

专题：探索凝聚态中的马约拉纳粒子

马约拉纳零能模的非阿贝尔统计及其在  
拓扑量子计算的应用\*何映萍<sup>1)2)</sup> 洪健松<sup>1)2)</sup> 刘雄军<sup>1)2)3)4)†</sup>

1) (北京大学物理学院, 量子材料科学中心, 北京 100871)

2) (量子物质科学协同创新中心, 北京 100871)

3) (北京量子信息科学研究院, 北京 100193)

4) (中国科学院大学, 中国科学院拓扑量子计算卓越创新中心, 北京 100190)

(2020年5月31日收到; 2020年6月3日收到修改稿)

自1937年被预言以来, 马约拉纳费米子在粒子物理领域和暗物质领域就广受关注. 它们在凝聚态物理中的“副本”, 马约拉纳零能模 (Majorana zero mode, MZM), 被指出可以通过拓扑超导实现, 并由于满足非阿贝尔统计及可以用来实现容错的量子计算机而成为凝聚态领域最受关注的研究方向之一. 尤其在近二十年中, 马约拉纳零能模在理论和实验方面均取得了诸多重要进展, 一些综述文章对此做了较详细介绍. 本文将重点回顾 MZM 的非阿贝尔统计性质以及它们在量子计算中的应用. 文章的第一部分首先简单介绍了凝聚态系统中 MZM 的理论发展并概述了在人工异质结体系中寻找 MZM 的最新理论和实验进展. 然后介绍了 MZM 非阿贝尔统计的基本概念, 并讨论这一性质怎样应用到量子计算中. 接下来重点讨论了利用 MZM 平台实现量子计算机的两个关键步骤: MZM 非阿贝尔编织操作的实验实现方案和 MZM 量子比特的读取. 在这一部分里, 本文分别详细列举了现有的比较受关注的实现 MZM 编织操作和量子比特的读取实验装置. 最后, 文章介绍了在对称性保护的拓扑超导系统中实现马约拉纳的对称保护非阿贝尔统计的可能性.

关键词: 马约拉纳零能模, 非阿贝尔统计, 拓扑超导, 量子计算

PACS: 03.67.Lx, 74.78.Na, 74.90.+n, 03.75.Lm

DOI: 10.7498/aps.69.20200812

## 1 引言

马约拉纳费米子在 20 世纪 30 年代由意大利物理学家 Ettore Majorana<sup>[1]</sup> 在研究满足电子与正电子对称形式的 Dirac 方程解时提出. 当将 Dirac 矩阵用纯虚的矩阵表示, 即在 Majorana 表象下, Dirac 方程的解为实数场, 存在的能量为零的定态解. 这个定态解满足场的共轭为自身. 用场论语言来说, 由这种场描述的粒子在实空间的产生

和消失算符等于自身, 即  $\gamma(\mathbf{x}) = \gamma^\dagger(\mathbf{x})$ . 通俗来说, 这相当于马约拉纳费米子的反粒子等于它自身. 在马约拉纳表象下,  $U(1)$  规范对称性不再满足, 因此马约拉纳费米子是一种轻子数不守恒, 电中性、且自旋为  $1/2$  的粒子. 这种粒子被预言以来, 在粒子领域至今未被证实. 高能物理中猜想中微子可能是马约拉纳费米子, 但是能支持这一观点的无中微子双  $\beta$  衰变尚未在实验室被观测到<sup>[2]</sup>. 由于马约拉纳费米子对进一步理解基本粒子物理有重要意义, 寻找马约拉纳费米子作为一种基本粒子的证据仍是

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11825401, 11761161003, 11921005)、科技部重点专项 (批准号: 2016YFA0301604) 和中国科学院战略性先导项目 (批准号: XDB28000000) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xiongjunliu@pku.edu.cn

高能物理的重要课题<sup>[3-6]</sup>.

在凝聚态领域中, 马约拉纳费米子在近二十年获得大量关注和积极研究<sup>[7-12]</sup>. 凝聚态体系中的基本粒子只有电子, 马约拉纳费米子只能以类似准粒子的形式存在. 我们知道, 在电子形成的费米液体中, 基态是电子从能带底部填充到费米面而形成的费米海. 在费米面以上和费米面以下出现的激发分别是带负电的电子型激发和带正电的空穴型激发. 在凝聚态物理中电子和空穴可看作彼此的准反粒子. 因此, 一个导致马约拉纳费米子的简单考虑是让电子和空穴叠加, 形成新的准粒子. 显然这类准粒子态可能在超导中存在. 超导中的伯格留波夫准粒子激发是电子和空穴的叠加. 当电子和空穴等幅值叠加时, 可以得到电中性的准粒子. 这是超导体中可能出现马约拉纳准粒子重要原因. 具体而言, 在传统的 s 波超导体中, 库珀对是由自旋相反的两个电子配对形成的, 其配对哈密顿量可描述为

$$H_{\text{pair}}^s = \sum_{\mathbf{k}} \Delta_s c_{\mathbf{k},\uparrow} c_{-\mathbf{k},\downarrow} + \text{h.c.}, \quad (1)$$

该配对哈密顿量可以等价写在 Nambu 空间中, 即电子-空穴空间表象中, 从而变成  $H_{\text{pair}} = \sum_{\mathbf{k}} \Delta_s d_{\mathbf{k},\uparrow}^\dagger c_{\mathbf{k},\downarrow} + \text{h.c.}$ , 其中如上所述, 空穴算符是电子算符的准反粒子算符  $d_{\mathbf{k},\uparrow}^\dagger = c_{-\mathbf{k},\uparrow}^\dagger$ . 这个简单形式告诉我们, 超导中形成库珀对的机制可等价看作电子和空穴的耦合. 这就使得在 s 波超导中出现的激发必然是电子和空穴的叠加态, 即一般满足  $b_{\mathbf{k}} = uc_{\mathbf{k},\uparrow} + vd_{\mathbf{k},\downarrow} = uc_{\mathbf{k},\uparrow} + vc_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger$  的形式. 然而这种破坏 s 波超导中库珀对的激发仍是自旋相反的电子和空穴的叠加, 显然不满足自共轭条件. 要出现满足自共轭的准粒子激发, 需要消除自旋自由度差异带来的影响. 因此, 马上可以想到的是由同种自旋态的电子形成库珀对的超导载体, 其对应激发态必然为自旋相同的电子和空穴的叠加, 从而可能出现马约拉纳费米子. 根据泡利不相容原理, 自旋相同的两个电子配对的空间波函数必须是奇宇称的. 其中 p 波超导是最简单的例子, 配对哈密顿量可满足如下形式:

$$H_{\text{pair}}^p = \sum_{\mathbf{k}} \Delta_p(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}} + \text{h.c.}, \quad (2)$$

其中序参量满足奇宇称:  $\Delta_p(\mathbf{k}) = -\Delta_p(-\mathbf{k})$ . 类似 s 波超导, 此时准粒子激发算符必然满足  $\gamma_{\mathbf{k}} = uc_{\mathbf{k}} + vc_{-\mathbf{k}}^\dagger$  形式. 如写到实空间, 很容易验证  $\gamma(\mathbf{x}) =$

$u(\mathbf{x})c(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x})c^\dagger(\mathbf{x})$ . 于是当  $u = v^*$ , 即得到马约拉纳费米子.

按照这个思路, 理论进一步发现, 在一维 p 波拓扑超导体的边界处和二维  $p + ip$  拓扑超导体的涡旋中心, 存在零能的马约拉纳零能模 (Majorana zero mode, MZM) 激发, 满足自共轭特征. MZM 的粒子数算符满足  $\gamma^\dagger \gamma = \gamma^2 = 1$ . MZM 的自共轭性使得单个的 MZM 不存在粒子数空间. 两个 MZM 组成一个 Dirac 复费米子, 对应  $|0\rangle, |1\rangle$  两个量子态, 因此每个 MZM 的量子维度是  $\sqrt{2}$ , 对应于半个费米子. 这个特殊的量子维度使得 MZM 满足非阿贝尔统计这一十分奇特的性质<sup>[7,13-15]</sup>. 另一方面, 组成一个复费米子态的两个 MZM 在空间上是可以分离的, 这样构成的复费米子态有着非局域性. 由于空间单独存在的 MZM 不能被局域扰动影响, 这使得非局域存在的复费米子态具有拓扑稳定特性<sup>[7,13-15]</sup>. 这两方面重要特性使得 MZM 有可能成为实现抗退相干拓扑量子计算的重要基本单元, 因而成为近十年凝聚态物理中备受瞩目的热点研究课题.

过去三十年里, 遵循量子力学规律工作的量子计算机是物理研究的重要热点. 其中主要挑战在于量子态很容易受环境的干扰产生退相干现象, 使得难以实现大规模的量子计算机. 上述由 MZM 组成的非局域拓扑量子比特可望解决退相干问题, 拓扑量子计算正是因此动机而被提出. 利用非阿贝尔任意子的统计性质, 在受拓扑保护的任意子量子系统中, 量子信息能够以非局域的形式被存储起来, 这使得量子信息能抵抗局域的环境噪声影响, 从而在硬件上解决量子退相干问题. 另外, 量子信息的操控由非阿贝尔任意子的拓扑编织 (braiding) 来实现. 量子门操作不依赖任意子的交换轨迹, 其精度受拓扑性质保护<sup>[16]</sup>. 分数量子霍尔效应系统是最早被考虑作为实现拓扑量子计算平台的非阿贝尔任意子系统<sup>[15,17,18]</sup>. 进一步, 拓扑超导系统中的 MZM 被证明具有非阿贝尔统计性质后, 成为拓扑量子计算的重要研究对象<sup>[7,13,19]</sup>. 近十年多来, 在真实物理系统中实现 MZM 的理论工作取得突破<sup>[20-26]</sup>, 寻找 MZM 的实验取得一系列重要进展<sup>[27-35]</sup>. 把拓扑超导作为可拓展的量子计算平台的装置也相继被提出<sup>[36-41]</sup>. 这些发展使得 MZM 正在成为最有潜力实现拓扑量子计算的平台<sup>[18,42]</sup>.

## 2 凝聚态体系中的 MZM

可承载 MZM 的最简单的系统是 Kitaev<sup>[19]</sup> 在 2001 年提出一维无自旋的 p 波超导链模型:

$$H = -\mu \sum_{x=1}^N c_x^\dagger c_x - \sum_{x=1}^{N-1} (t c_x^\dagger c_{x+1} + \Delta e^{i\phi} c_x c_{x+1} + \text{h.c.}), \quad (3)$$

其中, 每个格点有一个无自旋的费米子态  $c_x$ ,  $\mu$  是化学势, 最近邻跃迁强度为  $t$ ,  $\Delta$  是最近邻 p 波超导配对强度,  $\phi$  是超导配对相位. 定义马约拉纳算符  $\gamma_{x,A} = i(c_x^\dagger e^{-i\phi/2} - c_x e^{i\phi/2})$ ,  $\gamma_{x,B} = c_x^\dagger e^{-i\phi/2} + c_x e^{i\phi/2}$ . 显然, 马约拉纳算符满足反对易关系  $\gamma_{x,\alpha} = \gamma_{x,\alpha}$ ,  $\{\gamma_{\alpha,x}, \gamma_{\alpha',x'}\} = 2\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{x,x'}$ , 其中  $\alpha = A, B$ . 在这组马约拉纳基矢下改写哈密顿量为:

$$H = -\frac{\mu}{2} \sum_{x=1}^N (1 + i\gamma_{x,B}\gamma_{x,A}) - \frac{i}{4} \sum_{x=1}^{N-1} [(\Delta + t)\gamma_{x,B}\gamma_{x+1,A} + (\Delta - t)\gamma_{x,A}\gamma_{x+1,B}]. \quad (4)$$

这个系统看起来很简单, 却有两个不同的拓扑相. 在这里我们以两组特殊的参数说明这两个不同拓扑相有完全不同的物理. 在  $\mu \neq 0, \Delta = t = 0$  时, 如图 1(a) 所示, (4) 式只有第一项不为零, 哈密顿量简化为

$$H = -\frac{\mu}{2} \sum_{x=1}^N (1 + i\gamma_{x,B}\gamma_{x,A}) = -\mu \sum_{x=1}^N c_x^\dagger c_x. \quad (5)$$

此时每一个格点上的两个马约拉纳算符通过化学势  $\mu$  耦合在一起形成能量不为零的费米子激发  $c_x$ , 系统不存在空间分离的 MZM, 也没有零能的激发, 系统具有唯一的非简并基态. 在  $\mu = 0, \Delta = t$  时, 如图 1(b) 所示, (4) 式中只有第二项不为零, 哈密顿量简化为

$$H = -\frac{i}{4} \sum_{x=1}^{N-1} (\Delta + t)\gamma_{x,B}\gamma_{x+1,A} = t \sum_{x=1}^{N-1} \left( f_x^\dagger f_x - \frac{1}{2} \right), \quad (6)$$

其中  $f_x = \frac{1}{2}(\gamma_{x+1,A} + i\gamma_{x,B})$ . 此时相邻格点的两个马约拉纳算符通过超导  $\Delta$  和跃迁能  $t$  耦合在一起形成能量不为零的费米子激发. 特别地,  $\gamma_{1,A}$  和  $\gamma_{N,B}$  并没有出现在哈密顿量中, 超导链的两端各自存在一个零能本征模式 MZM. 由于 MZM 不存在

粒子数态空间, 把这两个空间分离的 MZM 组合成一个费米子  $f = \frac{1}{2}(\gamma_{1,A} + i\gamma_{N,B})$ , 则  $f$  的激发能可为零. 因此系统具有二重简并基态, 分别对应  $f$  的真空态  $|0\rangle$  和占据态  $|1\rangle = f^\dagger|0\rangle$ . 需要注意的是, 和普通的局域费米子不同, 费米子  $f$  具有空间非局域性, 这使得 MZM 组成的量子态具有拓扑稳定性.

边界处 MZM 的存在是由系统体态的拓扑性质决定的. 对 Kitaev 链取周期边界条件并对哈密顿量作傅里叶变换, 得到体系在动量空间可以被写为 (令  $C_k = (c_k, c_{-k}^\dagger)$  为 Nambu 空间基矢算符)

$$H = \frac{1}{2} \sum C_k^\dagger H(k) C_k, \quad H(k) = \begin{pmatrix} -t \cos k - \mu & i\Delta e^{-i\phi} \sin k \\ -i\Delta e^{i\phi} \sin k & t \cos k + \mu \end{pmatrix}. \quad (7)$$

体系拓扑不变量可由一维缠绕数刻画<sup>[8,43]</sup>. 为简便,

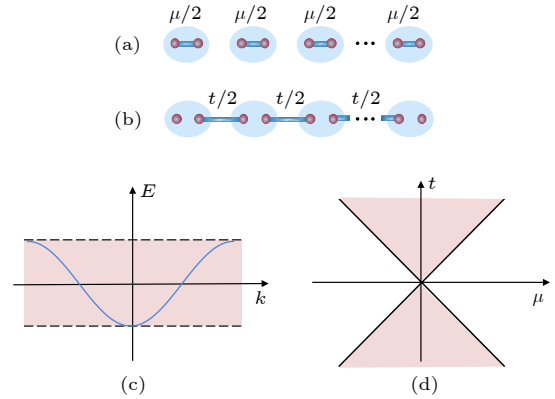


图 1 Kitaev 链的两个拓扑相 (a) 和 (b) Majorana 基矢下的哈密顿量示意图. 图 (a) 中  $\mu \neq 0, \Delta = t = 0$ , 只有第一项  $(1 + i\gamma_{x,B}\gamma_{x,A})$  不为零, 每一个格点上的两个马约拉纳算符耦合在一起, 不存在空间分离的 MZM. 图 (b) 中  $\mu = 0, \Delta = t$ , 只有第二项  $\gamma_{x,B}\gamma_{x+1,A}$  不为零, 相邻格点的两个马约拉纳算符耦合在一起, 超导链的两端各自剩下一个 MZM. (c)  $\Delta = 0$  时的色散关系. (d) Kitaev 链的拓扑相图. 当化学势穿过能带时, 体系处在拓扑相, 由 (d) 中的橙色区域描述; 反之, 体系处在平庸相, 由 (d) 中的白色区域描述

Fig. 1. Two topological phases of the Kitaev chain. (a) Schematic illustration of the Hamiltonian in Majorana basis. In (a)  $\mu \neq 0, \Delta = t = 0$ , only the first term  $(1 + i\gamma_{x,B}\gamma_{x,A})$  survives thus Majoranas couple at the same site leaving no separate MZMs left. In (b)  $\mu = 0, \Delta = t$ , only the second term  $\gamma_{x,B}\gamma_{x+1,A}$  survives thus Majoranas couple at adjacent sites, leaving one MZM at each end of the chain. (c) Energy dispersion for  $\Delta = 0$ . (d) Topological phase diagram of Kitaev chain. When the chemical potential crosses the normal spectrum the system is in topological phase, as described by the orange region in (d); otherwise the system is trivial, as described by the white region in (d).

可做变换使得  $\phi = 0$ , 哈密顿量变为  $\mathcal{H}(k) = h_z \tau_z + h_y \tau_y$ . 一维缠绕数即为当  $k$  改变  $2\pi$  时向量  $\mathbf{h}(k) = (h_y, h_z)$  在  $y$ - $z$  平面内缠绕的圈数. 对于 Kitaev 链, 拓扑数可以进一步由高对称动量点的性质给出:  $\mathcal{N} = [\text{sgn}(h_z(0)) - \text{sgn}(h_z(\pi))]/2$ ,  $h_z = -\mu - t \cos k$ . 由此可知拓扑非平凡相的区域满足  $|\mu| < t$ . 在任何不关闭能隙的连续变换下拓扑不变量保持不变, 要发生拓扑相变必须要关闭能隙. 对角化哈密顿量  $\mathbf{H}(k)$  得到体态的激发能谱为

$$E(k) = \sqrt{(-t \cos k - \mu)^2 + \Delta^2 \sin^2 k}. \quad (8)$$

容易得到, 只有在  $|\mu| = |t|$  时, 系统能隙关闭, 也即发生拓扑相变. Kitaev 链的拓扑相图由图 1(d) 给出. 在  $|\mu| < |t|$  时, 体系处于拓扑相; 在  $|\mu| > |t|$  时, 体系处于平庸相. 需要注意, 在有限尺寸的非平庸相下, 体系两端各存在的 MZM 可以存在有限尺寸耦合, 但耦合的能量随着距离的增加而指数衰减  $E_f \propto e^{-L}$ . 一方面, 可以通过控制两个 MZM 的耦合初始化 MZM 组成的非局域的费米子态  $f$ , 另一方面, 当使得两个 MZM 离得足够远时, 该非局域费米子  $f$  的激发能可为零, 系统具有二重简并的基态. 下文中会提到, MZM 带来的基态简并度和非局域性使其可以成为实现拓扑量子计算的平台.

尽管内秉的 Kitaev 超导链在真实系统中并未被发现, 与之等价的一维拓扑超导可通过有强自旋轨道耦合效应 (spin-orbit coupling, SOC) 的半导体纳米线放在  $s$  波超导体上并外加与自旋轨道方向垂直的塞曼场来实现. 该条件下纳米线中可以诱导出等效的无自旋  $p$  波超导<sup>[23,24]</sup>. 此时体系由以下哈密顿量描述:

$$H = \int dx \psi^\dagger \left( -\frac{\partial_x^2}{2m} - \mu - i\lambda \sigma_y \partial_x + h \sigma_z \right) \psi + \Delta \psi_\uparrow \psi_\downarrow + \text{h.c.}, \quad (9)$$

其中  $\psi = (\psi_\uparrow, \psi_\downarrow)^T$ ,  $m$  是电子的有效质量,  $\mu$  是化学势,  $\lambda$  是 SOC 的强度,  $h$  是外加塞曼场的强度, 由外加磁场强度和材料的朗德因子  $g$  决定,  $\Delta$  是  $s$  波超导体通过近邻效应在纳米线中诱导出的超导强度. 如图 2 所示, 由于存在 SOC, 自旋和动量关系被锁定. 再加上塞曼场在  $k = 0$  处打开能隙, 使得当费米能量处于此能隙中时, 费米面上只有一个能带, 系统的低能物理等效于“无自旋”费米子. 此时由超导近邻效应在纳米线中诱导的费米点附近

$\pm k$  动量之间  $s$  配对, 再写到自旋本征态上, 等效成为一维  $p$  波超导, 因而此时体系的低能物理由 Kitaev 模型描述. (9) 式的哈密顿量和 Kitaev 链的拓扑性质由同一个拓扑不变量描述. 通过对 (9) 式进行能谱分析, 可以得到体系的拓扑非平凡相区域为  $h^2 > \Delta^2 + \mu^2$ , 由图 2(c) 给出<sup>[44-46]</sup>. 很快, Delft 实验组<sup>[27]</sup> 在 2012 年首先报道, 把 InSb 纳米线放在超导体的表面, 在一定外加磁场的条件下初步观测到了由末端 MZM 诱导的零偏压电导峰 (Zero-Bias Conductance Peak, ZBCP). 类似观测也被其他实验组看到<sup>[47-50]</sup>. 零压隧穿电导峰是 MZM 的间接证据之一. 特别地, 由于 MZM 的自共轭特性, 在零温下由 MZM 诱导的隧穿谱 ZBCP 应该是高度为  $2e^2/h$  的量子化电导<sup>[51-54]</sup>, 并在有限温度下会降低<sup>[55]</sup>. 此外, Yazdani 研究组<sup>[28]</sup> 在有 SOC 的铅衬底上生长的铁原子链两端也测到了 ZBCP, 分析可能是 MZM 存在的迹象. 把图 2(a)

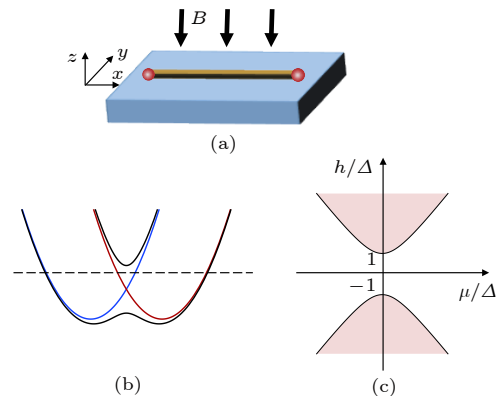


图 2 在一维 SOC 纳米线中实现马约拉纳零模激发<sup>[8]</sup>. (a) 装置简图; (b) 一维 SOC 纳米线的色散关系. 在无外加塞曼场时, 系统具有时间反演对称性, 体系有偶数个费米面 (红色和蓝色曲线); 在外加塞曼场时, 时间反演对称性被破坏,  $k = 0$  处被打开能隙 (黑色曲线). 若化学势位于能隙中间, 该体系只有一个费米面, 其低能哈密顿量等效为 Kitaev 链. (c) 体系的拓扑相图, 其中相边界由  $h^2 = \Delta^2 + \mu^2$  给出, 橙色 (白色) 表示拓扑 (平庸) 区

Fig. 2. Realizing MZMs in a 1D SOC nanowire<sup>[8]</sup>. (a) Sketch of the basic setup. (b) Energy dispersion for the 1D SOC nanowire. When Zeeman field is absent, the system is time-reversal symmetric (TRS) and possesses even number of Fermi surfaces (red and blue curves); when Zeeman field is introduced, TRS is broken and a gap is opened at  $k = 0$  (black curves). Given that the chemical potential lies within gap, the system possesses only one Fermi surface, and the low-energy Hamiltonian is equivalent to that of the Kitaev chain. (c) Topological phase diagram of the system with the phase boundary given by  $h^2 = \Delta^2 + \mu^2$ . Orange (white) denotes topological (trivial) region.

中的一维 SOC 纳米线换成二维拓扑绝缘体 [56,57] 的边缘态形成二维拓扑绝缘体边缘/s 波超导体异质结, 在外加铁磁体的情况下同样可以实现等效 Kitaev 模型 [20,58].

此外, Pientka 等 [26] 在 2017 年的工作提出一种新型的平面约瑟夫森结也产生准一维的 MZM. 这种约瑟夫森结是在强 SOC 的二维电子气体上放置两个超导体形成约瑟夫森结, 在结区无超导处形成一维的 Andreev 束缚态能带. 在结区加上面内的磁场, 通过调节磁场和两端超导的相位差可以调节结区 Andreev 束缚态能带的拓扑与平庸的拓扑相变, 从而调控结区的垂直方向两端点的 MZM 出现和消失. 这个装置的优点一是通过调控结两端的超导相位差, 增大 MZM 出现的磁场范围, 降低实验对磁场强度的要求; 二是装置中磁场主要加在非超导区, 不影响会抑制超导序. 根据这个方案, 两个实验组分别在 HgTe 量子阱中的二维电子气和迁移率高的 InAs 电子气上面覆盖两块超导铝形成约瑟夫森结上测到了验证 MZM 存在的零偏压电子峰 [33,34]. 基于该装置提出了 MZM 编织等其他性质 [41,59,60].

MZM 也可以存在于二维无自旋  $p_x + ip_y$  拓扑超导体的涡旋中心 [13,61]. 二维无自旋  $p_x + ip_y$  手性拓扑超导体的哈密顿量可写为

$$H = \int d^2\mathbf{r} \left\{ \psi^\dagger(\mathbf{r}) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu \right) \psi(\mathbf{r}) + \frac{\Delta}{2} [e^{i\phi} \psi(\partial_x + i\partial_y) \psi + \text{h.c.}] \right\}. \quad (10)$$

二维手性拓扑超导的拓扑由第一陈数刻画 (即二维缠结数, 为动量空间往布洛赫球面的映射) [8,43]. 二维的无自旋内秉  $p_x + ip_y$  拓扑超导体同样难以在实际材料中实现, 但可以通过 s 波超导和二维自旋轨道耦合电子气做成人造异质结构而通过近邻效应等效实现. 其中, 将三维拓扑绝缘体的表面和 s 波超导结合, 在三维拓扑绝缘体由狄拉克锥描述的表面态 [62] 中引入超导序而形成等效的二维  $p_x + ip_y$  拓扑超导 [20,63–66]. 类似地, 将二维半导体量子阱和 s 波超导形成异质结, 并在外加塞曼场于  $\mathbf{k} = 0$  处打开能隙解除费米双重性 (Fermion doubling), 使得费米面只有一个能带时, 系统将形成等效的  $p_x + ip_y$  二维拓扑超导体 [21,22,67,68]. 相对复杂的异质结对实验工艺提出了挑战. 2012 年, 贾金锋

等 [69] 把层状三维拓扑绝缘体  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  薄膜生长在  $\text{NbSe}_2$  超导体衬底表面上, 第一次实现了超导相和拓扑相的共存. 在后续的研究中, 研究人员在体系的涡旋中心观察到了强度受自旋极化影响的零偏压峰, 实现了基于自旋探测的 MZM 观测 [29,70–72]. 相比于通过异质结构实现二维拓扑超导, 更近的理论预言铁基超导体的表面态可出现天然的二维 p 波拓扑超导态 [73,74]. 基于这个预测, 丁洪实验组 [31,32,75] 在 2018 年取得突破, 他们在  $\text{FeTe}_{0.55}\text{Se}_{0.45}$  的表面观察到了超导能隙被打开, 并后续观察到了超导涡旋中心的 ZBCP. 这一结果进一步被其他实验组证实 [76–79]. 基于铁基超导实现二维拓扑超导有两个特点: 一是不需要生长复杂的异质结, 这降低了工艺难度并避免生长晶体过程中的杂质等由异质结生长带来的问题; 二是体态超导直接诱导表面态打开能隙, 加上铁基超导的高的转变温度能诱导出大的拓扑超导能隙.

值得一提的是, 在涡旋中实现非阿贝尔 MZM 并非必须实现二维拓扑超导. 近期的理论预言, 除了在拓扑超导体的涡旋中, 在体态平庸的二维超导体中的拓扑缺陷中心也可能出现 MZM [80,81]. 事实上, 涡旋中的 MZM 并非由二维陈数刻画, 而是由定义在更高的三维空间中 (二维实空间加一维涡旋相位参数空间) 的 Hopf 拓扑数 [82] 或陈-西蒙斯数决定 [81]. 在特定的条件下, 体态拓扑平庸的二维超导体中的涡旋中心, 也可存在满足非阿贝尔统计的 MZM [81]. 这项理论结果表明 MZM 可能存在于更广泛的拓扑或平凡超导体中. 将二维拓展到三维超导金属中, 理论预言了第二陈数保护并满足三维圈非阿贝尔统计的手性 MZM [83].

除了涡旋中的 MZM, 一维手性马约拉纳边缘态存在于二维手性拓扑超导的边界 [84–87], 但实验观测存在更大的挑战. 近期报道在基于砷化镓衬底生长的单层  $(\text{Cr}_{0.12}\text{Bi}_{0.26}\text{Sb}_{0.62})_2\text{Te}_3$  合金量子反常霍尔绝缘体和超导体 Nb 形成的异质结结构中初步测到了由手性马约拉纳边缘态产生的半整数量子化两端隧穿电导平台 [30]. 在另一基于钛酸锶 ( $\text{SrTiO}_3$ ) 衬底生长的三明治结构量子反常霍尔绝缘体和超导异质结中没有观测到半整数量子化电导平台 [88]. 应当注意, 在量子反常霍尔绝缘体/s 波超导的实现中, 二维手性拓扑超导只存在于量子反常霍尔相的拓扑转变区域附近. 因为在此区域附

近, 量子反常霍尔材料体内能带处于接近能隙关闭状态, 使得费米能可能穿过单一费米面, 从而通过  $s$  波超导近邻效应诱导出二维手性拓扑超导. 容易判定, 这个转变区域必须对应于材料体内磁化能量和材料上下表面耦合能可竞争比较的参数区域. 因此, 实现手性马约拉纳边缘态需要对量子反常霍尔绝缘材料体内磁化强度具有相对平缓操控的能力. 并不是基于任意量子反常霍尔材料都能普遍实现手性马约拉纳边缘态. 实验观测仍需更多进步.

到目前为止, 观测 MZM 的绝大多数实验仍然是通过 MZM 诱导的隧穿电导的零偏压峰进行 [27,33,35,48,89–93]. 另一方面, MZM 诱导的  $4\pi$  周期的分数约瑟夫森效应是另一个重要观测现象 [7]. 在拓扑超导体形成的约瑟夫森结中, 两个 MZM 耦合形成 Andreev 束缚态, 约瑟夫森电流可以通过单电子隧穿产生. 由于单电子相位只是超导相位的一半, 拓扑超导体约瑟夫森结中的隧穿电流和超导相位形成  $4\pi$  的周期特征. 目前还没有实验能测到直流分数约瑟夫森电流, 但是已经有报道指出在 InAs 纳米线结构中实验观测到了交流约瑟夫森效应 [94–96]. 本文接下来将会重点介绍 MZM 在拓扑量子计算的应用, 包括非阿贝尔统计及其在量子计算中的应用, MZM 编织操作的实现方案, 以及量子比特的读取方案等.

### 3 MZM 非阿贝尔统计及其在量子计算的应用

#### 3.1 MZM 非阿贝尔统计

全同粒子的统计性质是量子多体物理的基本性质. 熟知的量子统计包括费米和玻色统计, 分别对应两个粒子交换后系统波函数改变或不改变符号. 更一般情形, 对于阿贝尔任意子, 交换前后的波函数满足  $|\Phi_f\rangle = e^{i\phi}|\Phi_i\rangle$ , 即相差一般化相位  $\phi$ . 由于相应演化算符由阿贝尔的  $U(1)$  相位 ( $e^{i\phi}$ ) 描述, 这类统计性质被称为阿贝尔统计. 当多体系统存在由准粒子带来的简并基态, 比如两个分离的 MZM 导致  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  的简并基态, 准粒子间的交换操作不仅带来系统波函数的相位改变, 且会发生不同简并基态之间的演化. 一般地, 有  $|\Phi_f\rangle = U_{\mathbb{R}}|\Phi_i\rangle$ . 这样准粒子交换操作由在简并基态空间内的矩阵  $U_{\mathbb{R}}$  描述. 由于矩阵不可对易, 此类统计性质被称为非阿贝尔统计, 相应的全同粒子称为非阿贝尔任意

子 [15]. 任意子的空间-时间轨迹可以由“世界线”描述, 如图 3(b) 所示. 在任意子的交换的过程中, 它们的“世界线”互相缠绕如同编辫子, 每一种缠绕方式对应一种交换, 因此任意子的交换又称为编织操作. 编织操作必须满足绝热条件, 并在单次编织完成后, 系统的哈密顿量回到初始. 从绝热定理可知, 要使绝热交换粒子前后系统的量子态发生变化, 系统必定具有简并的基态. 绝热交换两个任意子, 会导致在这个基态子空间中的一个么正变换, 数学表示为 [97]:

$$|\Psi_f(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int dt E(t)} \mathbf{B}_0(t) |\alpha(t)\rangle, \quad (11)$$

其中  $e^{-\frac{i}{\hbar} \int dt E(t)}$  是动力学相位;  $\mathbf{B}_0(t)$  是贝里相位的推广, 称为贝里矩阵. 考虑  $2N$  个空间分离足够远的 MZM  $\gamma_1, \dots, 2N$ , 把 MZM 组合成  $N$  个狄拉克费米子

$$f_i = (\gamma_{2i-1} + i\gamma_{2i})/2, \quad (12)$$

其中每个费米子  $f_j$  的能量为零  $\epsilon_j = 0$ . 因此这  $N$  个费米子构成  $2^N$  重简并的基态空间  $|\Phi_i\rangle =$

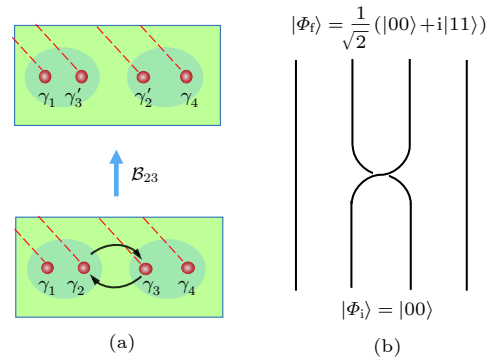


图 3 MZM 交换示意图 (a) 含有 4 个空间分离足够远的 MZM  $\gamma_{1,2,3,4}$  的体系, 其中  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$ 、 $\gamma_3$  和  $\gamma_4$  分别构成两个费米子.  $\gamma_2$  和  $\gamma_3$  顺时针交换一次,  $\gamma_2$  会跨越  $\gamma_3$  所在涡旋的相位割线获得一个负号, 而  $\gamma_3$  并未跨越  $\gamma_2$  所在涡旋的相位割线不获得负号. 因此结果是  $\gamma_2 \rightarrow -\gamma_3$ ,  $\gamma_3 \rightarrow \gamma_2$ . (b) 描述 4 个 MZM 的时间-空间 ( $x; t$ ) 轨迹的世界线.  $\gamma_2$  和  $\gamma_3$  被编织一次, 因此它们的世界线缠绕一次. 系统由初态  $|\Phi_i\rangle = |00\rangle$  演化到  $|\Phi_f\rangle = |00\rangle + i|11\rangle$

Fig. 3. Skeetch of a MZM braiding operation. (a) A system consists of 4 MZMs far enough apart, with  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  and  $\gamma_4$  forming 2 fermions  $f_1$  and  $f_2$ .  $\gamma_2$  and  $\gamma_3$  are braided once clockwise.  $\gamma_2$  crosses the branch cut of the vortex hosting  $\gamma_3$  and gains a minus sign, while  $\gamma_3$  doesn't cross the branch cut of the vortex hosting  $\gamma_2$  and doesn't gain a minus sign. Hence the result is given by  $\gamma_2 \rightarrow -\gamma_3$ ,  $\gamma_3 \rightarrow \gamma_2$ . (b) Worldlines in a space-time ( $x; t$ ) diagram, describing four MZMs.  $\gamma_2$  and  $\gamma_3$  are braided once, hence their worldlines winds each other once. The initial state  $|\Phi_i\rangle = |00\rangle$  evolves into  $|\Phi_f\rangle = |00\rangle + i|11\rangle$ .

$|n_1, \dots, n_N\rangle$ , 其中  $n_j = 0, 1$  是占据数  $\hat{n}_j = f_j^\dagger f_j$  的本征值. 由于超导满足费米宇称 (Fermion parity) 守恒, 编织操作只能使得量子态在  $2^{N-1}$ -维度的简并空间演化. 由 MZM 导致系统的基态简并, 这满足非阿贝尔统计的必要条件.

MZM 的非阿贝尔统计性质最早在二维系统中被提出来. Read 和 Green<sup>[13]</sup> 在研究  $5/2$ -分数量子霍尔效应的 Moore-Read Pfaffian 态时发现它们 adf 与二维  $p + ip$  超导系统有着对应关系, 前者中的非阿贝尔统计在二维  $p + ip$  超导的涡旋中心的零能激发将同样成立, 这一点由 Ivanov<sup>[14]</sup> 给出直接证明. 此外, Teo 和 Fu<sup>[98–100]</sup> 提出三维系统中满足特定条件的拓扑缺陷形成的 MZM 激发也可以满足非阿贝尔统计. 2011 年, Alicea 等<sup>[101]</sup> 通过构造一维网络证明了准一维拓扑超导系统中的 MZM 同样满足非阿贝尔统计性质, 这个工作开启了以一维 MZM 系统作为实现主要拓扑量子计算研究平台的广泛研究.

为方便描述, 我们以二维  $p + ip$  拓扑超导中的 MZM 介绍非阿贝尔统计性质. 如图 3(a), 考虑二维拓扑超导中的 4 个相互离得足够远的涡旋, 每一个涡旋中心有一个 MZM, 其中  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  按 (12) 式规则构成费米子  $f_1$ ,  $\gamma_3$  和  $\gamma_4$  构成  $f_2$ . 超导相位沿着每个涡旋绕一周变化  $2\pi$ . 一种方便的选择是让超导相位为关于割线的阶跃函数, 在割线以外的区域, 超导相位恒定, 越过割线时, 超导相位跃变  $2\pi$ . 这条割线可以是任意一条从涡旋中心延伸到无穷远处的线 (或延伸到一个反涡旋的中心). 由于超导序参量是 2 个电子的乘积, 而 MZM 是电子空穴的线性叠加, 所以 MZM 的相位是超导相位  $\phi$  的一半, 即  $\gamma \propto (f e^{i\phi/2} + f^\dagger e^{-i\phi/2})$ <sup>[14]</sup>. 现在让  $\gamma_2$  和  $\gamma_3$  所在的涡旋顺时针交换一次, 如图 3(a) 所示,  $\gamma_2$  所在涡旋会跨越  $\gamma_3$  所在涡旋的相位割线, 超导相位改变  $2\pi$ , 则  $\gamma_2$  相应获得  $\pi$  相位, 即变负号, 而  $\gamma_3$  并未跨越  $\gamma_2$  所在涡旋的相位割线不获得负号. 因此  $\gamma_2$  和  $\gamma_3$  顺时针交换一次结果是

$$\gamma_2 \rightarrow -\gamma_3, \quad \gamma_3 \rightarrow \gamma_2, \quad (13)$$

而  $\gamma_1$  和  $\gamma_4$  保持不变. 相应的编织算符用马约拉纳算符

$$\mathcal{B}_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_2\gamma_3), \quad (14)$$

满足  $\mathcal{B}_{23}\gamma_2\mathcal{B}_{23}^{-1} = -\gamma_3$  和  $\mathcal{B}_{23}\gamma_3\mathcal{B}_{23}^{-1} = \gamma_2$ . 假设系统

初态为  $f_1 f_2$  的真空态  $|\Phi_i\rangle = |00\rangle$ , 上述编织操作后得到

$$|\Phi_f\rangle = \mathcal{B}_{23}|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + i|11\rangle). \quad (15)$$

系统态在编织过程的演化用世界线的语言来描述, 如图 3(b). 编织导致不同简并态之间的转化, 表明编织操作属于矩阵操作, 因而对应为非阿贝尔编织. 需要注意的是, 编织结果与 MZM 具体走过的路径无关, 只由路径的拓扑性质决定, 是受拓扑保护的. 如果初始态是  $|11\rangle$ , 则编织后的结果为  $|\Phi_f\rangle = \mathcal{B}_{23}|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(i|00\rangle + |11\rangle)$ . 注意这里得到的是单次编织操作的结果. 一次完整的编织包含两次上述的单次编织, 其结果导致  $\gamma_2 \rightarrow -\gamma_2$  和  $\gamma_3 \rightarrow -\gamma_3$ , 复费米子空间的变化为  $\mathcal{B}_{23}^2|00\rangle = i|11\rangle$ . 类似地可以得出, 顺时针交换  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  操作算符为  $\mathcal{B}_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_1\gamma_2)$ . 容易知道, 编织操作  $\mathcal{B}_{12}$  不改变  $f_1$  和  $f_2$  的宇称, 因而粒子数表象中为对角化矩阵, 并可得到  $\mathcal{B}_{12}|00\rangle = |00\rangle$  和  $\mathcal{B}_{12}|11\rangle = -i|11\rangle$ . 因此, 在偶费米宇称子空间 ( $|00\rangle, |11\rangle$ ) 中编织操作  $\mathcal{B}_{23}$  和  $\mathcal{B}_{12}$  可以写成如下矩阵:

$$\mathcal{B}_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{12} = e^{i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \quad (16)$$

为方便, 矩阵  $\mathcal{B}_{12}$  乘了一个整体相位因子. 这不改变非阿贝尔统计物理. 显然, 贝里矩阵满足

$$\mathcal{B}_{12}\mathcal{B}_{23} \neq \mathcal{B}_{23}\mathcal{B}_{12}. \quad (17)$$

这重复验证了 MZM 之间的编织操作满足非阿贝尔特征. 事实上,  $2N$  个 MZM 的编织操作在基态子空间的贝里矩阵对应着编织群  $B_{2N}$  的一个投影表示<sup>[14]</sup>. 通过编织实现对量子态的操控, 可用于量子计算.

需要注意, 关于 MZM 的非阿贝尔统计常存在误解. MZM 的非阿贝尔统计核心在于: 我们在复费米子态空间看 MZM 的交换性质. 事实上, 不同 MZM 的算符满足费米子对易关系  $\{\gamma_i, \gamma_j\} = 0$  ( $i \neq j$ ). 但是, 单个 MZM 没有完好定义的复费米子态空间, 而有  $\sqrt{2}$  量子维度. 必须由 MZM 两两组合出复费米子态空间. 这导致即使不同 MZM 算符满足费米子反对易关系, 在复费米子态空间来看, 其编织相当于对非局域的量子态进行“分数化”操控, 从而导致量子态在简并空间的演化. 由此可知, MZM 的非阿贝尔统计是其在复费米子态空间

的特殊量子维度所致. 这导致我们在复费米子态空间看 MZM 的编织出现非阿贝尔特征. 由此得知, 零能量并非非阿贝尔统计的本质因素, 即使非零能 (但简并的) 马约拉纳费米子, 只要能够以某种方式实现编织, 也必然满足非阿贝尔统计行为. 但是 MZM 在实现单个 MZM 之间的编织上, 显然要自然和方便, 并受拓扑能隙的保护.

### 3.2 量子计算基础

1982 年, 物理学家费曼<sup>[102]</sup> 提出了按照量子力学规律工作的计算机的概念, 这是最早的量子计算机的思想. 在讲量子计算机以前, 首先回答: 什么是计算机? 计算机是一种处理信息的工具, 所有的计算系统都要有两大基本功能: 信息的存储和操控. 经典二进制计算机是把信息存储在二进制数组里, 通过对输入二进制数组实现特定的布尔运算得到新的二进制数组, 从而实现对信息的操控. 而量子计算机则是把信息存储在量子态里, 通过对量子态在特定条件下按照量子力学演化得到新的量子态, 从而实现对量子信息的操控. 显然, 量子物理具有很多经典物理所不具有的特点, 如量子态的叠加原理, 量子纠缠和量子相干性等性质. 通过充分利用这些奇特的量子特性制造出的量子计算机将有可能在一些问题的计算上比经典计算机有很大的优势. 目前已被证明的大大优于经典计算机的量子算法主要有三大类<sup>[16]</sup>: 用于做指数分解的 Shor 算法<sup>[103]</sup>, Grover 的搜索算法<sup>[104]</sup>, 和模拟真实的物理系统<sup>[102,105]</sup>.

经典计算的最小信息单位是比特, 每个比特可以是 0 或 1 两个状态. 量子计算的最小信息单位则包含两个量子态, 记为 $|0\rangle, |1\rangle$ , 称为量子比特. 和经典比特不同的是, 量子态是概率性的、满足叠加原理的, 也就是说, 每一个比特 $|\psi\rangle$ 都可以是 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的叠加态, 即

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (18)$$

其中,  $\alpha, \beta$  为复数并满足 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . 这意味着每一个比特都可以同时存储 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 两种信息状态. 同样地, 对于一个  $N$  比特的寄存器, 每一个量子态 $|\psi^N\rangle$ 都是 $2^N$ 个量子态的叠加态, 即

$$|\psi^N\rangle = \sum_{x=0}^{2^N-1} |x\rangle, \quad (19)$$

因此一个寄存器能同时存储 $2^N$ 个信息状态. 从一

个包含  $N$  个量子比特的量子态函数出发, 做一次计算实际上可相当于做了 $2^N$ 次计算, 这被称为量子并行计算<sup>[106,107]</sup>. 量子并行计算是人们认为量子计算有可能大大超越经典计算的主要原因之一. 除了态的叠加原理外, 量子力学中的量子态纠缠和干涉都是量子算法区别于经典算法的重要性质.

经典计算实现信息操控的是逻辑门<sup>[107]</sup>, 每一个经典逻辑门对应实现一个布尔函数

$$f: \{0, 1, 2, \dots, 2^m - 1\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}, \quad (20)$$

每一个经典门由一个 $2^m \times 2^n$ 的真值表描述. 而量子计算的操控是实现量子门, 每一个量子门由一个 $2^N \times 2^N$ 的幺正矩阵描述, 每一个量子门对应一个演化算符,

$$U_{\text{QG}}: |\Phi\rangle \rightarrow U_{\text{QG}}|\Phi\rangle. \quad (21)$$

与经典量子门对应的量子门是指按照经典门的真值表实现量子态矢量转化的量子门. 比如, 经典的非门是一个单比特门, 由一个 $2 \times 2$ 的真值表表示: $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0$ , 对应的量子门使得 $|0\rangle \rightarrow |1\rangle, |1\rangle \rightarrow |0\rangle$ , 矩阵形式为

$$U_{\text{NOT}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

实现通用的量子计算要求, 对于一个  $N$  比特的存储器, 必须要实现 $2^N$ 维希尔伯特空间的任意幺正变换 $U(2^N)$ . 正如在经典计算中实现通用计算只需实现一个完备的逻辑门集, 其他的逻辑门都可以由这个基本的逻辑门集里的门组合给出, 实现通用量子计算同样只需要实现一个通用量子门集, 其他的量子门都可以由这个集合里的量子门通过有限次组合得到. 下一节讨论基于 MZM 的拓扑量子计算中将给出具体形式.

DiVincenzo<sup>[108]</sup> 在 2000 年总结出了实现量子计算的物理系统必须满足的五大要求: 1) 具有良好特征的量子寄存器的可扩展物理系统; 2) 在简单的基准状态下初始化量子寄存器的能力; 3) 足够长的相关的相干时间, 远长于门控操作时间; 4) 可以实现一组“通用”的量子门; 5) 具有系统的测量能力. 然而, 量子系统都是“脆弱”的, 易于受环境干扰而且精确操控难度极高, 所以可扩展的量子计算机的研究碰到了很大的障碍. 目前而言, 对量子计算机的探求中遇到的两个最大的“绊脚石”是: 环境噪声导致的量子退相干问题和量子操作精度有限导致的量子门误差. 这两个困难使 DiVincenzo



给出的五大要求中的第三和第四个要求不能满足. 拓量子计算正是为了从根本上解决这两个问题而提出. 在受拓扑保护的阿贝尔任意量子系统中以非局域的形式存储量子信息, 并通过任意子的拓扑交换来实现量子信息的操控, 从硬件上可以实现抗退相干效应的量子计算<sup>[16]</sup>. 为此, 拓扑超导中的 MZM 系统是近十年来被研究最多的可用来作为拓量子计算平台的非阿贝尔任意子量子系统.

### 3.3 基于 MZM 实现量子计算

由于量子计算的优越性, 量子计算机被广泛研究, 但是由于量子态非常易于受环境干扰产生退相干效应和量子操作精度有限导致的量子门误差, 人们至今仍没有实现通用量子计算机. 而 MZM 形成的 Dirac 复费米子态具有非局域特性. 这使得由 MZM 组成的量子态受到拓扑保护, 不会被局域扰动所改变; 另一方面, MZM 的非阿贝尔统计性质又保证了通过交换 MZM 的位置可以在保持量子态非局域性的前提下高精度地实现量子态操控, 这些性质使得 MZM 成为实现量子计算的重要物理平台<sup>[109]</sup>.

前文中提到, 含有  $2N + 2$  个 MZM 的系统具有  $2^{N+1}$  重简并的基态, 但如前所述, 由于超导系统中的费米子宇称守恒 (即费米子奇偶数守恒), 这一系统实际上只能形成  $N$  个独立的量子比特. 图 4 中我们以密集编码方式的 2 比特的量子计算为例,

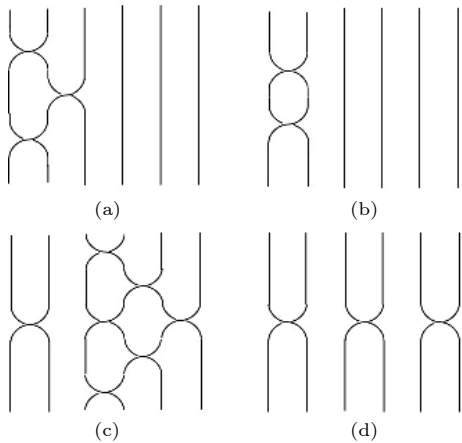


图 4 通过 MZM 编织操作实现量子门<sup>[110]</sup> (a)–(d) 分别为实现单比特量子门 H-门、Z-门、双比特门 CNOT 门和双比特门 CZ 门的编织操作示意图

Fig. 4. Quantum gates realized by MZM braiding operations<sup>[110]</sup>. (a)–(d) The elementary braids corresponding to the single-qubit gates H-, Z-gates on the first qubit as well as the 2-qubit CNOT and CZ gates.

说明用 MZM 怎样实现信息的存储和操控<sup>[110]</sup>. 2 比特系统由 6 个 MZM 构成  $\gamma_{1,2,3,4,5,6}$ , 按照  $f_i = \frac{\gamma_{2i-1} + i\gamma_{2i}}{2}$  构成 3 个费米子, 对应的占据数可以标记基态  $|n_1 n_2 n_3\rangle$ . 现选奇数基态子空间作为计算空间, 选取我们的计算基矢为

$$\begin{aligned} |00\rangle &= |n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 0\rangle, \\ |10\rangle &= |n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 0\rangle, \\ |01\rangle &= |n_1 = 0, n_2 = 1, n_3 = 1\rangle, \\ |11\rangle &= |n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 1\rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

按照前文给出的 MZM 的非阿贝尔编织结果  $B_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_i \gamma_j)$ . 相应地, 顺时针编织  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$ , 在这组计算基矢下可以表示为如下矩阵:

$$B_{12} = e^{i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}. \quad (24)$$

类似可以给出其他两个 MZM 之间的编织算符. 通过组合不同的编织操作可以实现不同功能的量子门. 其中常见的一些量子门的实现可以由图 4 中的“世界线”给出.

理论证明, 三个单比特量子门, 即 H-门, Z-门和 T-门, 加上一个纠缠的双比特门, 如 CNOT-门, 可以组成完备的通用量子门集<sup>[42,111,112]</sup>. 基于这 4 个基本的量子门, 其他的量子门都可以由这 4 个门的有限次组合近似得到, 进而实现通用量子计算. 这几个量子门表示如下

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \sigma_0, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} \otimes \sigma_0, \\ Z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \sigma_0, \quad \text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (25)$$

其中, H-门, Z-门和 CNOT-门都可以在图 4 中的世界线给出. 然而, T-门并不能由受拓扑保护 MZM 的编织组合给出. 因此, 单纯通过 MZM 的非阿贝尔编织还不能实现通用量子计算. 一种补充方案是通过非拓扑保护的方式实现 T-门, 从而结合拓扑和非拓扑的手段相结合来实现通用量子计算<sup>[113–117]</sup>.

## 4 MZM 编织操作的物理实现

### 4.1 一维 T-型结

在严格的一维体系中, MZM 不可能绕开彼此完成编织过程. 因此, Alicea 等<sup>[101]</sup> 提出用 T 型几何结构 (图 5) 的拓扑超导体 (T-junction) 实现 MZM 的编织. 通过调节门 (gate) 电压移动拓扑相和平庸相之间的畴壁, MZM 可以在 T-型结上移动, 借助垂直部分避免了 MZM 在编织过程中相遇. 利用  $f = (\gamma_1 + i\gamma_2)/2$  定义简并的多粒子基态波函数

$$|0\rangle, |1\rangle = f^\dagger|0\rangle, \quad (26)$$

原则上可以通过计算贝里相位

$$\chi_{0(1)} = \text{Im} \int dt \langle 0(1) | \partial_t | 0(1) \rangle \quad (27)$$

验证编织结果的非阿贝尔统计性质. 详细计算可以证明两个态之间的贝里相位差为  $\pi/2$ . 具体可参考文献 [101]. 此处通过如下直观定性分析快速得到编织结果.

从图 5 的编织过程可以看到, 基于 T-型结实现的一次编织实际上相当于  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  相对于结点逆时针转圈. 与二维系统不同, 一维链中 MZM 并不伴随涡旋, 因此没有涡旋割线描述. 但是在 T-型结的结点处, 由三端结点往纳米线的三个方向 (左、右、下), 以及虚拟的往上方向, 超导配对参数  $\Delta_p$  必须存在等效的相位涡旋特征, 方式如下. 考虑横向纳米线中为  $p_x$ -波超导, 则从结点往右 (图 5(a) 箭头方向) 和往左方向配对参量分别正负符号 (奇宇称  $p_x$ -波配对往左往右反号), 因此对应为 0 和  $\pi$  相位. 另一方面, 垂直方向的纳米线中, 超导配对参数必须有  $ip_y$  成分, 即必须和横向纳米线中配对参数有相位差. 否则, 如果垂直方向配对参数完全为实函数, 比如为  $p_y$ -波超导, 则这段纳米线和横向的左端, 或者右端部分必将形成  $\pi$ -约瑟夫森结, 从而在编织过程中在结点出现额外的 MZM, 导致破坏编织. 因此, 最简单且满足条件的构型是在垂直方向纳米线中 (朝上方向, 即图 5(b) 垂直箭头方向) 形成  $ip_y$  配对. 这样一来, 从结点往上和往下垂直方向的配对相位分别为  $\pi/2$  和  $3\pi/2$ . 由此, 绕结点逆时针一圈等效改变  $2\pi$  相位. 于是可以假想从结点引出一割线. MZM 在编织中则会跨过割线,

获得  $\pi$  相位, 从而得到二维中涡旋编织一样的结果. 其中图 5 描述的单次编织后, MZM 的变换满足  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2, \gamma_2 \rightarrow -\gamma_1$ , 对应非阿贝尔统计.

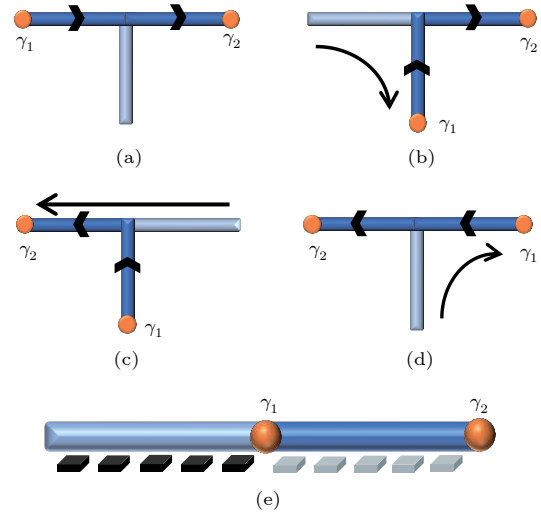


图 5 T-型结进行编织操作以及键盘门的操作方式<sup>[101]</sup>. T-型结由两条水平链和一条垂直链组成, 深蓝色部分为拓扑相, 浅蓝色部分为平庸相, 超导体上向上和向右的箭头分别代表  $\phi = \pi/2$  和  $\phi = 0$ , 用向左和向下的箭头代表  $\phi = \pi$  和  $\phi = 3\pi/2$ . T-型结外的箭头代表 MZM 运动的方向. 黑色和灰色方块分别代表局域门的关闭和打开状态, 对应平庸相和拓扑相. (a)–(d) 给出  $\gamma_1$  先运动到垂直链上, 然后  $\gamma_2$  从水平链右端运动到左端, 最后  $\gamma_1$  运动到右端的过程, 过程结束后箭头反向. (e) 中局域门的存在可以保证在不关闭能隙的前提下逐渐移动 MZM

Fig. 5. A T-junction allows for braiding process and the keyboard gates<sup>[101]</sup>. The T-junction consists of two horizontal segments and one vertical segment. Dark blue segments are in topological phase, and light blue lines trivial phase.  $\phi = 0$  or  $\pi/2$  is represented with rightward or upward pointing arrows, while  $\phi = \pi$  or  $3\pi/2$  represents the leftward or downward pointing arrows. MZMs are transported according to the arrows around the T-junction. Black and gray blocks denote different states of tunable gates in accordance with trivial and topological phases. (a)–(d) sketch the process which  $\gamma_1$  is transported to vertical line firstly, then  $\gamma_2$  travels from the right end to the left end and at last  $\gamma_1$  is transported to the right end. After this process, the arrow points to the opposite direction. Local gates in (e) ensure that the MZMs can be manipulated gradually without closing the gap.

另一种等价描述方式即将 T-型结看作三段 Kitaev 链并如下选择参数. 如图 5 所示, 用向上和向右的箭头分别代表  $\phi = \pi/2$  和  $\phi = 0$  的部分, 用向左和向下的箭头代表  $\phi = \pi$  和  $\phi = 2\pi/2$  的部分. 在编织过程中, 为了保证结点处只有一个零模, 拓扑非平凡区域箭头的指向必须保持一致, 并且在结点

处, 箭头指向必须一进一出. 这样在编织前后, 横向整条链的箭头必将反向. 此时对横向链所有的费米子算符做规范变换

$$f \rightarrow -if, \quad f^\dagger \rightarrow if^\dagger, \quad (28)$$

可将编织后的哈密顿量变回到编织前的形式, 由于  $f^\dagger = (\gamma_1 - i\gamma_2)/2$ , 该规范变换等价于  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2, \gamma_2 \rightarrow -\gamma_1$ , 同样得到非阿贝尔统计. 很容易将两个 MZM 的情形拓展到四个以及更多 MZM 的情况. 基于 T-型结原则上可以进一步构造纳米线网络, 实现 MZM 的编织和拓扑量子计算.

实现 MZM 在一维拓扑超导体上的运动可采用如图 5(e) 所示的键盘门 (keyboard gate) 的方式, 即局地地调节纳米线的化学势使得拓扑相和平庸相之间的畴壁逐渐移动. 但是该方案在实验上难以操作而且不能保证体系绝热演化<sup>[118,119]</sup>, 后续基于 T-型结以及改进的编织方案更多考虑利用调节 MZM 之间的相互作用, 如隧穿效应或库仑相互作用, 实现 MZM 位置的交换<sup>[36,37,120–124]</sup>.

## 4.2 基于测量的编织

通过 T-型结或类似装置实现 MZM 编织的最大困难在于保证移动 MZM 过程中的绝热条件. 尤其在 T 型结点处, 实际构型复杂, 容易出现非 MZM 的低能模式. 在调节 MZM 通过结点时, MZM 和其他复杂模式的耦合容易破坏绝热条件的成立, 从而影响 MZM 的编织操作. 避免这类困难的一种解决方案是基于测量实现 MZM 的编织. 这类方案的主要好处是不需要真实通过结点移动 MZM, 而是通过对 MZM 做一定顺序的测量, 导致对 MZM 的 teleportation 从而实现编织. 但另一方面, 这种方法需要使用辅助 MZM (ancilla Majorana). 这会带来对测量的一系列额外要求. 基于测量的拓扑量子计算一般理论参见文献<sup>[125]</sup>. 具体方案实现介绍如下.

首先考虑两个 MZM 情形, 即对  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  进行编织. 为此, 需要引入两个辅助 MZM, 记为  $\chi_1$  和  $\chi_2$ . 注意到引入两个辅助 MZM 会将需要操作的量子态空间增大一倍, 因此编织过程必须保证在固定的子空间进行. 编织过程分为如下步骤. 第一步, 测量两个辅助 MZM  $\chi_1$  和  $\chi_2$ , 并设想测量值为  $i\chi_1\chi_2 = +1$ . 则下面的测量中, 为确保编织过程系统在固定的子希尔伯特空间进行, 每次测量均选择相同的测量值. 第二步, 测量  $\gamma_1$  和  $\chi_1$ , 选择测量值

$i\gamma_1\chi_1 = +1$ . 第三步, 测量  $i\gamma_2$  和  $\chi_1$ , 同样选择  $i\gamma_2\chi_1 = +1$  测量值. 第四步, 再次测量  $\chi_1$  和  $\chi_2$  并选择测量值  $i\chi_1\chi_2 = +1$ . 完成这些步骤, 即实现了 MZM  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  的一次编织操作. 这些操作过程没有移动 MZM, 但测量操作会产生量子态隐形传输. 在第二步结束 (完成测量  $\gamma_1$  和  $\chi_1$ ) 后, 把初始  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  的拓扑量子比特转移到  $\gamma_2$  和  $\chi_2$ . 第三步操作则导致进一步转移到  $\chi_2$  和  $\gamma_1$ . 第四步转移回  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  的拓扑量子比特, 完成编织. 如果把这个过程和图 4 中的 T-型结对比, 其第二步相当于把左边的  $\gamma_1$  移动到垂直纳米线上, 第三步把右边的  $\gamma_2$  移动到左端, 第四步把  $\gamma_1$  从垂直纳米线移到右端.

上述两个 MZM 编织的方案很容易应用到四个 MZM  $\gamma_{1,2,3,4}$  的编织中. 这时同样需要两个辅助 MZM  $\chi_{1,2}$ . 通过和上面相同的操作过程, 对  $\gamma_{2,3}$  和  $\chi_{1,2}$  进行四步测量, 从而完成对  $\gamma_{2,3}$  的编织. MZM 的测量通过调节 MZM 之间耦合强度实现<sup>[126]</sup>. 基于测量编织方案进一步构造量子线路在近期也有相应研究<sup>[39]</sup>.

可以看到, 基于测量的编织方案具有不必移动 MZM 的优势, 但同时必须引入辅助 MZM. 这导致拓扑量子态希尔伯特空间增大. 因此要保证准确编织, 必须对测量值做选择, 确保在固定的子空间进行. 这带来两类潜在挑战. 首先, 量子态可出现向期望的子空间以外的态演化, 造成信息损失 (information leakage); 另外, 测量中总可能出现不是待选择值的其他结果, 比如在第二步中测量得到  $i\gamma_1\chi_1 = -1$ . 这时需要重复第一步使系统回到初态, 对应  $i\chi_1\chi_2 = +1$ , 然后再重做第二步测量, 检测是否得到期望结果  $i\gamma_1\chi_1 = +1$ . 如仍为非待选择值, 则再次重复前两步直到得到期望结果, 然后做进一步测量. 显然这样完成一次编织, 实际可能需要进行大量的测量, 从而带来更多的复杂性.

## 4.3 基于自旋操作实现编织

以上介绍的两类 MZM 编织操作分别要求移动 MZM 位置和操控不同 MZM 间的耦合来实现. 前者要求使 MZM 跨过 T 型结点, 后者要求引入额外 MZM、扩大简并空间而导致操作的复杂性. 因此这些在实验工艺上均存在大的难度, 使得 MZM 编织的实验实现仍是巨大挑战. 而拓扑量子计算理论指出, 对于有内禀空间的任意子, 描述它们演化的世界线应被扩展为“世界带”. 在世界带的语言中, 交换两个任意子的位置一次在拓扑上等价

于两个任意子的世界带各自扭转半圈<sup>[127]</sup>. 根据这个思想, 最近提出, 通过转动 MZM 自旋自由度来扭转 MZM 世界带可以实现 MZM 的等效编织, 从而实现既不移动 MZM 位置也不引入额外辅助 MZM 以及它们的耦合的编织方案<sup>[128]</sup>. 该方案应用到实验上常见的超导/二维拓扑绝缘体/铁磁绝缘体 (superconductor/2D topological insulator/ferromagnetic insulator, SC/2 DTI/FI) 的异质结系统中, 提出了一个可以操控 MZM 自旋进而实现 MZM 编织的实验装置.

如图 6(b) 所示, SC 区形成一维拓扑超导, FI 区为平庸绝缘体, 两区的交界出现孤立的 MZM, 此时 MZM 的自旋方向可由平庸区的铁磁体的磁化方向操控. 在这个实验装置中, 编织两个由铁磁区连接的 MZM 一次 (单次编织操作) 需要绝热地转动相应铁磁体的铁磁方向半圈, 即转过  $\pi$  角, 编织两个 MZM 两次 (一个完整的编织操作) 需要绝热地转动铁磁体的铁磁方向一整圈, 即转过  $2\pi$  角. 编织结果不受系统中的局域杂质和磁化不规则转动路径等因素的影响, 具有拓扑稳定性. 这个稳定性的物理原因在于编织操作引起的奇

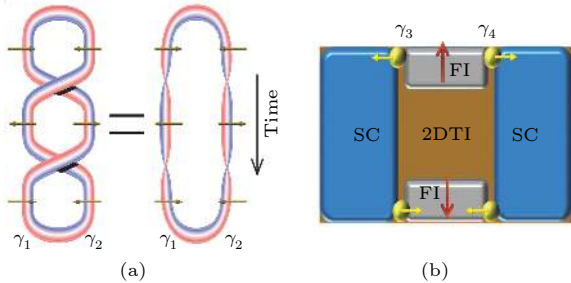


图 6 通过转动铁磁体的磁化方向实现铁磁体两端的 MZM<sup>[128]</sup> (a) 交换世界带两次在拓扑上等价于世界带各自扭转  $2\pi$ . 箭头表示 MZM 的自旋; 世界带的红蓝边界标记 MZM 的内部自由度的时间演化. (b) SC/QSH/FI 异质结装置中的 MZM. 黄色 (红色) 箭头表示 MZM 的局域自旋方向 (铁磁磁化方向). 下方的红色箭头转  $\pi$  角,  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  编织一次; 转  $2\pi$  角,  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  编织两次. 逆方向转动代表逆交换.

Fig. 6. Braiding operation via winding FI magnetization<sup>[128]</sup>.

(a) The monodromy operator can be realized by either braiding two MZMs or twisting each worldribbons by  $2\pi$ . The arrows indicate the MZM spin. The blue and red edges of the ribbon denote the evolution of internal degree of freedom. (b) MZMs in the SC/QSH/FI hybrid system. The yellow (red) arrows represent the directions of local spin polarizations for MZMs (FI magnetization). Winding the red arrow at the bottom by  $\pi$ ,  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  are braided once; by  $2\pi$  they are braided twice. A reverse rotation leads to an inverse braiding operation.

偶性变化和转动磁场引起的拓扑电荷泵之间的联系. 这个方案的优点一是不需要辅助 MZM, 这使得编织操作只涉及最少的 MZM; 二是可以在保持基态简并度 (无需测量操作) 同时不移动 MZM 位置就等效地实现 MZM 编织操作. 但是这个装置不能实现超导两端的 MZM 的编织, 在做到编织任意两个 MZM 上存在限制.

## 5 MZM 量子比特的读取

零压电导峰 (ZBCP) 是 MZM 的一个间接证据, 但是只是单个 MZM 的信息, 并不能读出量子比特. 量子比特是两个 MZM 组合成的 Dirac 复费米子的占据状态, 要读出量子比特, 必须把两个 MZM 耦合到一起, 考虑两个耦合的 MZM 作为一个整体的性质. 前比较广泛接受的读出 MZM 量子比特的方法主要有三种: 分数约瑟夫森效应, 库仑阻塞 (Coulomb blockade) 方法, 及干涉方法.

### 5.1 分数约瑟夫森效应

MZM 的分数约瑟夫森效应最早是 Kitaev<sup>[7]</sup> 在讨论 Kitaev 超导链模型的时候提出来的, 这是存在 MZM 的奇宇称拓扑超导系统的一个重要特性. 当两个 MZM 通过约瑟夫森耦合在一起时, 通过测量穿过约瑟夫森结的零偏压的电流响应, 也就是直流 (DC) 约瑟夫森电流, 我们可以推出这两个 MZM 组成的费米子的占据状态, 也就是读出 MZM 量子比特.

图 7(a) 所示为利用约瑟夫森效应的量子比特读出装置的简示图. 约瑟夫森结两端的超导体由绝缘区微弱地耦合起来, 当结两端各自存在一个 MZM 时, 流过结区的无阻超导电流包含两部分  $I = I_{2e} + I_e$ . 其中第一项是库珀对隧穿贡献的传统约瑟夫森电流  $I_{2e}$ , 第二项是两个 MZM 耦合在一起贡献的单电子隧穿电流  $I_e$ . 正是通过测量  $I_e$ <sup>[101]</sup>, 可以给出 MZM 耦合的量子比特的信息. 下面讨论  $I_e$  的形成机制和特性.

假设形成约瑟夫森结的两端拓扑超导相位分别为  $\phi_L$  和  $\phi_R$ . 结区存在的两个零能的 MZM 会通过量子隧穿耦合在一起, 形成能量非零的费米子态. 此时约瑟夫森结的低能有效哈密顿量为

$$H_{\text{eff}} = -i\frac{\lambda}{2} \cos \frac{\phi}{2} \gamma_1 \gamma_2 = \lambda \cos \frac{\phi}{2} (2f^\dagger f - 1), \quad (29)$$

其中,  $\phi = \phi_L - \phi_R$  是结两端超导相位差,  $\lambda$  是两个 MZM 耦合的强度,  $\gamma_{1,2}$  是马约拉纳算符,  $f$  是  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  耦合成的费米子  $f = (\gamma_1 - i\gamma_2)/2$ . 保持系统的粒子数奇偶守恒时,  $f$  的占据数不变, 流过结区的电流

$$I_e = \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial \langle H_{\text{eff}} \rangle}{\partial \phi} = (-1)^{n_0} \frac{\lambda 2e}{\hbar} \sin \frac{\phi}{2}, \quad (30)$$

其中  $n_0$  为系统初态的费米子  $f$  的占据数. 由电流的表达式可以看出, 和传统的库珀对隧穿形成的超导电流  $I_{2e}$  不同的是,  $I_{2e}$  是关于关于结两端超导相位差  $\phi$  以  $2\pi$  为周期变化的, 而  $I_e$  是关于结两端超导相位差  $\phi$  以  $4\pi$  为周期变化的. 因此这个现象被称为分数约瑟夫森效应.  $I_{2e}$  是由库珀对隧穿形成的, 是一个二阶过程, 载流子电荷为  $2e$ ;  $I_e$  是由于 MZM 透过结区耦合引起的单电子隧穿形成的电流, 是一个

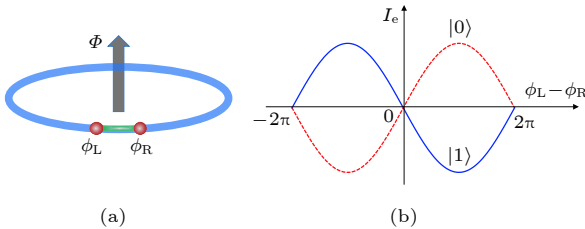


图 7 约瑟夫森结的量子比特读出装置<sup>[129]</sup> (a) 为 MZM 约瑟夫森结的示意图. 结两端各自存在一个 MZM. 蓝色区域为一维拓扑超导区, 绿色区域为绝缘体区. 拓扑区的长度足够长, 使得两个 MZM 通过拓扑区的耦合可以忽略.  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  通过足够短的绝缘区耦合起来, 形成一个能量非零的费米子. 通过改变通过线圈的磁场通量  $\phi$  可以改变结两端的超导相位差  $\phi$ . (b) 直流分数约瑟夫森电流随  $\phi$  的变化关系. 其中红色虚线代表空占据态  $|0\rangle$ , 蓝色实线代表占据态  $|1\rangle$ . 和传统的以  $2\pi$  周期的约瑟夫森电流不同的是, 分数约瑟夫森电流关于  $\phi$  的变化周期是  $4\pi$ . 量子比特  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  相对应的电流方向相反, 因此通过测量直流约瑟夫森电流可以读出 MZM 量子比特

Fig. 7. Basic set-up for qubit readout using a Josephson junction (JJ)<sup>[129]</sup>. (a) The schematic of a JJ with 2 MZMs residing at the junction. The blue region denotes 1d TSC and the green denoted trivial insulator. The TSC region should be long enough so that the coupling of the MZMs through TSC is negligible.  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  couple weakly at the junction, forming a non-zero energy fermion. The phase difference  $\phi$  can be varied by changing the magnetic flux  $\phi$ . (b) The d.c. fractional Josephson current flowing across the junction versus  $\phi$ . Instead of conventional  $2\pi$ -periodic JJ current induced by Cooper pair tunneling, the fractional JJ current induced by MZMs exhibits  $4\pi$  periodicity. The red dashed line denotes  $|0\rangle$  and the blue solid line denotes  $|1\rangle$ . The direction of the current is inverse for the qubit  $|0\rangle$  and  $|1\rangle$ , which enables the readout of the qubit by measuring the direct Josephson current.

一阶过程, 载流子电荷为  $e$ . 进一步,  $I_e$  中的  $(-1)^{n_0}$  因子说明, 费米子的占据状态改变时,  $I_e$  的方向也会改变. 因此通过测量  $I_e$ , 可以推断出费米子占据状态, 即读出 MZM 量子比特<sup>[20]</sup>.

虽然理论上测量出  $I_e$  就可以读出 MZM 量子比特, 但是实验上要测到  $I_e$  还有很多难点要克服. 一是怎么把  $I_e$  从  $I_{2e}$  和其他由于工艺不完善引入的直流信号中分离出来. 比如, 当 TSC 区不够长的时候,  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  通过 TSC 区的耦合不能被忽略, 这时两个 MZM 形成的  $I_e$  会既包含  $4\pi$  周期成分, 也包含  $2\pi$  周期成分,  $4\pi$  周期的电流信号会被压制<sup>[129]</sup>; 当结区的绝缘区有超导存在的时候, 绝缘区的库珀对分裂成两个电子, 分别进去结两边的超导区, 引入更复杂的电流成分<sup>[130]</sup>. 二是调制  $\phi$  的时间长度要适合. 若  $\phi$  变化太慢, 系统将保持在基态上, 约瑟夫森结内部的局域费米子宇称将不守恒, 粒子数奇偶发生变化. 这样电流的  $4\pi$  周期会还原为  $2\pi$  周期; 若  $\phi$  变化太快, 会在系统中激发很多准粒子, 影响测量. 目前还没有实验能提取出直流分数约瑟夫森电流的符号以读出量子比特, 但是交流约瑟夫森效应已经有报道<sup>[94,95,131]</sup>. 直流分数约瑟夫森效应的测量需要在已有装置的基础上进一步改良工艺. 最近提出基于  $4\pi$  约瑟夫森效应的编织方案<sup>[132]</sup>.

## 5.2 库仑阻塞

在考虑拓扑超导由于马约拉纳带来的基态简并时, 已经假设超导处于接地状态, 或者与一个宏观系统处于强耦合状态. 这样超导的电容无穷大, 改变超导的费米子宇称, 即改变系统电子数并不需要能量. 当考虑有限尺寸的非接地超导, 即使存在 MZM 形成的  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  不同费米宇称态, 改变超导的费米子数 (电子数) 会存在电容充电能 (可由电平控制). 这使得奇偶费米子宇称态不再简并, 从而可以从通过参数操控的能谱判定奇偶费米子宇称态. 事实上, 此时超导不同的费米子数态可以变得不再简并, 具体由外加电平控制<sup>[39,96,133]</sup>. 一个研究得比较多的装置是通过电平开关把 MZM 和量子点耦合起来<sup>[37,39,96,124,133,134]</sup>, 自旋量子比特的测量也适用这个方法<sup>[135-137]</sup>. 装置如图 8 所示, MZM 通过量子隧穿效应和量子点弱耦合起来, 调节电平改变势垒高度可以改变 MZM 波函数的展宽, 从而调节 MZM 和量子点的有效耦合强度  $t$ , 控制电平开关的状态. 改变电平开关状态, 系统的基态能量将发生变化, 并受到 MZM 量子比特奇偶性的调控.

如图 8(a)所示的两 MZM 系统中,  $t_{i=1,2}$  由关闭状态 ( $t_i = 0$ ) 到打开状态 ( $t_i \neq 0$ ) 会引起哈密顿量的基态能量的变化, 根据二阶微扰理论, 系统基态能量为

$$E_{\text{g.s.}}^{(j=0,1)} = E_0^{(j=0,1)} + \frac{|t_1|^2 + |t_2|^2 + \gamma_1 \gamma_2 (t_1^* t_2 - t_1 t_2^*)}{4\{E_C(1 + (-1)^j 2N_g) + (-1)^j [E_0^{(1)} - E_0^{(0)}]\}}, \quad (31)$$

其中  $E_0^{(j=0,1)}$  分别对应为  $t = 0$  时整体奇宇称和偶宇称基态的能量, 与量子点和超导充电能有关;  $E_C$

为超导充电能;  $N_g$  为受电平控制的超导感应电荷. 由方程 (31) 可见, 当  $(t_1^* t_2 - t_1 t_2^*) \neq 0$  时, 系统在调节量子点电平开关打开  $t$  的前后的基态能量变化  $\Delta E_{\text{g.s.}}$  受量子比特的奇偶性  $i\gamma_1 \gamma_2$  调控. 如前所述, 这个能量的变化可以通过测量系统的能谱、量子点电荷或者微分电容等方式测出, 从而读取量子比特. 这个装置的优点一是 MZM 与量子点的耦合强度可以通过量子点的宏观电平参数来调节; 二是可拓展性好, 可通过拓展 U 型网络构造大规模的量子线路<sup>[39,124]</sup>.

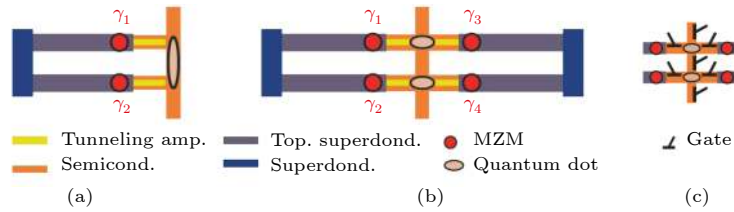


图 8 MZM 和量子点耦合的装置简图<sup>[39]</sup> (a), (b) 分别是 2 个和 4 个 MZM 系统的装置; (c) 在调节量子点与 MZM 之间跃迁矩阵元的局域电平开关

Fig. 8. Sketch of MZMs coupled to quantum dots<sup>[39]</sup>, with 2-MZM and 4-MZM system shown in (a) and (b), and in (c) the local gates controlling the coupling between MZMs and quantum dots are shown.

### 5.3 马约拉纳干涉仪

Fu<sup>[138]</sup> 提出利用 MZM 可以实现电子的隐态传输, 且传输相移与拓扑量子比特的宇称相关. 因此, 通过干涉装置探测传输后电子的相位变化可以得到 MZM 的宇称<sup>[38,133,139]</sup>.

如图 9 所示考虑拓扑超导体与普通金属的连接, 线路中穿过可调节的磁通  $\psi$ , 线路中的电流将随磁通变化而改变. 调节超导体的电容能使之小于超导能隙但是大于电子的隧穿效应, 从而抑制电子直接从金属跃迁到超导体中. 借助于空间上分隔很远的 MZM, 可以存在一端电子进入超导体, 另一端电子离开超导体进入金属的过程, 且跃迁过程中保持长距离的相位相干. 跃迁的哈密顿量可以写成如下一般形式

$$H_{ab} = T_{ab} \gamma_a \gamma_b c_a^\dagger c_b + \text{h.c.}, \quad (32)$$

其中  $a, b$  表示两个 MZM 所处的位置,  $T_{ab}$  表示跃迁振幅, 对于费米子宇称  $P_{ab} = \pm 1$  的量子比特而言, 电子的传输相移分别为  $-iT_{ab}$  和  $iT_{ab}$ . 当电流分别经过拓扑量子比特和具有足够长相位相干长度的普通金属后发生干涉时, 由于不同宇称的量子比特会给电子的传输相移带来  $\pi$  的相位差, 因此电导率表示为

$$G = g_0 + g_1 \cos \left[ \frac{e(\Phi - \Phi_c)}{\hbar} \right] P_{12}, \quad (33)$$

从电导的测量数据中可以读取费米子宇称的信息,

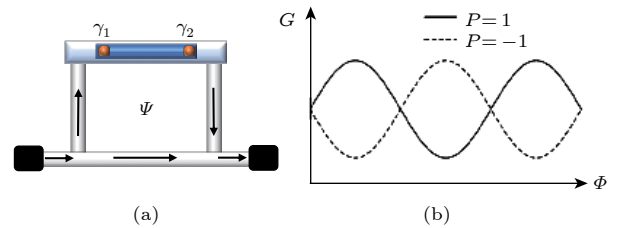


图 9 马约拉纳干涉仪装置<sup>[38]</sup> (a) 电流从上方经过两个 MZM 也即一个拓扑量子比特, 从下方经过相位相干长度足够长的金属, 电路中间穿过可调节的磁通. 两条路径的相位差由电子的传输相移以及穿过线路的磁通决定. (b) 通过测量干涉后的电导可以得到拓扑量子比特的宇称信息. 实线和虚线分别对应宇称为 1 和 -1 的量子比特的电导信号

Fig. 9. Majorana interferometry<sup>[38]</sup>. (a) One path goes through two MZMs i.e. a topological qubit while the other path goes through a normal metal with a sufficiently long phase-coherence length.  $\psi$  is the applied magnetic flux enclosed by the two paths. The phase difference of two paths is determined by the phase transition shift and the magnetic flux, which can be measured by the conductance. (b) Majorana interferometer provides a projective measurement of the fermion parity. Solid line and dotted line represent the conductance signals corresponding to qubits with parity 1 and -1 respectively.

进而探测编织的结果. 这个方案中费米子宇称的读取不需要将两个 MZM 相互融合, MZM 之间始终保持较远的距离, 波函数的交叠很少, 因此会较少受到热涨落的干扰<sup>[140]</sup>.

## 6 对称性保护的非阿贝尔统计

对拓扑超导体加上额外的对称性要求如时间反演对称<sup>[84,141–149]</sup>或空间点群对称性<sup>[150–154]</sup>等, 可以丰富其体态的拓扑分类. 这对应着边界可以存在多个 MZM, 且这些零模受到对称性的保护而不会互相耦合打开能隙. 对这样的体系进行编织操作将意味着对多个 MZM 进行交换. 一般而言这可能出现平庸的结果. 但是在对称性的保护下, 如果编织过程可以分解成多对独立的部分, 每对 MZM 的编织将满足对称保护的非阿贝尔统计<sup>[155,156]</sup>. 其中单次编织满足

$$\gamma_i^L \rightarrow \gamma_i^R, \gamma_i^R \rightarrow -\gamma_i^L, \quad i = 1, \dots, N, \quad (34)$$

其中  $\gamma_i^L$  代表编织前处于左边的  $N$  个 MZM,  $\gamma_i^R$  为之前处于右边的  $N$  个 MZM. 此式描述的核心含义是, 在编织过程中, 一边的任意一个 MZM 只能看到另一边的其中一个 MZM, 而看不到其他 MZM. 显然这种情况对于二维手性拓扑超导中的涡旋是无法成立的. 比如考虑左右分布且空间分离的多对涡旋, 对左右进行编织操作, 显然处于一边的 MZM 将受到另一边的所有 MZM 的影响.

MZM 的对称保护非阿贝尔统计最早提出于时间反演对称的拓扑超导体中<sup>[155]</sup>. 如图 10(a) 所示, 考虑一维时间反演对称的拓扑超导体, 超导体的每一端都存在两个 MZM, 它们在时间反演算符  $\mathcal{T}$  作用下组成马约拉纳克拉默斯对 (Majorana Kramers pair, MKP)  $\mathcal{T}\gamma\mathcal{T}^{-1} = \tilde{\gamma}$ ,  $\mathcal{T}\tilde{\gamma}\mathcal{T}^{-1} = -\gamma$ . 对称保护统计将使得一次编织后 MZM 满足  $\gamma_L(\tilde{\gamma}_L) \rightarrow \gamma_R(\tilde{\gamma}_R)$  和  $\gamma_R(\tilde{\gamma}_R) \rightarrow -\gamma_L(-\tilde{\gamma}_L)$ . 然而, 对于时间反演对称保护的拓扑超导, 其 MKP 的非阿贝尔统计是否同样只需要哈密顿量满足时间反演对称, 这是值得探讨的问题. 事实上, 在编织过程中即使哈密顿量每个时刻满足时间反演对称, 边界的 MZM 与体态模的耦合仍可能诱导出 MKP 内部的有效耦合, 造成一端 MKP 的局域旋转操作, 这对上述非阿贝尔统计带来破坏<sup>[157,158]</sup>.

完善 MKP 对称保护非阿贝尔统计理论涉及一个深刻的问题, 即时间反演对称的动力学破

缺<sup>[156,159]</sup>. 马约拉纳编织实际可看作一个时间从  $t = -T/2$  到  $t = T/2$  的含时动力学演化过程, 其中  $T$  是单次编织时间. 相应的编织矩阵是一个么正算符  $\mathcal{B}_{ij} = U(T)$ , 等于编织过程中哈密顿量  $H(t)$  的编时 (time-ordered) 积分. 由于时间反演对称是反么正算符, 即使哈密顿量  $H(t)$  每个时刻满足时间反演对称, 其时间积分得到的么正演化算符可能和时间反演算符不对易, 从而动力学破缺时间反演对称. 这是出现 MKP 局域操作的根本原因, 这一性质首先在文献<sup>[156]</sup>中被揭示. 具体而言, 这样即使对于每一时刻的哈密顿量满足时间反演对称  $[H(t), \mathcal{T}] = 0$ , 可发现

$$\begin{aligned} [\mathcal{T}U(T)\mathcal{T}^{-1}]^\dagger &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-iH(-T/2)\Delta t} e^{-iH(\Delta t - T/2)\Delta t} \\ &\quad \dots e^{-iH(T/2 - \Delta t)\Delta t} e^{-iH(T/2)\Delta t} \\ &\neq U(T). \end{aligned} \quad (35)$$

如果将编织演化算符写成  $U(T) = e^{-iH_E T}$ , 则对于

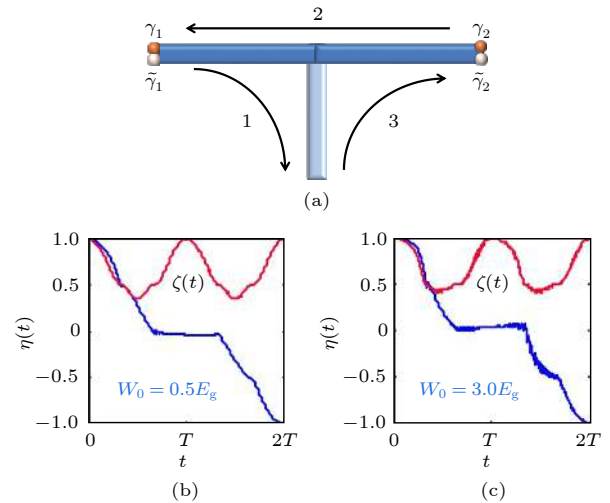


图 10 时间反演对称性保护的编织过程及非阿贝尔统计的结果<sup>[156]</sup>. (a) 时间反演不变的拓扑超导体两端各有一对 MZM, 以 T-型结的方案完成编织. (b), (c) 不同的无序强度  $W_0$  下经过完整编织后 MKP 的演化结果, 在不同条件下均有  $\eta(t) = \langle \gamma_1(0) | \gamma_1(t) \rangle |_{t=2T} = -1$ , 满足非阿贝尔统计. 经过一个周期后  $\zeta(nT) = \sum_{j=1,2} [|\langle \gamma_1(nT) | \gamma_j(0) \rangle|^2 + |\langle \gamma_1(nT) | \tilde{\gamma}_j(0) \rangle|^2] = 1$  给出绝热演化的条件

Fig. 10. Time-reversal symmetry protected braiding process and the results of non-Abelian statistics<sup>[156]</sup>. The TSC in (a) hosts a pair of MZMs at each end, and the braiding is fulfilled by the T-junction scheme. (b), (c) The evolution of MKPs after the full braiding in the presence of different disorder strength  $W_0$ . The non-Abelian statistics is confirmed by  $\eta(t) = \langle \gamma_1(0) | \gamma_1(t) \rangle |_{t=2T} = -1$ . The adiabatic condition is satisfied in that  $\zeta(nT) = \sum_{j=1,2} [|\langle \gamma_1(nT) | \gamma_j(0) \rangle|^2 + |\langle \gamma_1(nT) | \tilde{\gamma}_j(0) \rangle|^2] = 1$ .

编织过程对应的等效哈密顿量  $H_E$ , 由 (35) 式有

$$[H_E, \mathcal{T}] \neq 0, \quad (36)$$

这便是时间反演对称在编织过程中发生动力学破缺. 因此, 在时间反演对称拓扑超导体中, 对称保护非阿贝尔统计需要: 1) 拓扑超导哈密顿量在每个时刻满足时间反演对称; 2) 整个编织产生的动力学演化满足类似的时间反演对称. 为了使 MKP 满足非阿贝尔统计, 需要在编织的动力学过程中重建时间反演对称性. 为此, 文献 [156] 定义了一个交换对称性 (swapping symmetry), 使得

$$SH(-t)S^{-1} = H(t), \quad (37)$$

该算符的作用是将纳米线两端的 MZM 位置反演  $S\gamma_{L(R)}S^{-1} = \gamma_{R(L)}$ ,  $S\tilde{\gamma}_{L(R)}S^{-1} = \tilde{\gamma}_{R(L)}$ . 这样有效哈密顿量将满足一个新的与时间反演对称类似的反么正对称性  $\Theta = ST$ , 即  $[\Theta, H_E] = 0$ . 在此对称性的保护下, MKP 的编织过程将分成两个独立的部分且编织算符可表示为

$$\mathcal{B} = e^{\frac{\pi}{4}\gamma_L\gamma_R} e^{\frac{\pi}{4}\tilde{\gamma}_L\tilde{\gamma}_R}, \quad (38)$$

即分解为两独立的编织 [156]. 进一步研究证明, 该交换对称性  $S$  在一维的纳米线中总是成立. 即使存在静态无序, 由于左右两端的 MZM 等效走过互逆的路径, 系统的无序对两端 MZM 造成的局域旋转是相反的, 此时交换对称性的定义总可以成立. 同时由于对称性保护, 噪声带来的影响为二阶项, 且能被噪声的随机分布所抑制 (如图 10(b)(c) 所示) [156]. MKP 的编织带来系统量子态的变化, 而由时间反演对称拓扑超导中马约拉纳组成的不同量子比特同样可以通过约瑟夫森电流读取 [155,160]. 对称性保护的非阿贝尔统计预期能很好地在实际体系中实现并为拓扑量子计算提供更丰富的操作 [40].

## 7 总结与展望

本文对拓扑超导中 MZM 的非阿贝尔统计, 以及在拓扑量子计算中的应用做了介绍. 在对承载 MZM 的拓扑超导做简单回顾后, 对 MZM 的非阿贝尔统计特性, 构造拓扑量子比特和量子门进行介绍. 然后, 重点讨论 MZM 的几种主要编织方案, 以及由 MZM 构成的拓扑量子比特测量方案, 并对这些方案做了比较. 最后对新发展的马约拉纳克拉默斯对满足的对称保护非阿贝尔统计进行了介绍, 这可能对 MZM 的研究带来新的方向.

从 MZM 被提出可以被用来做量子计算到今天, 拓扑量子在这约二十年间取得了大量包括理论和实验上的重要进展, 已经有大量的实验证据可以支持 MZM 的存在, 但是这些实验证据都是对局域的单 MZM 的性质直接测量操作. 要论证 MZM 的存在, 最直接也是最确凿无疑的证据就是验证 MZM 的非阿贝尔统计性质, 也就是实验验证: 编织两个 MZM 前后系统的基态发生了变化. 这包括两方面的难题: 一是读取两个 MZM 融合后的量子态; 二是实现 MZM 的非阿贝尔编织操作, 从而实现量子态的操控. 目前还没有任何实验可以证明两个 MZM 组成的复费米子态的非局域性, 并直接读出两个 MZM 的量子态. 因此, 当前研究的最大热点还是为两个 MZM 融合后的量子态读取寻找实验可操作的平台, 进而实现 MZM 的编织操作并读取编织操作前后系统量子态的变化. 一旦实现了 MZM 的编织操作, 并验证了相应的非阿贝尔统计, 进一步应用于拓扑量子计算则将成为可能.

## 参考文献

- [1] Majorana E 1937 *Nuovo Cim.* **14** 171
- [2] Schechter J, Valle J W F 1982 *Phys. Rev. D* **25** 2951
- [3] Keung W Y, Senjanović G 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 1427
- [4] Atre A, Han T, Pascoli S, Zhang B 2009 *J. High Energy Phys.* **2009** 030
- [5] Rodejohann W 2011 *Inter. J. Mod. Phys. E* **20** 1833
- [6] de Gouvêa A, Vogel P 2013 *Progress in Particle and Nuclear Physics* **71** 75
- [7] Kitaev A Y 2001 *Physics-Uspokhi* **44** 131
- [8] Alicea J 2012 *Rep. Prog. Phys.* **75** 076501
- [9] Elliott S R, Franz M 2015 *Rev. Mod. Phys.* **87** 137
- [10] Leijnse M, Flensberg K 2012 *Semiconductor Science and Technology* **27** 124003
- [11] Wilczek F 2009 *Nature Physics* **5** 614
- [12] Franz M 2013 *Nat. Nanotechnol.* **8** 149
- [13] Read N, Green D 2000 *Phys. Rev. B* **61** 10267
- [14] Ivanov D A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 268
- [15] Nayak C, Simon S H, Stern A, Freedman M, Das Sarma S 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 1083
- [16] Freedman M, Kitaev A, Larsen M, Wang Z 2003 *Bulletin of the American Mathematical Society* **40** 31
- [17] Das Sarma S, Freedman M, Nayak C 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 166802
- [18] Sarma S D, Freedman M, Nayak C 2006 *Phys. Today* **59** 32
- [19] Kitaev A 2003 *Ann. Phys.* **303** 2
- [20] Fu L, Kane C L 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 096407
- [21] Sau J D, Lutchyn R M, Tewari S, Das Sarma S 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 040502
- [22] Alicea J 2010 *Phys. Rev. B* **81** 125318
- [23] Lutchyn R M, Sau J D, Das Sarma S 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 077001



- [24] Oreg Y, Refael G, von Oppen F 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 177002
- [25] Hosur P, Ghaemi P, Mong R S K, Vishwanath A 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 097001
- [26] Pientka F, Keselman A, Berg E, Yacoby A, Stern A, Halperin B I 2017 *Phys. Rev. X* **7** 021032
- [27] Mourik V, Zuo K, Frolov S M, Plissard S R, Bakkers E P A M, Kouwenhoven L P 2012 *Science* **336** 1003
- [28] Nadj-Perge S, Drozdov I K, Li J, Chen H, Jeon S, Seo J, MacDonald A H, Bernevig B A, Yazdani A 2014 *Science* **346** 602
- [29] Sun H H, Zhang K W, Hu L H, et al. 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 257003
- [30] He Q L, Pan L, Stern A L, et al. 2017 *Science* **357** 294
- [31] Zhang P, Yaji K, Hashimoto T, et al. 2018 *Science* **360** 182
- [32] Wang D, Kong L, Fan P, Chen H, Zhu S, Liu W, Cao L, Sun Y, Du S, Schneeloch J, Zhong R, Gu G, Fu L, Ding H, Gao H J 2018 *Science* **362** 333
- [33] Fornieri A, Whitticar A M, Setiawan F, Portolés E, Drachmann A C C, Keselman A, Gronin S, Thomas C, Wang T, Kallaher R, et al. 2019 *Nature* **569** 89
- [34] Ren H, Pientka F, Hart S, et al. 2019 *Nature* **569** 93
- [35] Jäck B, Xie Y, Li J, Jeon S, Bernevig B A, Yazdani A 2019 *Science* **364** 1255
- [36] van Heck B, Akhmerov A R, Hassler F, Burrello M, Beenakker C W J 2012 *New J. Phys.* **14** 035019
- [37] Aasen D, Hell M, Mishmash R V, Higginbotham A, Danon J, Leijnse M, Jespersen T S, Folk J A, Marcus C M, Flensberg K, Alicea J 2016 *Phys. Rev. X* **6** 031016
- [38] Vijay S, Fu L 2016 *Phys. Rev. B* **94** 235446
- [39] Karzig T, Knapp C, Lutchyn R M, Bonderson P, Hastings M B, Nayak C, Alicea J, Flensberg K, Plugge S, Oreg Y, Marcus C M, Freedman M H 2017 *Phys. Rev. B* **95** 235305
- [40] Schrade C, Fu L 2018. arXiv: 1807.06620 [cond-mat.mes-hall]
- [41] Stern A, Berg E 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 107701
- [42] Wang Z 2010 *Topological Quantum Computation* (Santa Barbara: American Mathematical Soc.)
- [43] Zhang L, Liu X J 2018 *Spin-orbit Coupling and Topological Phases for Ultracold Atoms* (Chap. 1) (Singapore: World Scientific) pp1–87
- [44] Sau J D, Tewari S, Lutchyn R M, Stanescu T D, Das Sarma S 2010 *Phys. Rev. B* **82** 214509
- [45] Potter A C, Lee P A 2011 *Phys. Rev. B* **83** 184520
- [46] Sau J D, Tewari S, Das Sarma S 2012 *Phys. Rev. B* **85** 064512
- [47] Deng M T, Yu C L, Huang G Y, Larsson M, Caroff P, Xu H Q 2012 *Nano Lett.* **12** 6414
- [48] Das A, Ronen Y, Most Y, Oreg Y, Heiblum M, Shtrikman H 2012 *Nat. Phys.* **8** 887
- [49] Finck A D K, Van Harlingen D J, Mohseni P K, Jung K, Li X 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 126406
- [50] Churchill H O H, Fatemi V, Grove-Rasmussen K, Deng M T, Caroff P, Xu H Q, Marcus C M 2013 *Phys. Rev. B* **87** 241401
- [51] Law K T, Lee P A, Ng T K 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 237001
- [52] Flensberg K 2010 *Phys. Rev. B* **82** 180516
- [53] Wimmer M, Akhmerov A R, Dahlhaus J P, Beenakker C W J 2011 *New J. Phys.* **13** 053016
- [54] Lutchyn R M, Bakkers E P A M, Kouwenhoven L P, Krogstrup P, Marcus C M, Oreg Y 2018 *Nat. Rev. Mater.* **3** 52
- [55] Liu X J, Lobos A M 2013 *Phys. Rev. B* **87** 060504
- [56] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045
- [57] Qi X L, Zhang S C 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1057
- [58] Fu L, Kane C L 2009 *Phys. Rev. B* **79** 161408
- [59] Scharf B, Pientka F, Ren H, Yacoby A, Hankiewicz E M 2019 *Phys. Rev. B* **99** 214503
- [60] Setiawan F, Stern A, Berg E 2019 *Phys. Rev. B* **99** 220506
- [61] Stone M, Roy R 2004 *Physical Review B* **69** 184511
- [62] Fu L, Kane C L, Mele E J 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 106803
- [63] Fu L, Kane C L 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 216403
- [64] Akhmerov A R, Nilsson J, Beenakker C W J 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 216404
- [65] Tanaka Y, Yokoyama T, Nagaosa N 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 107002
- [66] Linder J, Tanaka Y, Yokoyama T, Sudbø A, Nagaosa N 2010 *Phys. Rev. B* **81** 184525
- [67] Zhang C, Tewari S, Lutchyn R M, Das Sarma S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 160401
- [68] Sato M, Takahashi Y, Fujimoto S 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 020401
- [69] Wang M X, Liu C, Xu J P, et al. 2012 *Science* **336** 52
- [70] He J J, Ng T K, Lee P A, Law K T 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 037001
- [71] Xu J P, Liu C, Wang M X, Ge J, Liu Z L, Yang X, Chen Y, Liu Y, Xu Z A, Gao C L, Qian D, Zhang F C, Jia J F 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 217001
- [72] Xu J P, Wang M X, Liu Z L, Ge J F, Yang X, Liu C, Xu Z A, Guan D, Gao C L, Qian D, Liu Y, Wang Q H, Zhang F C, Xue Q K, Jia J F 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 017001
- [73] Wang Z, Zhang P, Xu G, Zeng L K, Miao H, Xu X, Qian T, Weng H, Richard P, Fedorov A V, Ding H, Dai X, Fang Z 2015 *Phys. Rev. B* **92** 115119
- [74] Xu G, Lian B, Tang P, Qi X L, Zhang S C 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 047001
- [75] Kong L, Zhu S, Papaj M, et al. 2019 *Nat. Phys.* **15** 1181
- [76] König E J, Coleman P 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 207001
- [77] Zhang P, Wang Z, Wu X, Yaji K, Ishida Y, Kohama Y, Dai G, Sun Y, Bareille C, Kuroda K, et al. 2018 *Nat. Phys.* **15** 41
- [78] Zhou X, Gordon K N, Jin K H, Li H, Narayan D, Zhao H, Zheng H, Huang H, Cao G, Zhigadlo N D, Liu F, Dessau D S 2019 *Phys. Rev. B* **100** 184511
- [79] Machida T, Sun Y, Pyon S, Takeda S, Kohsaka Y, Hanaguri T, Sasagawa T, Tamegai T 2019 *Nat. Mater.* **18** 811
- [80] Yan Z, Bi R, Wang Z 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 147003
- [81] Chan C, Zhang L, Poon T F J, He Y P, Wang Y Q, Liu X J 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 047001
- [82] Teo J C Y, Kane C L 2010 *Phys. Rev. B* **82** 115120
- [83] Chan C, Liu X J 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 207002
- [84] Qi X L, Hughes T L, Zhang S C 2010 *Phys. Rev. B* **82** 184516
- [85] Chung S B, Qi X L, Maciejko J, Zhang S C 2011 *Phys. Rev. B* **83** 100512
- [86] Wang J, Zhou Q, Lian B, Zhang S C 2015 *Phys. Rev. B* **92** 064520
- [87] Lian B, Wang J, Zhang S C 2016 *Phys. Rev. B* **93** 161401
- [88] Kayyalha M, Xiao D, Zhang R, Shin J, Jiang J, Wang F, Zhao Y F, Xiao R, Zhang L, Fijalkowski K M, Mandal P, Winnerlein M, Gould C, Li Q, Molenkamp L W, Chan M H W, Samarth N, Chang C Z 2020 *Science* **367** 64
- [89] Deng M T, Vaitiekėnas S, Hansen E B, Danon J, Leijnse M, Flensberg K, Nygård J, Krogstrup P, Marcus C M 2016 *Science* **354** 1557

- [90] Nichele F, Drachmann A C, Whittar A M, et al. 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 136803
- [91] Gül O, Zhang H, Bommer J D S, et al. 2018 *Nat. Nanotechnol.* **13** 192
- [92] Feldman B E, Randeria M T, Li J, Jeon S, Xie Y, Wang Z, Drozdov I K, Bernevig B A, Yazdani A 2017 *Nat. Phys.* **13** 286
- [93] Jeon S, Xie Y, Li J, Wang Z, Bernevig B A, Yazdani A 2017 *Science* **358** 772
- [94] Laroche D, Bouman D, van Woerkom D J, et al. 2019 *Nat. Commun.* **10** 245
- [95] Rokhinson L P, Liu X, Furdyna J K 2012 *Nat. Phys.* **8** 795
- [96] Beenakker C W J 2019. arXiv: 1907.06497 [cond-mat]
- [97] Bonderson P, Gurarie V, Nayak C 2011 *Phys. Rev. B* **83** 075303
- [98] Teo J C Y, Kane C L 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 046401
- [99] Freedman M, Hastings M B, Nayak C, Qi X L, Walker K, Wang Z 2011 *Phys. Rev. B* **83** 115132
- [100] Freedman M, Hastings M B, Nayak C, Qi X L 2011 *Phys. Rev. B* **84** 245119
- [101] Alicea J, Oreg Y, Refael G, von Oppen F, Fisher M P A 2011 *Nat. Phys.* **7** 412
- [102] Feynman R P 1982 *Intern. J. Theoretical Phys.* **21** 467
- [103] Shor P W 1994 In *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (Ieee)*, pp124–134
- [104] Grover L K 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 325
- [105] Lloyd S 1996 *Science* **273** 1073
- [106] Deutsch D 1985 *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **400** 97
- [107] Lo H K, Spiller T, Popescu S 1998 *Introduction to quantum computation and information* (World Scientific)
- [108] DiVincenzo D P 2000 *Fortschritte der Physik: Progress of Physics* **48** 771
- [109] Sarma S D, Freedman M, Nayak C 2015 *npj Quantum Information* **1** 15001
- [110] Lahtinen V, Pachos J 2017 *SciPost Physics* **3** 021
- [111] Kitaev A Y 1997 *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* **52** 53
- [112] Dawson C M, Nielsen M A 2005. arXiv: 0505030 [quant-ph]
- [113] Bravyi S, Kitaev A 2005 *Phys. Rev. A* **71** 022316
- [114] Bravyi S 2006 *Phys. Rev. A* **73** 042313
- [115] Freedman M, Nayak C, Walker K 2006 *Phys. Rev. B* **73** 245307
- [116] Bonderson P, Clarke D J, Nayak C, Shtengel K 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 180505
- [117] Karzig T, Oreg Y, Refael G, Freedman M H 2016 *Phys. Rev. X* **6** 031019
- [118] Cheng M, Galitski V, Das Sarma S 2011 *Phys. Rev. B* **84** 104529
- [119] Bauer B, Karzig T, Mishmash R, Antipov A, Alicea J 2018 *Sci. Post Phys.* **5** 004
- [120] Sau J D, Clarke D J, Tewari S 2011 *Phys. Rev. B* **84** 094505
- [121] Clarke D J, Sau J D, Tewari S 2011 *Phys. Rev. B* **84** 035120
- [122] Halperin B I, Oreg Y, Stern A, Refael G, Alicea J, von Oppen F 2012 *Phys. Rev. B* **85** 144501
- [123] Amorim C S, Ebihara K, Yamakage A, Tanaka Y, Sato M 2015 *Phys. Rev. B* **91** 174305
- [124] Liu X, Li X, Deng D L, Liu X J, Das Sarma S 2016 *Phys. Rev. B* **94** 014511
- [125] Bonderson P, Freedman M, Nayak C 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 010501
- [126] Bonderson P 2013 *Phys. Rev. B* **87** 035113
- [127] Preskill J 2004 <http://www.theory.caltech.edu/preskill/talks/PreskillBiedenharn4.pdf>
- [128] Luo X J, He Y P, Poon T F J, Liu X, Liu X J 2018. arXiv: 1803.02173 [cond-mat.mes-hall]
- [129] Chiu C K, Das Sarma S 2019 *Phys. Rev. B* **99** 035312
- [130] Jiang L, Pekker D, Alicea J, Refael G, Oreg Y, von Oppen F 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 236401
- [131] Yang G, Lyu Z, Zhang X, Qu F, Lu L 2019 *Chin. Phys. B* **28** 127402
- [132] Stenger J P T, Hatridge M, Frolov S M, Pekker D 2019 *Phys. Rev. B* **99** 035307
- [133] Plugge S, Rasmussen A, Egger R, Flensberg K 2017 *New J. Phys.* **19** 012001
- [134] Liu D E, Cheng M, Lutchyn R M 2015 *Phys. Rev. B* **91** 081405
- [135] Barthel C, Reilly D J, Marcus C M, Hanson M P, Gossard A C 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 160503
- [136] Medford J, Beil J, Taylor J M, Bartlett S D, Doherty A C, Rashba E I, DiVincenzo D P, Lu H, Gossard A C, Marcus C M 2013 *Nat. Nanotechnol.* **8** 654
- [137] Eng K, Ladd T D, Smith A, Borselli M G, Kiselev A A, Fong B H, Holabird K S, Hazard T M, Huang B, Deelman P W, Milosavljevic I, Schmitz A E, Ross R S, Gyure M F, Hunter A T 2015 *Sci. Advances* **1** 1500214
- [138] Fu L 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 056402
- [139] Schrade C, Fu L 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 267002
- [140] Knapp C 2019 *Ph.D. Dissertation* (UC Santa Barbara)
- [141] Qi X L, Hughes T L, Raghu S, Zhang S C 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 187001
- [142] Schnyder A P, Brydon P M R, Manske D, Timm C 2010 *Phys. Rev. B* **82** 184508
- [143] Beenakker C W J, Dahlhaus J P, Wimmer M, Akhmerov A R 2011 *Phys. Rev. B* **83** 085413
- [144] Deng S, Viola L, Ortiz G 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 036803
- [145] Nakosai S, Tanaka Y, Nagaosa N 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 147003
- [146] Wong C L M, Law K T 2012 *Phys. Rev. B* **86** 184516
- [147] Zhang F, Kane C L, Mele E J 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 056402
- [148] Keselman A, Fu L, Stern A, Berg E 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 116402
- [149] Kim Y, Liu D E, Gaidamauskas E, Paaske J, Flensberg K, Lutchyn R M 2016 *Phys. Rev. B* **94** 075439
- [150] Fang C, Gilbert M J, Bernevig B A 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 106401
- [151] Liu X J, He J J, Law K T 2014 *Phys. Rev. B* **90** 235141
- [152] Chiu C K, Teo J C Y, Schnyder A P, Ryu S 2016 *Rev. Mod. Phys.* **88** 035005
- [153] Snyder R A, Trimble C J, Rong C C, Folkes P A, Taylor P J, Williams J R 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 097701
- [154] Trifunovic L, Brouwer P W 2019 *Phys. Rev. X* **9** 011012
- [155] Liu X J, Wong C L M, Law K T 2014 *Phys. Rev. X* **4** 021018
- [156] Gao P, He Y P, Liu X J 2016 *Phys. Rev. B* **94** 224509
- [157] Wölms K, Stern A, Flensberg K 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 246401
- [158] Wölms K, Stern A, Flensberg K 2016 *Phys. Rev. B* **93** 045417
- [159] McGinley M, Cooper N R 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 090401
- [160] Zhang F, Kane C L 2014 *Phys. Rev. B* **90** 020501

SPECIAL TOPIC—Majorana in condensed matter

# Non-abelian statistics of Majorana modes and the applications to topological quantum computation\*

He Ying-Ping<sup>1)2)</sup> Hong Jian-Song<sup>1)2)</sup> Liu Xiong-Jun<sup>1)2)3)4)†</sup>

1) (*International Center for Quantum Materials, School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China*)

2) (*Collaborative Innovation Center of Quantum Matter, Beijing 100871, China*)

3) (*Beijing Academy of Quantum Information Science, Beijing 100193, China*)

4) (*CAS Center for Excellence in Topological Quantum Computation, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

( Received 31 May 2020; revised manuscript received 3 June 2020 )

## Abstract

Since their prediction as fundamental particles in 1937, Majorana fermions have drawn lots of interests in particle physics and dark matter. Their counterparts in condensed matter physics, Majorana zero-Modes (MZMs), have attracted remarkable attention in condensed matter for their potential in building a fault-tolerant quantum computer. Due to the relentless effort, lots of important progress has been made in Majorana physics in the past two decades, as introduced in several excellent review articles. This review focuses on the non-Abelian statistics of MZMs and their application to quantum computation. In the first section of this work, the theoretical progress in searching for MZM is briefly reviewed and the latest experimental progresses are summarized. We next introduce the basic concepts of non-Abelian statistics of MZMs and explain how they can be applied to quantum computation. We then discuss two key experiments to implementing quantum computers in the MZM platform: MZM braiding and MZM qubit readout. In this part, several representative proposals for the Majorana braiding and MZM qubit readout are elaborated. Finally, we introduce a latest concept, the symmetry-protected non-Abelian braiding of Majorana Kramers pairs in time-reversal invariant topological superconductors.

**Keywords:** Majorana zero-modes, non-Abelian statistics, topological superconductor, quantum computation

**PACS:** 03.67.Lx, 74.78.Na, 74.90.+n, 03.75.Lm

**DOI:** [10.7498/aps.69.20200812](https://doi.org/10.7498/aps.69.20200812)

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11825401, 11761161003, 11921005), the Major Project of the Ministry of Science and Technology of China (Grant No. 2016YFA0301604), and the Strategic Priority Research Program of Chinese Academy of Sciences, China (Grant No. XDB28000000).

† Corresponding author. E-mail: [xiongjunliu@pku.edu.cn](mailto:xiongjunliu@pku.edu.cn)