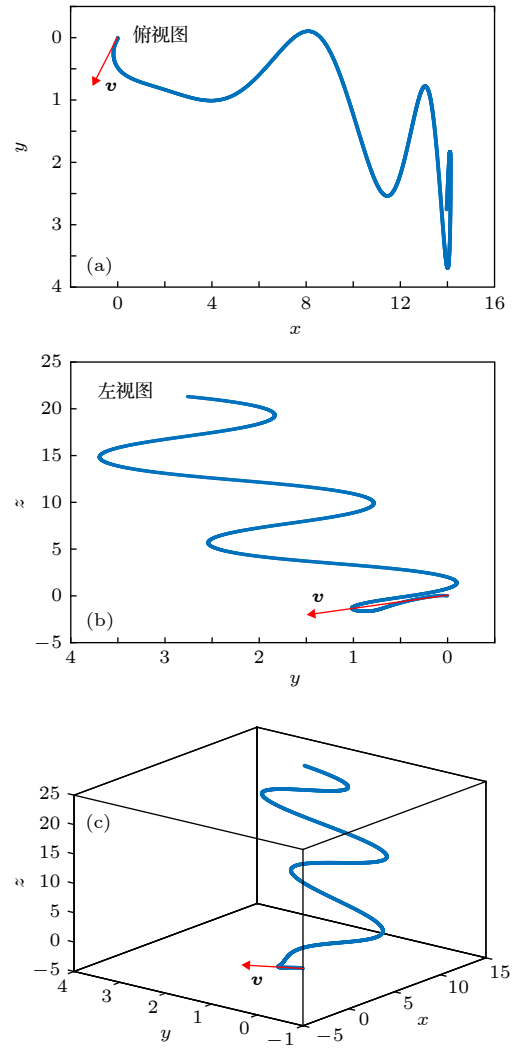


图4 模式二下测试粒子的运动轨迹 (a) 测试粒子在余弦时变引力磁场中运动轨迹的俯视图; (b) 测试粒子在余弦时变引力磁场中运动轨迹的左视图; (c) 测试粒子在余弦时变引力磁场中的全空间运动轨迹

Fig. 4. The test-particle's track in cosine time-varying GM field: (a) The top view of the test-particle's track; (b) the left view of the test-particle's track; (c) the test-particle's track in the whole space.



$$\frac{d^2y}{dt^2} = g_y(x, y, z, t) + \frac{d}{dt}z \cdot b_x(x, y, z, t) - \frac{d}{dt}x \cdot b_z(x, y, z, t), \quad (38)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g_z(x, y, z, t) + \frac{d}{dt}x \cdot b_y(x, y, z, t) - \frac{d}{dt}y \cdot b_x(x, y, z, t), \quad (39)$$

保持引力场  $g$  的空间分量  $g_x$ ,  $g_y$  及  $g_z$  全部为零的前提下, 令引力磁场  $\mathbf{b}$  的  $x$  分量发生下列两种模式的时变, 它们分别对应于引力磁场的线性时变和余弦时变, 与此同时令引力磁场  $\mathbf{b}$  的  $y$  分量在空间上进行非周期变化, 即

模式一  $b_x = b_0 + b_1t, b_y = 1/x^2, b_z = 0,$

模式二  $b_x = \cos t, b_y = 1/x^2, b_z = 0.$

根据 (37) 式—(39) 式的微分方程, 可以借助仿真软件绘制测试粒子在两种模式下的运动轨迹, 如图 3 及图 4 所示.

### 4.2 引力感应效应和引力拖曳效应

在第 2 节中, 通过定义引力场的广义标势和广义矢势并采用洛伦兹规范条件得到了描述弱引力场运动的引力场 Maxwell 方程. 在方程中, (8b) 式所描述的物理学规律对应了电动力学的法拉第电磁感应定律, 它表示在弱引力场中时变的引力磁场能够在空间激发感应引力电场 (即感生牛顿引力场), 因此将 (8b) 式所描述的物理学规律称作引力感应 (gravitational induction) 效应. 引力感应效应来源于线性爱因斯坦方程, 它是线性引力论的一个特有现象, 这也是线性引力理论区别于经典引力论的一个动力学特征.

引力感应现象的研究起步于 20 世纪 70 年代. 实验方面, 最早由 Braginsky 等<sup>[31]</sup> 针对引力感应效应设计了一系列有效的验证实验, 这些实验装置的设计原理以法拉第电磁感应定律为理论参考且结构十分精巧, 均能在实验室中得以实现. 后期由 Tajmar 等<sup>[8]</sup> 进行了液氦低温超导铌环旋转实验, 有力地验证了引力感应现象的真实性; 理论方面, 由 Tajmar 和 Assis<sup>[3]</sup> 建立了一类旋转球壳模型来研究引力感应效应, 如图 5 所示, 模型由静止内环和旋转外球壳两部分组成. 该研究的基本思路是, 外部球壳在外界驱动下旋转角速度  $\Omega$  发生时变将会激发时变引力磁场, 时变引力磁场在静止内环的

平面产生感应引力电场, 此时就会有一个方位角力作用在内环的每个元素上, 内环因此将产生方位加速度开始旋转. Tajmar 等根据旋转球壳模型给出了引力感应的表达式, 但限于球壳模型的复杂性, 文中未能利用电动力学的分析方法通过旋转球壳模型来展示引力感应的过程. 因此, 为了更加清晰地向读者展示引力感应的过程, 本节将通过一种简单的双层微管模型来研究引力感应效应.

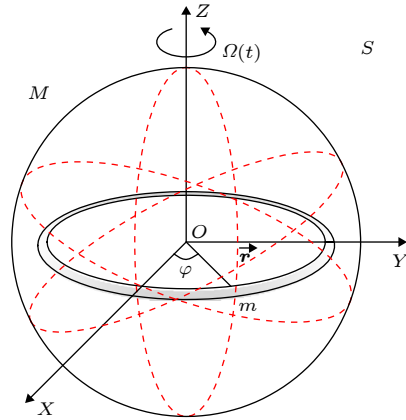


图 5 用于研究引力感应效应的旋转球壳模型  
Fig. 5. The rotating spherical shell model for studying the gravitational induction effect.

我们建立了如图 6 所示的引力感应演示模型, 模型中 1 环的作用是为 2 环提供时变的引力磁场, 1 环中由 B 端向管内流入一种均匀流体并从 A 端流出, 2 环中则填充相同且静止的均匀流体. 由于 1 环要产生时变的引力磁场, 所以管内流体的角动量应当是时变 (含时) 的.

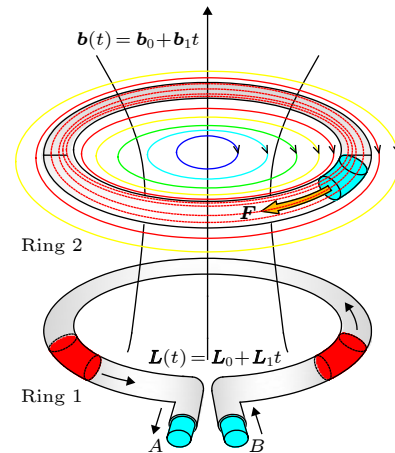


图 6 基于微管模型的引力感应演示模型  
Fig. 6. The demonstration model for studying gravitational induction based on the microtube model.

如图 7(a) 所示, 设定流体的含时角动量为<sup>[11]</sup>

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_1 t, \quad (40)$$

其中,  $\mathbf{L}_0$  为 1 环中流体的初始 (固有) 角动量,  $\mathbf{L}_1$  为流体含时角动量的增长率. 将 (40) 式代入 (21) 式中, 则由 1 环所提供的时变引力磁场在 2 环中的引力磁矢势为<sup>[11]</sup>

$$\mathbf{A}_g = \frac{G}{c} L(t) \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{G}{c} (L_0 + L_1 t) \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (41)$$

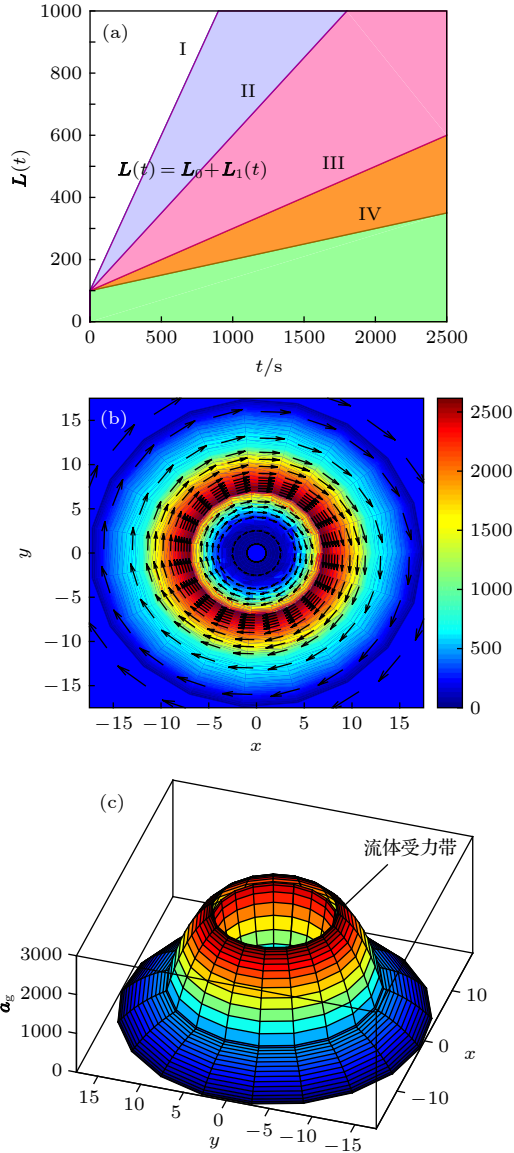


图 7 流体参数设定及涡旋场的仿真 (a) 流体含时角动量的线性函数; (b) 环 2 所在平面内激发的涡旋引力电场的强度色谱图; (c) 环 2 内流体的受力区域

Fig. 7. The parameter description of fluid and the vortex field's simulation: (a) The linear function between the angular momentum  $\mathbf{L}$  and time; (b) the distribution of vortex field in the  $z = 0$  plane which produced by the ring 2; (c) the fluid's stressed region in the plane of the ring 2.

那么通过 2 环的时变引力磁通量可借助引力磁矢势表示为

$$\begin{aligned} \psi_{\text{ring2}} &= \iint_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \nabla \times \mathbf{A}_g d\mathbf{S} \\ &= \oint_{\Gamma} \mathbf{A}_g d\mathbf{l} = \frac{G}{c} (L_0 + L_1 t) \frac{1}{r^3} \oint_{\Gamma} \mathbf{e}_z \times \mathbf{r} d\mathbf{l} \\ &= \frac{G}{c} (L_0 + L_1 t) \frac{1}{r^3} \oint_{\Gamma} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} d\mathbf{l} \\ &= \frac{G}{c} (L_0 + L_1 t) \oint_{\Gamma} \left( -\frac{y}{r^3} \mathbf{e}_x + \frac{x}{r^3} \mathbf{e}_y \right) d\mathbf{l}. \end{aligned}$$

采用直角坐标系表示引力磁矢势的各分量, 即

$$\mathbf{A}_g(x, y) = \frac{G}{c} (L_0 + L_1 t) \left[ -\frac{1}{r^3} y, \frac{1}{r^3} x \right]. \quad (42)$$

则根据第二类曲线积分的求解方法, 时变引力磁通量表示为

$$\psi_{\text{ring2}} = \int_{\Gamma} \mathbf{A}_{g1}(x, y) dx + \int_{\Gamma} \mathbf{A}_{g2}(x, y) dy, \quad (43)$$

代入 2 环  $z = 0$  平面的参数方程  $x = r_2 \cos \theta$ ,  $y = r_2 \sin \theta$ , 有

$$\begin{aligned} \psi_{\text{ring2}} &= \frac{G}{c} (L_0 + L_1 t) \\ &\times \left[ \int_0^{2\pi} \frac{r_2 \sin \theta \cdot (-r_2 \sin \theta) d\theta}{(r_2^2 \cos^2 \theta + r_2^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \right. \\ &\left. + \int_0^{2\pi} \frac{r_2 \cos \theta \cdot r_2 \cos \theta d\theta}{(r_2^2 \cos^2 \theta + r_2^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \right] \\ &= \frac{G}{c} (L_0 + L_1 t) \\ &\times \left( \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_2} \sin^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_2} \cos^2 \theta d\theta \right) \\ &= \frac{2\pi G}{c} (L_0 + L_1 t) \frac{1}{r_2}. \end{aligned} \quad (44)$$

对于 2 环, 由于 1 环向其提供了时变引力磁场, 那么 2 环的引力磁通量也相应发生时变, 根据引力感应效应此时在 2 环所在的平面内会激发出涡旋引力电场, 强度及分布情况如图 7(b) 所示. 由于 2 环的管腔内也填充了相同且静止的均匀流体, 那么受涡旋引力电场的作用流体将在 2 环管腔内发生定向流动. 类似地, 把这种在一次回路中因质荷加速运动 (产生加速质量流) 而在二次回路中产生力的牵引作用的现象普遍称作引力电磁理论背

景下的引力拖曳 (Gravitational dragging) 现象或惯性系拖曳现象<sup>[3]</sup>.

本模型中, 在引力感应效应下 2 环中的均匀流体的每一个单位元素都会得到一个方位加速度, 其在大小和方向上对应了涡旋引力电场, 而在电动力学中可以证明感生电场作为一种横场是矢势  $\mathbf{A}_g$  的负时间微商<sup>[32]</sup>, 所以 2 环流体具有的这个方位加速度表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_g = \mathbf{g}_w &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{A}_g \right) \\ &= -\frac{G}{2c^2} \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}}{r^3} \frac{\partial}{\partial t} (L_0 + L_1 t) \\ &= -\frac{G}{2c^2} L_1 \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}}{r^3}, \end{aligned} \quad (45)$$

其中,  $\mathbf{g}_w$  表示涡旋引力电场. 那么涡旋引力电场在 2 环的闭合环路上产生的引力电动势表示为

$$\begin{aligned} G_{\text{ring2}} &= \oint_{\Gamma} \mathbf{g}_w \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{A}_g \right) \cdot d\mathbf{l} \\ &= -\frac{G}{2c^2} \frac{d}{dt} (L_0 + L_1 t) \oint_{\Gamma} \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{l} \\ &= -\frac{G}{2c^2} L_1 \oint_{\Gamma} \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\pi G L_1}{c^2 r_2}. \end{aligned} \quad (46)$$

此时, 通过 (44) 式与 (46) 式能够得到引力电动势  $G$  与引力磁通量  $\psi$  之间的关联如下

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \psi_{\text{ring2}} &= -\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \left[ \frac{2\pi G}{c} (L_0 + L_1 t) \frac{1}{r_2} \right] \\ &= -\frac{\pi G L_1}{c^2 r_2} = G_{\text{ring2}}, \end{aligned} \quad (47)$$

其通式表示为:

$$-\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \psi = G, \quad (48)$$

$$-\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{2c} \iint_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} = G. \quad (49)$$

那么 (48) 式及 (49) 式所示的这种关联性正是法拉第电磁感应定律在引力场中的体现, 它们与 (8b) 式合起来是引力感应效应的特征表述. 可以看到弱引力场中的引力感应效应与法拉第电磁感应定律在形式上很相似, 但仍然差一个  $1/2c$  因子, 这本质上是由于广义引力标势、广义引力矢势与电磁标势、电磁矢势在表示形式上的差别.

### 4.3 引力感应、引力拖曳效应的意义及展望

如本文 2.2 节中的介绍, Tajmar 与 de Matos 进行过与图 6 所示模型原理相近的实验, 目的

是验证旋转超导铌环是否可以产生比常温非超导环境下更强的引力磁场. 根据本文 4.2 节中的解释, 加速旋转的铌环作为一次回路会向全空间激发时变引力磁场, 而在加速度计所在的二次回路中由于引力感应效应会产生涡旋引力电场 (感应引力电场), 受涡旋引力电场的作用加速度计将受到拖曳力并产生计数. 最终实验结果与理论预期一致, 加速度计受到了强烈的拖曳力, 检测到的加速度场的平均值是噪声 (干扰信号) 的 3.3 倍以上, 这表明 de Matos 的理论是正确的, 即低温超导环境下的铌环能够产生比常温环境下更强的引力磁场. 此外, 我们分析认为该实验还有两个十分重要的结论:

1) 首次在地面实验室中记录到了具备可测量性的引力磁场, 同时也验证了线性引力理论及引力电磁理论 (GEM) 的正确性;

2) 充分验证了引力感应现象及惯性系拖曳现象的真实性.

Everitt 指出 Tajmar 等的实验结果有望成为一些新技术的基础<sup>[21]</sup>, 应用低温超导技术人们可以通过改变超导体的旋转加速度及旋转方向来设计一系列基于引力感应和引力拖曳效应的引力磁场激发装置, 这些装置理论上能够在空间任意方向上产生人们所需的拖曳力, 从而有可能实现对任意物体的推动和悬浮, 还可用于制造零重力环境. 此外, 除了低温超导铌环实验, Tajmar 和 de Matos<sup>[27]</sup> 还推荐利用超流体 (例如液态氦) 代替旋转铌环重复他们的实验, 力求得到更为显著的实验效果. 理论上, 本文认为后期可以按照图 6 所示的模型加工类似的环状微管, 并通入匀加速流动的液态氦 (或其他超流体) 完成超流体引力磁场激发装置的测试, 进一步验证 Tajmar, de Matos 等人的理论, 同时本文期望能够以该模型为基础进一步在工程上实现引力感应及引力拖曳效应的应用, 为实际应用中提供全新的、通用的动力.

至此, 我们在第 3 节中研究了通有匀速流体的环状微管模型的引力磁场远场分布特征, 在第 4 节中研究了引力磁场对应的动力学效应, 首次对测试粒子在时变引力磁场中的运动轨迹进行了研究, 最主要地, 利用结构相对简单的双层微管模型模拟了引力感应效应的全过程, 并定量计算和验证了引力感应效应, 解释了惯性系拖曳现象. 综上, 本文希望利用这种简单的物理模型为今后引力磁场及其连带效应的相关研究带来一些新的方法和思路.

## 5 结 论

本文基于线性引力理论从引力场的场量中分解出了引力的磁分量并定义了引力磁场; 进一步建立了一种通有匀速流体的环状微管模型, 研究了引力磁场在全空间的分布模式; 然后建立了一种新的双层结构微管模型, 研究了时变引力磁场中的引力感应效应和其产生的惯性系拖曳效应. 通过数值计算以及仿真结果可以表明, 这种由通有匀速流体的微管产生的静引力磁场的远场分布模式与磁偶极子磁场的远场分布模式十分类似, 二者呈现出了明确的类比关系; 在引力磁场的动力学效应方面, 本文选取了线性时变和余弦时变这两种基本的时变模式研究了时变引力磁场中运动粒子的轨迹. 仿真结果表明, 在线性时变模式下测试粒子的运动轨迹是一条螺旋半径随时间改变的螺旋线, 在余弦时变模式下测试粒子的运动轨迹是一类随时间规律变化的振荡曲线. 而通过建立一种双层结构的微管模型, 本文改进了前人对引力感应效应的研究方法, 利用这种简单的物理模型对引力感应的全过程进行了完整的理论验证, 并依据引力感应效应解释了广义相对论中成因复杂的惯性系拖曳现象. 从物理与工程的角度来看, 本文所建立的模型以及提出的研究手段有望成为一些新工程技术的理论基础, 例如借助引力感应模型原则上可以加工制作一种通有超流体的环状微管从而在空间各个方向上形成可调控的拖曳力, 进一步利用叠加原理在工程上产生实际应用中所需的任意方向、任意强度的通用动力.

## 参考文献

- [1] Rocha F, Malheiro M, Marinho Jr R 2015 *Proceedings of the MG14 Meeting on General Relativity Rome, Italy*, July 12–18, 2015 p4331
- [2] Ruggiero M L 2016 *Astrophys. Space Sci.* **361** 140

- [3] Tajmar M, Assis A K T 2015 *Can. J. Phys.* **93** 1571
- [4] Everitt C W F, DeBra D B, Parkinson B W, Turneaure J P, Conklin J W, Heifetz M I, Keiser G M, Silbergleit A S, Holmes T, Kolodziejczak J, Al-Meshari M, Mester J C, Muhlfelder B, Solomonik V G, Stahl K, Worden P W, Jr Bencze W, Buchman S, Clarke B, Al-Jadaan A, Al-Jibreen H, Li J, Lipa J A, Lockhart J M, Al-Suwaidan B, Taber M, Wang S 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 221101
- [5] Ciufolini I, Pavlis E C 2004 *Nature* **431** 958
- [6] Iorio L 2006 *Classical Quantum Gravity* **23** 5451
- [7] Iorio L 2012 *Sol. Phys.* **281** 815
- [8] Tajmar M, Plesescu F, Seifert B, Marhold K 2007 *AIP Conf. Proc.* **880** 1071
- [9] Mashhoon B, Iorio L, Lichtenegger H 2001 *Phys. Lett. A* **292** 49
- [10] Ruggiero M L 2015 *Int. J. Mod. Phys. D* **24** 1550060
- [11] Bini D, Cherubini C, Chiccone C, Mashhoon B 2008 *Classical Quantum Gravity* **25** 225014
- [12] Tartaglia A, Ruggiero M L 2003 *Eur. J. Phys.* **25** 203
- [13] Ruggiero M L, Tartaglia A 2002 arXiv: 0207065 [gr-qc]
- [14] Wu N 2005 *Commun. Theor. Phys.* **44** 883
- [15] Vetó B 2011 *Eur. J. Phys.* **32** 1323
- [16] Mashhoon B 2008 *Classical Quantum Gravity* **25** 085014
- [17] Liu L, Zhao Z 2004 *General Relativity* (Beijing: Higher Education Press) pp80–90 (in Chinese) [刘辽, 赵峥 2004 广义相对论 (北京: 高等教育出版社) 第80—90页]
- [18] Mironov V L, Mironov S V 2014 *J. Mod. Phys.* **5** 917
- [19] Demir S 2013 *Int. J. Theor. Phys.* **52** 105
- [20] Mashhoon B 2003 arXiv: 0311030 [gr-qc]
- [21] Clark S 2006 *New Sci.* **192** 36
- [22] De Matos C J, Tajmar M 2005 *Physica C* **432** 167
- [23] Aharonov Y, Carmi G 1973 *Found. Phys.* **3** 493
- [24] Overhauser A W, Colella R 1974 *Phys. Rev. Lett.* **33** 1237
- [25] Arif M, Dewey M S, Greene G L, Jacobson D, Werner S 1994 *Phys. Lett. A* **184** 154
- [26] Krishnan V V, Bailes M, Van Straten W, Wex W, Ferire P C, Keane E F, Tauris T M, Rosado P A, Bhat N D R, Flynn C, Jameson A, Ostowski S 2020 *Science* **367** 577
- [27] Tajmar M, De Matos C J 2003 *Physica C* **385** 551
- [28] Wang G Z, Guo X Y, Wu Z H, Wang J Y, Xia M Y 2018 *Physics and Engineering* **28** 84 (in Chinese) [王刚志, 郭肖勇, 吴泽华, 王晋研, 夏梦莹 2018 物理与工程 **28** 84]
- [29] Shen J Q 2002 *Gen. Relativ. Gravitation* **34** 1423
- [30] Mashhoon B, Gronwald F, Theiss D S 1999 *Ann. Phys.* **8** 135
- [31] Braginsky V B, Caves C M, Thorne K S 1977 *Phys. Rev. D* **15** 2047
- [32] Liang C B, Cao Z J, Chen Z T 2018 *Electromagnetics (Extended)* (Beijing: Higher Education Press) pp222–227 (in Chinese) [梁灿彬, 曹周键, 陈陟陶 2018 电磁学 (拓展篇) (北京: 高等教育出版社) 第222—227页]

# The gravitational magnetic component and its magnetic effects in linearized theory of gravity

Hao Di   Guo San-Dong<sup>†</sup>   Ma Zhi-Yuan   Hui Yu-Ting

(*School of Electronic Engineering, Xi'an University of Posts and Telecommunications, Xi'an 710121, China*)

( Received 1 November 2019; revised manuscript received 13 April 2020 )

## Abstract

According to the General Relativity (GR), under the approximation of the weak field, the weak gravitational field not only contains the classical Newtonian gravitational field, but also contains a gravitomagnetic (GM) field analogous to the concept of magnetic field, and the name of GM field borrows the basic idea of the magnetic field in electrodynamics. In order to study the physical properties of GM field and its associated effects, firstly, we use a similarity transformation method to decompose the gravitomagnetic component from the second-order tensor field in linearized Einstein field equation and define the concept of the GM field. Then, on this basis, we consider a circular microtube model with uniform velocity fluids (or superfluids), and study the distribution characteristics of the far GM field by this special model. We use a simpler approximation approach to improve the previous calculation method of the GM field in these kind of rings model, the result shows that the distribution characteristic of the far GM field in this model is analogous to the magnetic field produced by a dipole, it is a good correspondence between this microtube model and the dipole model. After that, we have studied the dynamic characteristics of GM field by analogizing the properties of magnetic field, and studied the test particles' tracks in the linear time-varying GM field and the cosine time-varying GM field in the first time. In addition, in order to improve the previous research methods of 'gravitational induction' and 'frame dragging' in the GR, we have designed a circular microtube model which has a double-layer structure and with the accelerating flow fluid (or superfluids), we use simpler mathematics than before to explain these two effects by this special model. In conclusion, this work provides some new methods for the study of GM field and its associated effects.

**Keywords:** linearized theory of gravity, circular microtube model, gravitomagnetic field, gravitomagnetism

**PACS:** 04.20.Cv, 04.25.-g, 04.80.Cc

**DOI:** [10.7498/aps.69.20191673](https://doi.org/10.7498/aps.69.20191673)

---

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [sandongyuwang@163.com](mailto:sandongyuwang@163.com)