

# 倾斜 Poiseuille-Rayleigh-Bénard 流动的对流分区与动力学特性\*

宁利中<sup>1)</sup> 张珂<sup>1)</sup> 宁碧波<sup>2)†</sup> 刘爽<sup>1)</sup> 田伟利<sup>3)</sup>

1) (西安理工大学水利水电学院, 西安 710048)

2) (嘉兴学院建筑工程学院, 嘉兴 314001)

3) (上海大学建筑系, 上海 200444)

(2019年12月21日收到; 2020年3月25日收到修改稿)

利用流体力学基本方程组的数值模拟, 探讨了具有通过流动的倾斜腔体中普朗特数  $Pr = 6.99$  的流体的对流分区与动力学特性. 结果表明, 对于相对瑞利数  $r = 9$ , 在通过流动雷诺数  $Re = 1.5$  时, 随着腔体倾斜角  $\theta$  的增加, 系统出现均匀行波对流、非均匀行波对流以及单对流圈斑图; 在通过流动雷诺数  $Re = 12.5$  时, 随着腔体倾斜角  $\theta$  的增加, 系统出现局部行波对流、平行流及局部单对流圈斑图; 进一步, 对通过流动雷诺数  $Re$  和腔体倾斜角  $\theta$  的不同组合情况的数值模拟, 发现在通过流动雷诺数  $Re$  和腔体倾斜角  $\theta$  构成的平面上, 具有通过流动的倾斜腔体中的对流可以分成前述六种斑图区域, 即均匀行波对流区、非均匀行波对流区、单对流圈区、局部行波对流区、平行流区及局部单对流圈区. 研究了不同对流区域对流最大垂直流速  $w_{\max}$  和努塞尔数  $Nu$  随着时间的变化特性. 探讨了不同对流区域对流振幅  $A$  和努塞尔数  $Nu$  随着腔体倾斜角  $\theta$  变化的动力学特性.

**关键词:** 通过流动, 倾斜腔体, 对流斑图, 分区, 动力学特性

**PACS:** 44.25.+f, 44.15.+a, 05.70.Ln, 82.40.Bj

**DOI:** 10.7498/aps.69.20191941

## 1 引言

自从 20 世纪初 Henri Bénard 首先对底部加热流体层对流进行实验, Lord Rayleigh 首先进行小扰动理论分析以来, Rayleigh-Bénard 对流问题一直受到许多研究者的广泛关注<sup>[1, 2]</sup>. 文献<sup>[1, 2]</sup>就 Rayleigh-Bénard 对流问题的研究进展进行过综述. 关于 Rayleigh-Bénard 对流问题的研究方法分为实验研究、理论分析以及数值模拟. 最初, 人们通过实验及理论分析的方法进行研究. 随着计算机的发展, 数值模拟分析研究获得了很大进展. 基

于对流振幅方程组的模拟具有计算时间少又能定性揭示对流特性的特点<sup>[3,4]</sup>. 由于 Rayleigh-Bénard 对流现象可以精确地由流体力学的连续方程、动量方程及能量方程来描述, 因此, 基于流体力学方程组的数值模拟引起了广泛的研究兴趣<sup>[5-16]</sup>. 已经揭示了行波<sup>[5-7]</sup>、局部行波<sup>[8-12]</sup>、振动对流<sup>[9]</sup>、行波中的缺陷结构<sup>[6,7,12,13]</sup>、摆动行波<sup>[14,15]</sup>及对传波<sup>[16]</sup>等对流结构或者现象, 取得了丰富的成果. 在对经典 Rayleigh-Bénard 对流问题研究的基础上, 对水平腔体的一侧施加水平流动<sup>[17-19]</sup>, 研究水平流动对 Rayleigh-Bénard 对流问题的影响. 已经发现了对流发生的附近的线性特性<sup>[17]</sup>, 局部行波的周期性<sup>[18]</sup>,

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10872164) 和西北旱区生态水利国家重点实验室基金 (批准号: 2017ZZKT-2) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: ning\_bibo@163.com

对流斑图的分区特性及斑图成长特性<sup>[19]</sup>等一些新的对流结构. 如果对于经典 Rayleigh-Bénard 对流问题, 考虑腔体倾斜时<sup>[20–25]</sup>, 研究获得了一些新的对流特性, 如缺陷湍流, 对流层的双稳定性与竞争, 不同普朗特数情况下的对流斑图、分区及临界条件等. 本文进一步在考虑腔体倾斜的同时, 也考虑通过流动对 Rayleigh-Bénard 对流问题的影响, 试图获得一些新的对流结构或者对流现象.

本文利用流体力学基本方程组的数值模拟, 探讨了具有通过流动的倾斜腔体中普朗特数  $Pr = 6.99$  的流体的对流分区与动力学特性. 对不同通过流动雷诺数  $Re$  和腔体倾斜角  $\theta$  的组合情况的数值模拟, 发现在通过流动雷诺数  $Re$  和腔体倾斜角  $\theta$  构成的平面上, 具有通过流动的倾斜腔体中的对流可以分成六种斑图区域, 即均匀行波对流区、非均匀行波对流区、单对流圈区、局部行波对流区、平行流区及局部单对流圈区. 这是本文模型不同于以前模型的最大特点. 不同对流区域对流最大垂直流速  $w_{\max}$  和努塞尔数  $Nu$  随着时间的变化具有不同特性. 不同对流区域对流振幅  $A$  和努塞尔数  $Nu$  随着腔体倾斜角  $\theta$  的变化也具有不同动力学规律.

## 2 数学物理模型

对于图 1 所示的倾斜角为  $\theta$ , 坐标为  $x, y$  的腔体, 当下热壁面与上冷壁面之间的温度差  $\Delta T$  特征的瑞利数  $Ra$  ( $Ra = g\alpha\Delta Td^3/\kappa\nu$ ) ( $\alpha$  是体积膨胀系数,  $d$  是腔体垂直高度,  $g$  是重力加速度,  $\kappa$  为热扩散系数  $\kappa = \lambda/(\rho_0c_p)$ ,  $c_p$  为定压比热容,  $\rho$  是流体密度,  $\lambda$  为热传导系数,  $\nu$  是运动黏性系数. 下标 0 表示对应物理参数的参考值, 按传导状态下沿腔体垂直高度的平均值计算.) 超过相应的临界值时, 对流就发生在腔体中. 对于这一问题, 采用 Boussinesq 假设, 流体密度  $\rho$  随着流体温度  $T$  的变化关系式为  $\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)]$ . 这时描述倾斜腔体中流体对流的流体力学基本方程组为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uw)}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial p_{\text{eff}}}{\rho_0 \partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ & - g\alpha(T - T_0) \sin \theta, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(w^2)}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial p_{\text{eff}}}{\rho_0 \partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ & + g\alpha(T - T_0) \cos \theta, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(wT)}{\partial y} = \kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (4)$$

式中有有效压强  $p_{\text{eff}} = p + \rho_0 g y \cos \theta - \rho_0 g x \sin \theta$ ,  $u$  表示  $x$  方向的速度,  $w$  表示  $y$  方向的速度,  $T$  表示温度,  $p$  是流体压强,  $t$  是时间.

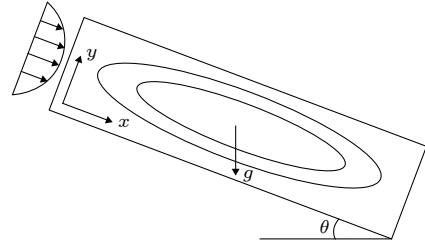


图 1 倾斜腔体的流动示意图

Fig. 1. Flow diagram in inclined cavity.

在腔体中上下壁面都是固定的, 速度  $u, w$  为 0, 上下壁面等温. 左端进口速度为平面 Poiseuille 流的速度分布, 温度上下壁面之间线性变化. 右端出口为自由出流. 因此, 上下壁面边界条件为

$$\text{当 } y=0 \text{ 时, } u = w = 0, T = T_0 + 0.5\Delta T;$$

$$\text{当 } y = d \text{ 时, } u = w = 0, T = T_0 - 0.5\Delta T.$$

左端进口条件为

$$\text{在 } x = 0 \text{ 时, } u = 4u_{\max} \frac{z}{d} \left( 1 - \frac{z}{d} \right), w = 0.$$

$$\text{在 } x = 0 \text{ 时, } T = T_0 + \Delta T \left( 0.5 - \frac{z}{d} \right).$$

在  $x = L_x$  时, 右端出口为自由出流.

这里  $u_{\max}$  为进口速度最大值,  $L_x$  为计算腔体的长度.

初始条件流速为  $u = w = 0$ , 温度为平均温度  $T_0$ .

在数值计算中, 利用有限容积法离散了控制流体力学方程组, Simple 算法用于求解速度-压力耦合方程. 扩散项采用中心差分格式, 对流项采用迎风格式, 时间项采用一阶隐式格式离散. 采用均匀交错网格系统. 数值模拟的可靠性和正确性可以由文献 [26] 的实例证明. 由于文献 [27] 对  $d/20$  与  $d/30$  的网格进行了计算, 发现计算结果几乎相同, 误差很小. 所以采用  $d/20$  的网格进行模拟, 时间步长采用  $\Delta t = 0.01$  s.

讨论中采用无量纲归一化参数描述腔体体形, 坐标为  $X = x/d$ ,  $Y = y/d$ , 长高比为  $\Gamma = L_x/d$ . 对流系统可以由瑞利数  $Ra$  (为了方便, 使用相对瑞利数  $r = Ra/Ra_c$ , 其中  $Ra_c = 1708$ ), 普朗特数  $Pr = \nu/\kappa$ , 表征进口流动的雷诺数  $Re = \frac{u_{\max}d}{\nu}$  及倾斜腔体的倾角  $\theta$  来控制.

本文采用  $T_0 = 293.15 \text{ K}$ ,  $Pr = 6.99$  的流体. 长高比  $\Gamma = 20$ .

### 3 对流分区与动力学特性

#### 3.1 不同的对流斑图结构

对于具有通过流动的倾斜腔体中  $Pr = 6.99$  的对流, 当给定相对瑞利数  $r = 9$  时, 不同的通过流动雷诺数和不同的倾斜角度组合时, 系统出现六种不同的对流斑图.

##### 3.1.1 均匀行波对流

当  $Re = 1.5$  并且  $\theta = 10^\circ$  时, 出现均匀行波对流结构, 如图 2 所示. 图 2(a) 为腔体中的温度场, 可以看出, 温度场上升羽流和下降羽流间隔出现, 羽流以垂直线为对称; 在腔体长度方向上均匀分布. 图 2(b) 为腔体中的流线分布, 在向上弯曲的通过流线的下部或者向下弯曲的通过流线的上部出现封闭的流线圈, 流线圈均匀分布. 温度场下降羽流的位置和两个流线圈之间的下降流位置相对应; 温度场上升羽流的位置和两个流线圈之间的上升流位置相对应. 腔体中共有 23 个流线圈, 它的波数为  $k = 23\pi/20 = 3.61$ . 图 2(c) 为腔体中  $0 \leq X \leq 11$  范围内的速度矢量场. 在向上弯曲的通过流线的下部的矢量场即下壁面附近的矢量场是顺时针方向; 在向下弯曲的通过流线的上部的矢量场即上壁面附近的矢量场是逆时针方向. 这一对具有不同旋转方向的对流圈沿腔体长度方向上交替出现. 在对流圈的左侧如果是箭头向下的下降流, 在对流圈的右侧必然是箭头向上的上升流. 沿腔体长度方向上, 可以清楚地看出, 上升流和下降流交替地出现. 在上升流和下降流处垂直速度较大, 对流圈的上下部水平速度较大. 对流圈的中心部位速度较小. 由图 2 可以看出, 温度场、流线及速度矢量场都是均匀分布并整体上一个方向流动, 类似于 Rayleigh-Bénard-Poiseuille 流动中出现的行波, 因此称其为均匀行波.

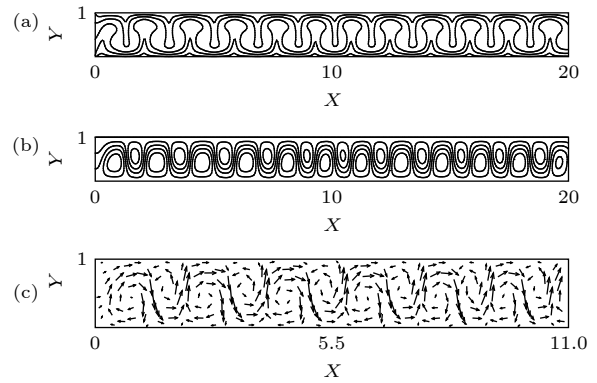


图 2  $Re = 1.5$  且  $\theta = 10^\circ$  时的均匀行波对流 (a) 温度; (b) 流线; (c) 速度矢量  
Fig. 2. Uniform traveling wave convection at  $Re = 1.5$  and  $\theta = 10^\circ$ : (a) Temperature; (b) streamlines; (c) velocity vector.

##### 3.1.2 非均匀行波对流

保持雷诺数为  $Re = 1.5$ , 增加倾斜角到  $\theta = 30^\circ$  时, 系统出现非均匀行波对流结构, 如图 3 所示. 由图 3(a) 的温度场可知, 温度场上升羽流和下降羽流间隔出现, 但在某些部位的羽流不再关于垂直线对称, 在腔体长度方向上为非均匀分布. 图 3(b) 为腔体中的流线分布, 可以看出, 在向上弯曲的通过流线的下部或者向下弯曲的通过流线的上部出现封闭的流线圈. 在向上弯曲的通过流线的下部出现封闭的流线圈在某些部位被拉长, 变大. 流线圈在空间上的分布不均匀, 没有规律. 由于某些流线圈的变大, 腔体空间上对流圈数减少到 13 个, 它的空间平均波数也随之减小, 变为  $k = 13\pi/20 = 2.04$ . 图 3(c) 为腔体中  $0 \leq X \leq 13$  范围内的速度

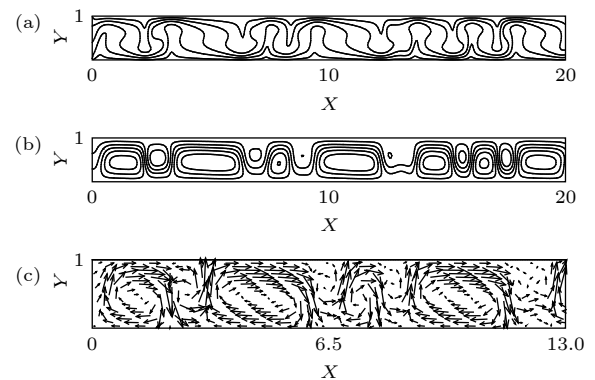


图 3  $Re = 1.5$  和  $\theta = 30^\circ$  时的非均匀行波对流 (a) 温度; (b) 流线; (c) 速度矢量  
Fig. 3. Non-uniform traveling wave convection at  $Re = 1.5$  and  $\theta = 30^\circ$ : (a) Temperature; (b) streamlines; (c) velocity vector.

矢量场. 可以看出, 顺时针方向旋转的对流圈和逆时针方向旋转的对流圈沿腔体长度方向交替出现, 上升流和下降流也沿腔体长度方向交替出现. 但对流圈的长度分布不均匀, 大的对流圈是小对流圈的 2—3 倍长. 由图 3 可以看出, 温度场、流线及速度矢量场都是非均匀分布但整体上向一个方向流动, 因此称其为非均匀行波.

### 3.1.3 单对流圈斑图

保持雷诺数为  $Re = 1.5$ , 继续增加倾斜角到  $\theta = 60^\circ$  时, 系统出现单对流圈斑图, 如图 4 所示. 图 4(a) 的温度场除腔体的两端附近外, 是近似于平行上下壁面的直线. 图 4(b) 的流线是由光滑曲线构成的一个大对流圈. 图 4(c) 的速度矢量图是一个顺时针方向旋转的对流圈. 速度矢量显示在对流圈的外周速度较大, 对流圈的中心速度较小. 由于图 4(b) 和图 4(c) 的腔体中具有一个对流圈, 因此, 称其为单对流圈.

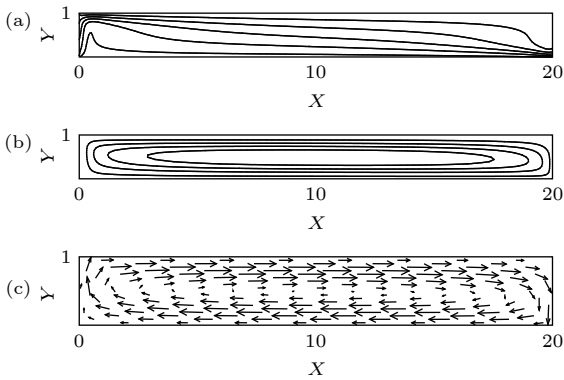


图 4  $Re = 1.5$  和  $\theta = 60^\circ$  时的单对流圈 (a) 温度; (b) 流线; (c) 速度矢量  
Fig. 4. Single roll convection at  $Re = 1.5$  and  $\theta = 60^\circ$ : (a) Temperature; (b) streamlines; (c) velocity vector.

### 3.1.4 局部行波对流斑图

当雷诺数增加到  $Re = 12.5$ , 倾斜角减小到  $\theta = 1^\circ$  时, 系统出现局部行波对流斑图, 如图 5 所示. 可以看出, 在腔体左端部  $0 \leq X \leq 16$  的范围内, 温度等值线和流线是一些平行于腔体上下壁面的直线. 仅存在平行的通过流动. 在腔体右端部  $16 \leq X \leq 20$  的范围内, 温度等值线形成了上升羽和下降羽, 但沿垂直线不对称, 流线形成了上下弯曲的流动, 在向上弯曲和在向下弯曲的部位垂直尺度较小的对流圈.  $10 \leq X \leq 20$  范围内的速度矢量如图 5(c) 所示, 可以看出, 左端部附近平行流和右

端部附近对流结构的矢量场的特性. 由于平行的通过流动和对流共存于腔体中, 故称之为局部行波对流斑图, 类似于 Rayleigh-Bénard-Poiseuille 流动中出现的局部行波.

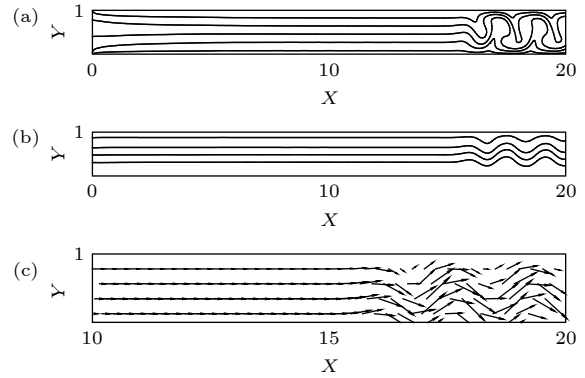


图 5  $Re = 12.5$  和  $\theta = 1^\circ$  时的局部行波对流 (a) 温度; (b) 流线; (c) 速度矢量  
Fig. 5. Localized traveling wave convection at  $Re = 12.5$  and  $\theta = 1^\circ$ : (a) Temperature; (b) streamlines; (c) velocity vector.

### 3.1.5 平行流斑图

保持雷诺数为  $Re = 12.5$ , 增加倾斜角到  $\theta = 10^\circ$  时, 系统出现平行流斑图, 如图 6 所示. 可以看出,  $0 \leq X \leq 20$  范围内的温度等值线和流线与  $10 \leq X \leq 15$  范围内的速度矢量图都是一些平行于上下壁面的直线, 故称其为平行流.

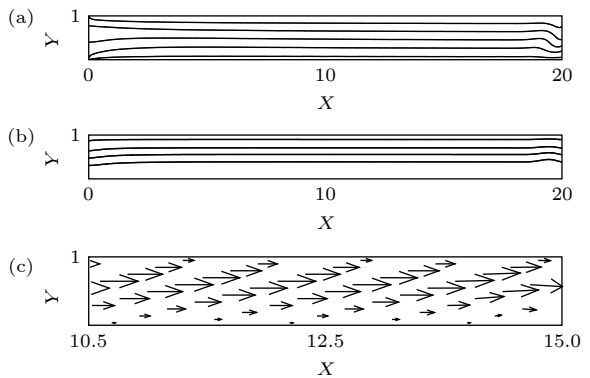


图 6  $Re = 12.5$  和  $\theta = 10^\circ$  时的平行流动 (a) 温度; (b) 流线; (c) 速度矢量  
Fig. 6. Parallel flows at  $Re = 12.5$  and  $\theta = 10^\circ$ : (a) Temperature; (b) streamlines; (c) velocity vector.

### 3.1.6 局部单对流圈斑图

保持雷诺数为  $Re = 12.5$ , 增加倾斜角到  $\theta = 45^\circ$  时, 系统出现局部单对流圈斑图, 如图 7 所示. 可以看出, 图 7(a) 的温度等值线和图 7(b) 的



流线在腔体的上部是一些平行于上下壁面的直线. 流线在腔体的下部是一个单对流圈. 从图 7(c) 的速度矢量图可以更明显地看出, 腔体的上部是平行上壁面的流动, 下部是一个顺时针的滚动. 将这种上部具有平行流并且下部具有一个滚动的流动斑图称为局部单对流圈斑图.

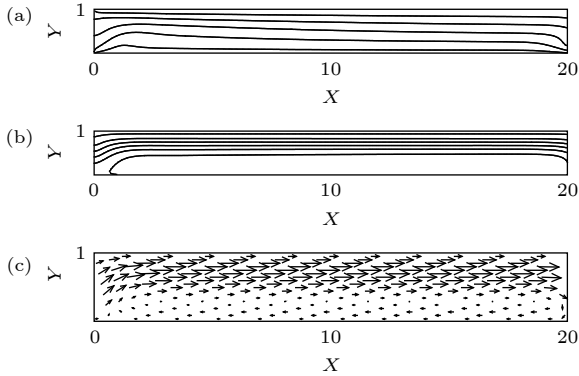


图 7  $Re = 12.5$  和  $\theta = 45^\circ$  时的局部单对流圈 (a) 温度; (b) 流线; (c) 速度矢量  
Fig. 7. Localized single roll convection at  $Re = 12.5$  and  $\theta = 45^\circ$ : (a) Temperature; (b) streamlines; (c) velocity vector.

### 3.1.7 对流垂直最大流速随着时间的变化特性

图 8(a) 是相对瑞利数  $r = 9$ , 雷诺数  $Re = 1.5$  及倾斜角分别为  $\theta = 10^\circ, 30^\circ, 60^\circ$  时对应的均匀行波对流、非均匀行波对流以及单对流圈斑图的最大垂直流速  $w_{\max}$  随着时间的变化. 可以看出, 当  $\theta = 10^\circ$  和  $30^\circ$  时对应的均匀行波对流、非均匀行波对流的  $w_{\max}$  随着时间增加而增长, 在  $t = 150$  s 左右达到稳定, 然后不再随着时间变化.  $\theta = 60^\circ$  时对应的单对流圈斑图的最大垂直流速  $w_{\max}$ , 首先随着时间增加而增长, 然后随着时间增加而上下振荡, 在  $t = 200$  s 以后达到稳定, 不再随着时间变化. 显然, 后者稳定下来所需要时间较前者长. 最大垂直流速  $w_{\max}$  随着倾斜角的增加而变大.

图 8(b) 是相对瑞利数  $r = 9$ , 雷诺数  $Re = 12.5$  及倾斜角分别为  $\theta = 1^\circ, 10^\circ, 45^\circ$  时对应的局部行波对流、平行流及局部单对流圈斑图的最大垂直流速  $w_{\max}$  随着时间的变化. 可以看出, 当  $\theta = 45^\circ$  时局部单对流圈斑图的最大垂直流速  $w_{\max}$  随着时间增加而增长, 在  $t = 110$  s 左右达到稳定, 然后不再随着时间变化.  $\theta = 1^\circ, 10^\circ$  时对应的局部行波对流与

平行流的最大垂直流速  $w_{\max}$ , 首先随着时间增加而增长, 然后随着时间增加而上下振荡, 不再增加. 在  $t = 340$  s 以后  $\theta = 10^\circ$  对应的平行流的最大垂直流速  $w_{\max}$  稳定下来; 在  $t = 290$  s 以后达到  $\theta = 1^\circ$  对应的平行流的最大垂直流速  $w_{\max}$  达到稳定. 最大垂直流速  $w_{\max}$  随着倾斜角的增加而变大. 比较图 8(a) 与图 8(b) 可以明显地看出, 在大倾斜角情况下, 最大垂直流速  $w_{\max}$  随着时间单调增加后达到稳定; 在小倾斜角情况下, 最大垂直流速  $w_{\max}$  随着时间单调增加后变成上下振荡, 然后达到稳定. 大雷诺数情况下最大垂直流速  $w_{\max}$  上下振荡的时间较长. 当系统的参数和初始条件在某种组合条件下, 系统出现瞬态振荡现象.

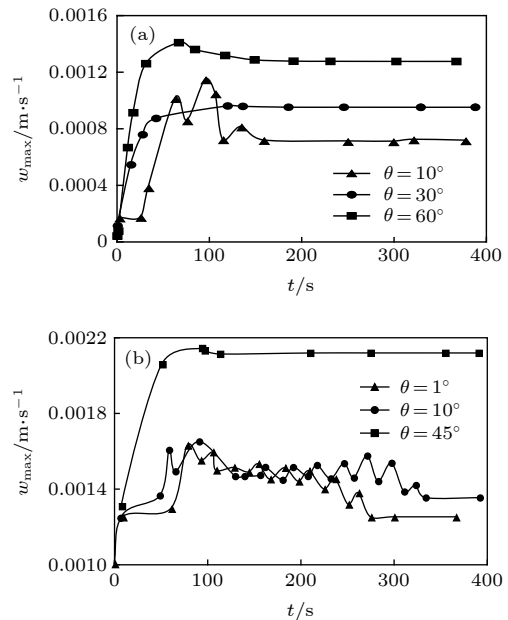


图 8 不同对流结构的最大垂直流速的时间演化 (a)  $Re = 1.5$ ; (b)  $Re = 12.5$   
Fig. 8. Time evolution of maximum vertical velocity in different convection structures: (a)  $Re = 1.5$ ; (b)  $Re = 12.5$ .

### 3.1.8 努塞尔数 $Nu$ 随着时间的变化特性

努塞尔数  $Nu$  是表示对流换热强烈程度的一个无量纲数, 定义为  $Nu = hd/\lambda$ , 其中  $h$  为流体的对流传热系数. 图 9(a) 是相对瑞利数  $r = 9$ , 雷诺数  $Re = 1.5$  及倾斜角分别为  $\theta = 10^\circ, 30^\circ, 60^\circ$  时对应的均匀行波对流、非均匀行波对流以及单对流圈斑图的努塞尔数  $Nu$  随着时间的变化. 可以看出, 当  $\theta = 10^\circ$  时对应的均匀行波对流努塞尔数  $Nu$  随着时间增加而减小, 然后出现振荡, 在  $t = 300$  s 左右达到稳定. 当  $\theta = 30^\circ$  时对应的非均匀行波对流努

塞尔数  $Nu$  随着时间增加而减小, 在  $t = 240$  s 左右达到稳定.  $\theta = 60^\circ$  时对应的单对流圈斑图的努塞尔数  $Nu$  首先随着时间增加而减小, 然后随着时间增加而增加, 在  $t = 190$  s 以后达到稳定. 努塞尔数  $Nu$  随着倾斜角的增加而变大.

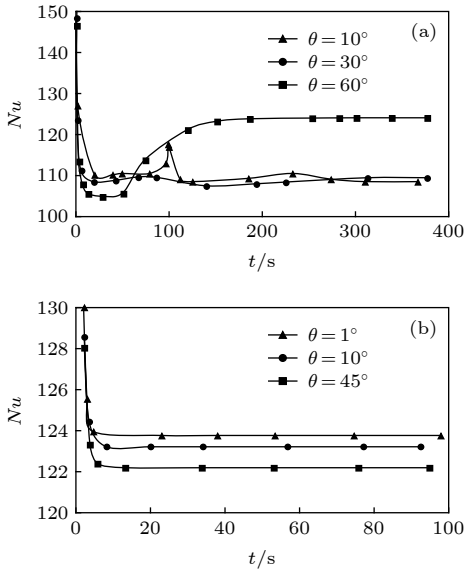


图 9 不同对流结构的努塞尔数的时间演化 (a)  $Re = 1.5$ ; (b)  $Re = 12.5$   
 Fig. 9. Time evolution of Nusselt number in different convection structures: (a)  $Re = 1.5$ ; (b)  $Re = 12.5$ .

图 9(b) 是相对瑞利数  $r = 9$ , 雷诺数  $Re = 12.5$  及倾斜角分别为  $\theta = 1^\circ, 10^\circ, 45^\circ$  时对应的局部行波对流、平行流及局部单对流圈斑图的努塞尔数  $Nu$  随着时间的变化. 三种情况下, 努塞尔数  $Nu$  随着时间增加而减小, 在  $t = 10$  s 左右达到稳定. 与小雷诺数情况下相反, 努塞尔数  $Nu$  随着倾斜角的增加而减小.

### 3.2 对流斑图的分区

对前述的六种对流斑图进行了大量的数值模拟后, 发现当  $r = 9$  时在倾斜角  $\theta$  与雷诺数  $Re$  平面上可以划分为 6 个不同的区域, 如图 10 所示. 对于较小的雷诺数  $Re$ , 当倾斜角  $\theta$  较小时, 由于倾斜角  $\theta$  对对流的影响微乎其微, 在腔体长度方向冷面上的重力分力和热面上浮力都很小, 可以忽略, 系统出现的是类似水平腔体情况下的均匀行波对流; 随着倾斜角  $\theta$  的增加, 在腔体长度方向冷面上的重力分力和热面上浮力都已经发挥作用, 随着两个方向浮力作用的竞争, 系统中的均匀行波对流转变成

非均匀行波对流; 随着倾斜角  $\theta$  的进一步增加, 在腔体长度方向冷面上的重力分力和热面上浮力明显加强, 起到控制作用, 系统过渡到单对流圈斑图. 对于雷诺数  $Re = 10$  附近的情况, 当倾斜角  $\theta$  较小时, 由于倾斜角  $\theta$  对对流的影响微不足道, 在腔体长度方向冷面上的重力分力和热面上浮力很小, 其影响可以忽略, 系统出现的是类似水平腔体情况下的局部行波对流; 随着倾斜角  $\theta$  的增加, 在腔体长度方向冷面上的重力分力和热面上浮力变得明显, 与雷诺数  $Re$  的综合作用结果使系统转化成局部单对流圈斑图. 对于雷诺数  $Re \approx 15$  的情况, 雷诺数的影响明显, 起了控制作用, 对于倾斜角  $\theta$  约小于  $50^\circ$  的情况, 系统出现的都是平行流斑图. 在倾斜角  $\theta$  约大于  $50^\circ$  时, 形成平行流动的临界雷诺数几乎线性变大.

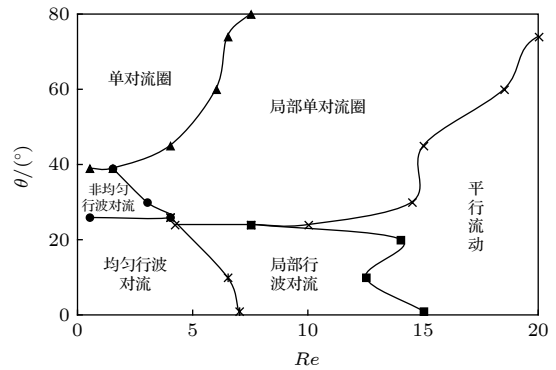


图 10 不同对流斑图在倾斜角度  $\theta$ -雷诺数  $Re$  平面上的分区  
 Fig. 10. Partition of different convective patterns in the plane  $\theta$ - $Re$ .

### 3.3 对流斑图的动力学特性

#### 3.3.1 对流振幅的特性

取  $r = 9$ , 考虑  $Re = 1.5$  及  $Re = 12.5$  时不同倾斜角度情况下的对流特征物理量. 对最大垂直流速进行量纲归一化处理, 得到对流最大振幅, 即  $A = w_{\max}/(\kappa/d)$ . 图 11 是最大振幅  $A$  随着倾斜角的变化. 可以看出, 图 11(a) 中的均匀行波对流、非均匀行波对流以及单对流圈斑图的最大振幅  $A$  随着倾斜角的增加而增加. 图 11(b) 中的局部行波对流、平行流及局部单对流圈斑图的最大振幅  $A$  也随着倾斜角的增加而增加. 相应倾斜角情况下, 图 11(b) 中的最大振幅  $A$  大于图 11(a) 中的最大振幅  $A$ .

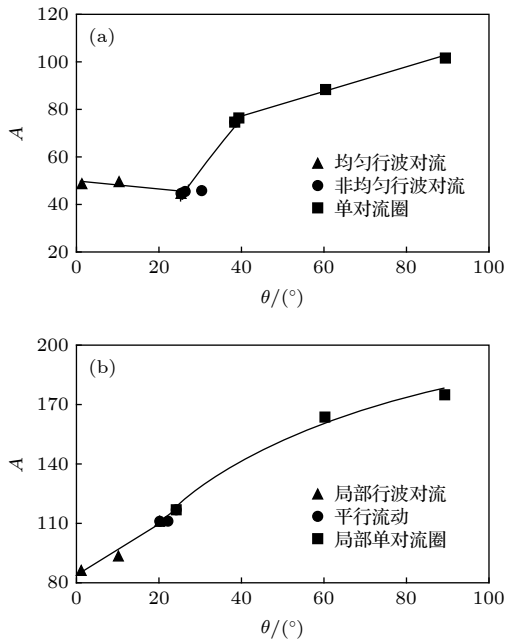


图 11 不同对流结构时  $A$  随着  $\theta$  的变化 (a)  $Re = 1.5$ ; (b)  $Re = 12.5$   
 Fig. 11. Variation of  $A$  in different convection structures with  $\theta$ : (a)  $Re = 1.5$ ; (b)  $Re = 12.5$ .

### 3.3.2 努塞尔数的特性

图 12 是努塞尔数  $Nu$  随着倾斜角的变化. 从图 12(a) 可以看出, 均匀行波对流与非均匀行波对流时努塞尔数  $Nu$  随着倾斜角的变化几乎不发生变

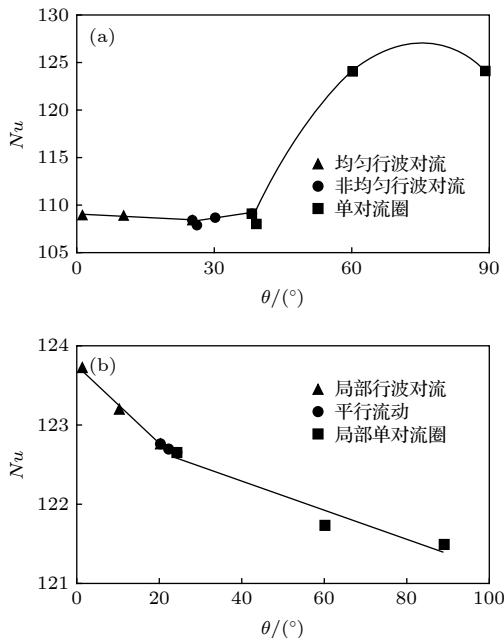


图 12 不同对流结构时  $Nu$  随着  $\theta$  的变化 (a)  $Re = 1.5$ ; (b)  $Re = 12.5$   
 Fig. 12. Variation of  $Nu$  in different convection structures with  $\theta$ : (a)  $Re = 1.5$ ; (b)  $Re = 12.5$ .

化, 是一个常数. 对于单对流圈斑图, 努塞尔数  $Nu$  随着倾斜角的增加而增加. 图 12(b) 中的局部行波对流、平行流及局部单对流圈斑图的努塞尔数  $Nu$  随着倾斜角的增加而减小. 在不同倾斜角情况下, 图 12(b) 中的努塞尔数  $Nu$  变化范围与图 12(a) 中的努塞尔数  $Nu$  类似.

## 4 结 论

利用流体力学基本方程组的数值模拟, 探讨了具有通过流动的倾斜腔体中普朗特数  $Pr = 6.99$  的流体的对流分区与动力学特性. 可以得出以下结论.

1) 相对瑞利数  $r = 9$  时, 对通过流动雷诺数  $Re$  和腔体倾斜角  $\theta$  的不同组合情况进行了数值模拟, 发现在通过流动雷诺数  $Re$  和腔体倾斜角  $\theta$  构成的平面上, 具有通过流动的倾斜腔体中的对流可以分成六种斑图区域, 即均匀行波对流区、非均匀行波对流区、单对流圈区、局部行波对流区、平行流区及局部单对流圈区.

2) 最大垂直流速  $w_{max}$  随着时间的变化特性说明, 在大倾斜角情况下, 最大垂直流速  $w_{max}$  随时间单调增加后达到稳定; 在小倾斜角情况下, 最大垂直流速  $w_{max}$  随时间单调增加后变成上下振荡, 然后达到稳定. 大雷诺数情况下最大垂直流速  $w_{max}$  上下振荡的时间较长.

3) 最大振幅  $A$  随着倾斜角的增加而增加, 不同对流斑图区变化规律不同. 努塞尔数  $Nu$  随着倾斜角  $\theta$  的变化特性说明, 均匀行波对流与非均匀行波对流时努塞尔数  $Nu$  随着倾斜角的变化几乎不发生变化. 单对流圈斑图, 努塞尔数  $Nu$  随着倾斜角的增加而增加. 局部行波对流、平行流及局部单对流圈斑图的努塞尔数  $Nu$  随着倾斜角的增加而减小.

## 参考文献

- [1] Cross M C, Hohenberg P C 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65** 851
- [2] Bodenschatz E, Pesch W, Ahlers G 2000 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **32** 709
- [3] Watanabe T, Iima M, Nishiura Y 2012 *J. Fluid Mech.* **712** 219
- [4] Mercader I, Batiste O, Alonso A, Knobloch E 2010 *Fluid Dyn. Res.* **42** 025505
- [5] Mercader I, Batiste O, Alonso A, Knobloch E 2013 *J. Fluid Mech.* **722** 240
- [6] Ning L Z, Yu L, Yuan Z, Zhou Y 2009 *Sci. Sin.: Phys. Mech. Astron.* **39** 746 (in Chinese) [宁利中, 余荔, 袁喆, 周洋 2009 中国科学: 物理学 力学 天文学 **39** 746]

- [7] Ning L Z, Wang N, Yuan Z, Li K J, Wang Z Y 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 104401 (in Chinese) [宁利中, 王娜, 袁喆, 李开继, 王卓运 2014 *物理学报* **63** 104401]
- [8] Barten W, Lucke M, Kamps M, Schmitz R 1995 *Phys. Rev. E* **51** 5662
- [9] Jung D, Lucke M 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 054502
- [10] Taraut A V, Smorodin B L, Lucke M 2012 *New J. Phys.* **14** 093055
- [11] Mercader I, Batiste O, Alonso A, Knobloch E 2011 *J. Fluid Mech.* **667** 586
- [12] Ning L Z, Wang Y Q, Yuan Z, Li K, Hu B 2016 *Chin. Sci. Bull.* **61** 872 (in Chinese) [宁利中, 王永起, 袁喆, 李开继, 胡彪 2016 *科学通报* **61** 872]
- [13] Ning L Z, Qi X, Zhou Y, Yu L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2528 (in Chinese) [宁利中, 齐昕, 周洋, 余荔 2009 *物理学报* **58** 2528]
- [14] Zhao B X, Tian Z F 2015 *Phys. Fluids* **27** 074102
- [15] Ning L Z, Liu S, Ning B B, Yuan Z, Tian W L, Qu Y W 2017 *Chin. J. Appl. Mech.* **34** 1086 (in Chinese) [宁利中, 刘爽, 宁碧波, 袁喆, 田伟利, 渠亚伟 2017 *应用力学学报* **34** 1086]
- [16] Ning L Z, Qi X, Yuan Z, Shi F 2008 *J. Hydrodyn.* **20** 567
- [17] Jung C, Lucke M, Buchel P 1996 *Phys. Rev. E* **54** 1510
- [18] Hu B, Ning L Z, Ning B B, Tian W L 2017 *Chin. Sci. Bull.* **62** 4278 (in Chinese) [胡彪, 宁利中, 宁碧波, 田伟利 2017 *科学通报* **62** 4278]
- [19] Ning L Z, Hu B, Ning B B, Tian W L 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 214401 (in Chinese) [宁利中, 胡彪, 宁碧波, 田伟利 2016 *物理学报* **65** 214401]
- [20] Daniels K E, Bodenschatz E 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 034501
- [21] Daniels K E, Plapp B, Bodenschatz E 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 5320
- [22] Daniels K E, Brausch O, Pesch W, Bodenschatz E 2008 *J. Fluid Mech.* **597** 261
- [23] Busse F H, Clever R M 1992 *J. Eng. Math* **26** 1
- [24] Ning L Z, Wu H, Ning B B, Tian W L, Ning J H 2019 *Appl. Math. Mech.* **40** 398 (in Chinese) [宁利中, 吴昊, 宁碧波, 田伟利, 宁景昊 2019 *应用数学和力学* **40** 398]
- [25] Ning L Z, Zhang K, Ning B B, Wu H, Tian W L 2020 *Chin. J. Appl. Mech.* **37** 737 (in Chinese) [宁利中, 张珂, 宁碧波, 吴昊, 田伟利 2020 *应用力学学报* **37** 737]
- [26] Patankar S V 1982 *Computation of Heat Transfer and Fluid Flow* (Minneapolis: University of Minnesota) pp20–30
- [27] Hu B, Ning L Z, Ning B B, Tian W L, Wu H, Ning J H 2017 *Chin. J. Hydrodyn.* **32** 336 (in Chinese) [胡彪, 宁利中, 宁碧波, 田伟利, 吴昊, 宁景昊 2017 *水动力学研究与进展* **32** 336]



# Convection partition and dynamics in inclined Poiseuille-Rayleigh-Bénard flow\*

Ning Li-Zhong<sup>1)</sup> Zhang Ke<sup>1)</sup> Ning Bi-Bo<sup>2)†</sup> Liu Shuang<sup>1)</sup> Tian Wei-Li<sup>3)</sup>

1) (*Institute of Water Resources and Hydro-electric Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China*)

2) (*College of Civil Engineering and Architecture, Jiaxing University, Jiaxing 314001, China*)

3) (*Department of Architecture, Shanghai University, Shanghai 200444, China*)

( Received 21 December 2019; revised manuscript received 25 March 2020 )

## Abstract

Since Henri Bénard first carried out experiments on convection in the fluid layer heated from below at the beginning of last century, and Lord Rayleigh first analyzed small disturbance theoretically, Rayleigh-Bénard convection has received much attention from many researchers, and has become one of the models to study the spatiotemporal structure, flow stability and dynamic characteristics of convection. The methods of studying the Rayleigh-Bénard convection are divided into experimental research, theoretical analysis and numerical simulation. With the development of computer, the research of numerical simulation has made great progress. Because the Rayleigh-Bénard convection can be accurately described by continuity equation, momentum equation and energy equation of hydrodynamics. Therefore, the numerical simulation based on hydrodynamics equations has aroused a lot of research interest. Based on the classical Rayleigh-Bénard convection, the influence of horizontal flow on the Rayleigh-Bénard convection can be studied by applying horizontal flow to one end of the horizontal cavity. On the other hand, the influence of cavity inclination on Rayleigh-Bénard convection can be studied by considering the variation of inclined angles in the cavity. Some valuable convective properties have been obtained. In order to reveal some new convection structures or phenomena, the effects of cavity inclination and through-flow on Rayleigh-Bénard convection are considered at the same time in this paper.

By using the numerical simulation of the basic equations of hydrodynamics, the convection partition and dynamic characteristics of the fluid with Prandtl number  $Pr = 6.99$  in the inclined cavity with through-flows are discussed. The results show that for the reduced Rayleigh number  $r = 9$ , the system presents uniform traveling wave convection, non-uniform traveling wave convection and single roll convection pattern at the through-flow Reynolds number  $Re = 1.5$  with the increase of the inclined angle  $\theta$  in the cavity, that for the through-flow Reynolds number  $Re = 12.5$ , the system presents the localized traveling wave convection, parallel flow and localized single roll convection pattern with the increase of the inclined angle  $\theta$  in the cavity, that furthermore, the numerical simulation of different values of through-flow Reynolds number  $Re$  and inclined angle  $\theta$  in the cavity shows that on the plane composed of through flow Reynolds number  $Re$  and inclined angle  $\theta$  in the cavity, the convection in the inclined cavity with through-flow can be divided into six kinds of pattern regions, namely, uniform traveling wave convection region, non-uniform traveling wave convection region, single roll convection region, localized traveling wave convection region, parallel flow region, and localized single roll convection region. The characteristics of the maximum vertical velocity  $w_{\max}$  and Nusselt number  $Nu$  of convection varying with time in different convection regions are studied. The dynamic properties of convective amplitude  $A$  and Nusselt number  $Nu$  in different convective regions varying with inclined angle  $\theta$  in the cavity are discussed.

**Keywords:** through flow, inclined cavity, convective pattern, partition, dynamic characteristics

**PACS:** 44.25.+f, 44.15.+a, 05.70.Ln, 82.40.Bj

**DOI:** 10.7498/aps.69.20191941

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10872164) and the Foundation of State Key Laboratory of Eco-hydraulics in Northwest Arid Region, China (Grant No. 2017ZZKT-2).

† Corresponding author. E-mail: [ning\\_bibo@163.com](mailto:ning_bibo@163.com)