

专题：非线性物理

# 一个可积的逆空时非局部 Sasa-Satsuma 方程\*

宋彩芹<sup>1)</sup> 朱佐农<sup>2)†</sup>

1) (上海理工大学理学院, 上海 200093)

2) (上海交通大学数学科学学院, 上海 200240)

(2019 年 12 月 14 日收到; 2019 年 12 月 21 日收到修改稿)

本文给出了一个可积的逆空时(逆空间-逆时间)非局部 Sasa-Satsuma 方程. 建立了这个方程的 Darboux 变换, 并且构造了这个逆空时非局部方程在零背景条件下的孤子解.

**关键词:** 可积的逆空时非局部 Sasa-Satsuma 方程, 达布变换, 孤子解

**PACS:** 02.30.Ik, 04.20.Jb, 04.30.Nk, 05.45.Yv

**DOI:** 10.7498/aps.69.20191887

## 1 一个可积的逆空时非局部 Sasa-Satsuma 方程

耦合的 Sasa-Satsuma 系统

$$\begin{aligned} & iQ_T + \frac{Q_{XX}}{2} + Q^2R \\ & + i [Q_{XXX} + 9QRQ_X + 3Q^2R_X] = 0, \\ & iR_T - \frac{R_{XX}}{2} - QR^2 \\ & + i [R_{XXX} + 9QRR_X + 3R^2Q_X] = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

是一个非线性可积系统. 这个系统在约化条件  $R(X, T) = \pm Q^*(X, T)$  下转化为经典的 Sasa-Satsuma 方程<sup>[1-14]</sup>,

$$\begin{aligned} & iQ_T + \frac{1}{2}Q_{XX} \pm |Q|^2Q \\ & + i [Q_{XXX} \pm 9|Q|^2Q_X \pm 3|Q|^2Q_X^*] = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

这是一个可积的高阶非线性薛定谔方程. 这个方程可以用来描述光纤中飞秒脉冲的传播<sup>[2,3]</sup>.

最近, Ablowitz 和 Musslimani<sup>[15]</sup> 给出了一个逆空时的可积非局部 NLS 方程,

$$iq_t(x, t) + q_{xx}(x, t) \pm 2q^2(x, t)q^*(-x, t) = 0. \quad (3)$$

这个逆空时的可积非局部 NLS 方程引起了人们对这类非局部可积非线性系统的极大研究兴趣. 若干逆空间、逆时间或逆空时非局部可积方程被提出并被研究<sup>[15-24]</sup>. 作者在文献<sup>[20]</sup>中研究了一个逆空时可积非局部 Sasa-Satsuma 方程:

$$u_t + u_{xxx} \pm (9uu_x u^*(-x, -t) + 3u^2(u^*(-x, -t))_x) = 0. \quad (4)$$

我们注意到这样一个事实: 对于系统(1), 如果做约化  $R(X, T) = Q(-X, -T)$ , 则可得到如下逆空时非局部 Sasa-Satsuma 方程:

$$\begin{aligned} & iQ_T + \frac{Q_{XX}}{2} + Q^2Q(-X, -T) \\ & + i \left[ Q_{XXX} + 9QQ(-X, -T)Q_X \right. \\ & \left. + 3Q^2 \frac{\partial Q(-X, -T)}{\partial X} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

在变换

$$\begin{aligned} & u(x, t) = Q(X, T) \exp \left\{ \frac{-i}{6} \left( X - \frac{T}{18} \right) \right\}, \\ & t = T, x = X - \frac{T}{12} \end{aligned} \quad (6)$$

\* 国家自然科学基金(批准号: 11671255, 11801367)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zznzhu@sjtu.edu.cn

下, 逆空时非局部 Sasa-Sasuma 方程 (5) 转化为如下形式:

$$u_t + u_{xxx} + 9uu(-x, -t)u_x + 3u^2 \frac{\partial u(-x, -t)}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

显然, 方程 (7) 也可以看作为一个逆空时非局部 mKdV 型方程. 本文的主要目的是建立逆空时非局部 Sasa-Sasuma 方程 (7) 的 Darboux 变换, 并给出这个方程的孤子解.

## 2 逆空时非局部 Sasa-Satsuma 方程 (7) 的 Darboux 变换

我们注意到方程 (7) 可以从系统

$$\begin{aligned} u_t + u_{xxx} + 9uvu_x + 3u^2v_x &= 0, \\ v_t + v_{xxx} + 9uvv_x + 3v^2u_x &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

通过约化  $v = u(-x, -t)$  而得到. Sasa-Satsuma 系统 (8) 和耦合系统 (1) 是等价的. 事实上, 在变换

$$\begin{aligned} u(x, t) &= Q(X, T) \exp \left\{ \frac{-i}{6} \left( X - \frac{T}{18} \right) \right\}, \\ v(x, t) &= R(X, T) \exp \left\{ \frac{i}{6} \left( X - \frac{T}{18} \right) \right\}, \\ t = T, \quad x &= X - \frac{T}{12} \end{aligned}$$

下, 这两个系统可以相互转化. 对于耦合 Sasa-Satsuma 系统 (8) 在不同的约束条件下可以化为不同的方程: 当  $v = u$  时, 系统 (8) 化为 mKdV 方程; 当  $v = u^*$  时, 系统 (8) 化为一个复的 mKdV 型方程即经典的 Sasa-Satsuma 方程. Sasa-Satsuma 方程 (8) 是 Lax 可积的. 事实上, 系统 (8) 可由如下的线性谱问题

$$\begin{aligned} \Phi_x &= U\Phi, \quad U = i\lambda\sigma_3 + P, \quad \Phi_t = V\Phi, \\ V &= 4i\lambda^3\sigma_3 + 4\lambda^2P + 2i\lambda(P^2 + P_x)\sigma_3 \\ &\quad + P_xP - PP_x - P_{xx} + 2P^3 \end{aligned} \quad (9)$$

的可积性条件  $U_t - V_x + UV - VU = 0$  得到, 其中

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & v \\ -v & -u & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \text{diag}(1, 1, -1). \quad (10)$$

我们用  $\Phi(x, t; \lambda_j)$  来表示线性谱问题 (9) 在谱参数  $\lambda = \lambda_j$  下的特征向量函数. 令  $\Theta_j = \Phi'(x, t; \lambda_j)M$ , 那么可以直接验证

$$\Theta_j = (\phi_2(x, t, \lambda_j), \phi_1(x, t, \lambda_j), \phi_3(x, t, \lambda_j))$$

是线性谱问题 (9) 的伴随问题

$$\Theta_x = -\Theta U, \quad \Theta_t = -\Theta V \quad (11)$$

在谱参数  $\lambda = -\lambda_j$  下的特征函数, 这里上标, 表示矩阵的转置, 矩阵  $M$  是

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

将  $\Phi(x, t; \lambda_j)$  和  $\phi_l(x, t; \lambda_j)$  分别简记为  $\Phi_j$  和  $\phi_{j,l}$ . 类似于文献 [20], 我们可以获得 Sasa-Satsuma 方程 (7) 的 Darboux 变换. 首先给出 (8) 式的双 Darboux 变换. 作如下特征函数的变换:

$$\Phi[1] = T\Phi = \Phi - \eta_1 \Omega(\eta_1, \eta_1)^{-1} \Omega(\eta_1, \Phi), \quad (13)$$

其中  $\eta_1 = (\Phi_1, \Phi_2)$ ,

$$\begin{aligned} \Omega(\eta_1, \eta_1) &= \begin{pmatrix} \frac{\Theta_1\Phi_1}{-2\lambda_1} & \frac{\Theta_1\Phi_2}{-\lambda_1 - \lambda_2} \\ \frac{\Theta_2\Phi_1}{-\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{\Theta_2\Phi_2}{-2\lambda_2} \end{pmatrix}, \\ \Omega(\eta_1, \Phi) &= \begin{pmatrix} \frac{\Theta_1\Phi}{-\lambda_1 - \lambda} \\ \frac{\Theta_2\Phi}{-\lambda_2 - \lambda} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

则联系于耦合的 Sasa-Satsuma 系统 (8) 的线性谱问题 (9) 变换为

$$\Phi[1]_x = U[1]\Phi[1], \quad \Phi_x = V[1]\Phi[1], \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} U[1] &= i\lambda\sigma_3 + P[1], \\ V[1] &= 4i\lambda^3\sigma_3 + 4\lambda^2P[1] + 2i\lambda(P[1]^2 + P[1]_x)\sigma_3 \\ &\quad + P[1]_xP[1] - P[1]P[1]_x - P[1]_{xx} + 2P[1]^3. \end{aligned} \quad (15)$$

我们期望矩阵  $P[1]$  与矩阵  $P$  有完全相同的结构. 可以验证如果矩阵  $P[1]$  中的  $u[1], v[1]$  与矩阵  $P$  中的  $u, v$  有如下关系:

$$u[1] = u - 2iS_{13}, \quad v[1] = v - 2iS_{23}, \quad (16)$$

其中  $S = \eta_1 \Omega(\eta_1, \eta_1)^{-1} \eta_1' M$ , 则矩阵  $P[1]$  与矩阵  $P$  有完全相同的结构, 即方程 (8) 的双 Darboux 变换被获得. 值得指出的是如果取约化  $v = u^*$ , 耦合 Sasa-Satsuma 方程 (8) 约化为经典的 Sasa-Satsuma 方程. 我们在变换 (13) 式中取  $\lambda_2 = -\lambda_1^*$  及特征函数  $\Phi_2 = (\phi_2^*(x, t; \lambda_1), \phi_1^*(x, t; \lambda_1), \phi_3^*(x, t; \lambda_1))'$ ,

那么变换后 (16) 式的势函数满足  $v[1] = u[1]^*$ , 其表达式与文献 [5,7,8] 中得到的经典 Sasa-Satsuma 方程的势函数变换关系相同.

如果令矩阵  $\mathbf{P}$  中的  $v = u(-x, -t)$  并选取适当的参数使得  $S_{23} = S_{13}(-x, -t)$ , 那么  $\mathbf{P}[1]$  中的  $v[1]$  就等于  $u[1](-x, -t)$ . 从而  $u[1]$  与  $u$  的关系实质上就是逆空时非局部 Sasa-Satsuma 方程 (7) 的 Bäcklund 变换.  $u[1]$  是这个逆空时非局部 Sasa-Satsuma 方程的解.

进一步, 可以给出耦合 Sasa-Satsuma 系统 (8) 的  $n$  次双 Darboux 变换. 令

$$\Phi[n] = \Phi - \mathbf{R}\mathbf{W}^{-1}\Omega, \quad (17)$$

其中  $\mathbf{R} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  并且

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \Omega(\eta_1, \eta_1) & \Omega(\eta_1, \eta_2) & \cdots & \Omega(\eta_1, \eta_n) \\ \Omega(\eta_2, \eta_1) & \Omega(\eta_2, \eta_2) & \cdots & \Omega(\eta_2, \eta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega(\eta_n, \eta_1) & \Omega(\eta_n, \eta_2) & \cdots & \Omega(\eta_n, \eta_n) \end{pmatrix},$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega(\eta_1, \Phi) \\ \Omega(\eta_2, \Phi) \\ \vdots \\ \Omega(\eta_n, \Phi) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

其中  $\eta_k = (\Phi_{2k-1}, \Phi_{2k})$ ,

$$\Omega(\eta_k, \eta_l) = \begin{pmatrix} \frac{\Theta_{2k-1}\Phi_{2l-1}}{-\lambda_{2k-1} - \lambda_{2l-1}} & \frac{\Theta_{2k-1}\Phi_{2l}}{-\lambda_{2k-1} - \lambda_{2l}} \\ \frac{\Theta_{2k}\Phi_{2l-1}}{-\lambda_{2k} - \lambda_{2l-1}} & \frac{\Theta_{2k}\Phi_{2l}}{-\lambda_{2k} - \lambda_{2l}} \end{pmatrix},$$

$$\Omega(\eta_k, \Phi) = \begin{pmatrix} \frac{\Theta_{2k-1}\Phi}{-\lambda_{2k-1} - \lambda} \\ \frac{\Theta_{2k}\Phi}{-\lambda_{2k} - \lambda} \end{pmatrix}.$$

变换后位势函数  $u[n]$  和  $v[n]$  可以由矩阵  $\mathbf{P}[n]$  与矩阵  $\mathbf{P}$  之间的关系

$$\mathbf{P}[n] = \mathbf{P} + i[\mathbf{R}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R}'\mathbf{M}, \sigma_3] \quad (19)$$

给出. 设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  是一个  $2n$  阶行向量, 那么根据等式关系

$$\mathbf{a}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{b}' = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{b}' \\ -\mathbf{a} & 0 \end{vmatrix}}{|\mathbf{W}|},$$

可以得到

$$u[n] = u - 2i \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{r}'_3 \\ -\mathbf{r}_1 & 0 \end{vmatrix}}{|\mathbf{W}|},$$

$$v[n] = v - 2i \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{r}'_3 \\ -\mathbf{r}_2 & 0 \end{vmatrix}}{|\mathbf{W}|}, \quad (20)$$

其中  $\mathbf{r}_l = (\phi_{1,l}, \phi_{2,l}, \dots, \phi_{2n-1,l}, \phi_{2n,l})$ ,  $l = 1, 2, 3$ . 需要指出, 文献 [5] 给出了 Sasa-Satsuma 方程 (即方程 (8) 中取  $v = u^*$ ) 的 Darboux 变换, 但没有给出高阶 Darboux 变换. 这里给出了 Sasa-Satsuma 系统 (8) 的高阶双 Darboux 变换. 在约化  $v = u^*$  下, 取  $\lambda_{2j} = -\lambda_{2j-1}^*$  及特征函数  $\Phi_{2j} = (\phi_2^*(x, t; \lambda_{2j-1}), \phi_1^*(x, t; \lambda_{2j-1}), \phi_3^*(x, t; \lambda_{2j-1}))'$ , 即可获得 Sasa-Satsuma 方程的高阶 Darboux 变换.

### 3 逆空时非局部 Sasa-Satsuma 方程 (7) 的解

借助于 Darboux 变换, 我们将构造方程 (7) 的解. 方程 (7) 有指数形式的解  $u = r e^{\kappa(x - (\kappa^2 + 6r^2)t)}$ , 其中  $r$  和  $\kappa$  是任意的实数. 特别地,  $u = 0$  是一个解. 解对应的线性谱问题得到在谱参数  $\lambda = \lambda_j$  时的特征函数为

$$\phi_{j1} = \alpha_j e^{\theta_j}, \quad \phi_{j2} = \beta_j e^{\theta_j}, \quad \phi_{j3} = e^{-\theta_j},$$

$$\theta_j = i\lambda_j(x + 4\lambda_j^2 t).$$

用 Darboux 变换, 获得  $u[1]$  和  $v[1]$  如下:

$$u[1] = 4i(\lambda_1 + \lambda_2) \frac{g_1}{h}, \quad v[1] = 4i(\lambda_1 + \lambda_2) \frac{g_2}{h}, \quad (21)$$

其中

$$h = -2\lambda_1\lambda_2(1 - 2\alpha_1\beta_1 e^{4\theta_1} - 2\alpha_2\beta_2 e^{4\theta_2})$$

$$+ 4(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2) e^{2(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$+ 2e^{4(\theta_1 + \theta_2)}(\alpha_2^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_2^2)$$

$$+ (1 + 2\alpha_1\beta_1 e^{4\theta_1})(1 + 2\alpha_2\beta_2 e^{4\theta_2})(\lambda_1^2 + \lambda_2^2),$$

$$g_1 = (\alpha_1\lambda_1 e^{2\theta_1} - \alpha_2\lambda_2 e^{2\theta_2})(\lambda_1 - \lambda_2)$$

$$+ 2(\beta_1\alpha_2\lambda_1 - \beta_2\alpha_1\lambda_2)(\alpha_2\lambda_1 e^{2\theta_2}$$

$$- \alpha_1\lambda_2 e^{2\theta_1}) e^{2(\theta_1 + \theta_2)},$$

$$g_2 = (\beta_1\lambda_1 e^{2\theta_1} - \beta_2\lambda_2 e^{2\theta_2})(\lambda_1 - \lambda_2)$$

$$+ 2(\beta_1\alpha_2\lambda_1 - \beta_2\alpha_1\lambda_2)(\beta_2\lambda_1 e^{2\theta_2}$$

$$- \beta_1\lambda_2 e^{2\theta_1}) e^{2(\theta_1 + \theta_2)}. \quad (22)$$

显然, 要得到逆空时非局部方程 (7) 的解, 需要选

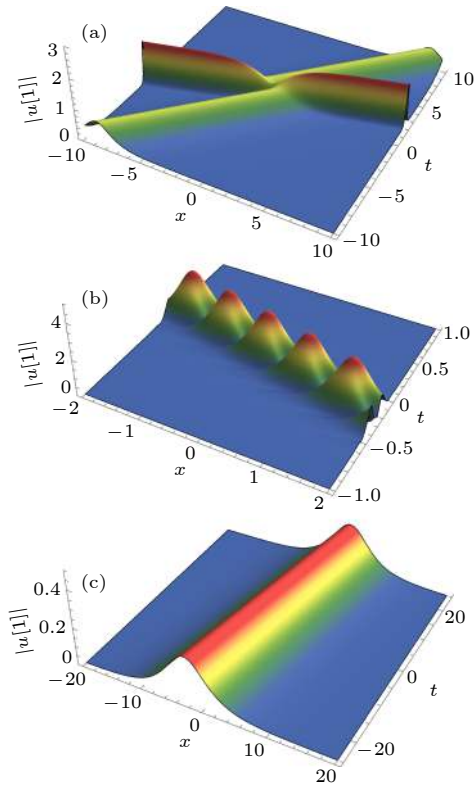


图 1 可积的逆空时非局部 Sasa-Satsuma 方程 (7) 的孤子解 (a)  $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i/2$ ; (b)  $\alpha_1 = -\alpha_2 = \beta_1 = -\beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$ ; (c)  $\alpha_1 = \beta_1 = 1, \alpha_2 = \beta_2 = 0, \lambda_2 = i, \lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}\lambda_2$

Fig. 1. Soliton solutions of integrable reverse space-time nonlocal Sasa-Satsuma equation (7): (a)  $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i/2$ ; (b)  $\alpha_1 = -\alpha_2 = \beta_1 = -\beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$ ; (c)  $\alpha_1 = \beta_1 = 1, \alpha_2 = \beta_2 = 0, \lambda_2 = i, \lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}\lambda_2$ .

择适当的参数, 使得  $v[1] = u[1](-x, -t)$ . 经过分析, 我们发现在如下几种参数情况下:

- (1)  $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;
- (2)  $\alpha_1 = -\alpha_2 = \beta_1 = -\beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;
- (3)  $\alpha_1 = \beta_1 = 1, \alpha_2 = \beta_2 = 0, \lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}\lambda_2$ ;
- (4)  $\alpha_1 = \alpha_2 = -\beta_1 = -\beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;
- (5)  $\alpha_1 = -\alpha_2 = -\beta_1 = \beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

有  $v[1] = u[1](-x, -t)$ . 从而逆空时非局部方程 (7) 的解被构造. 对于情形 (1)—(3), 有  $u(x, t) = u(-x, -t)$ , 而对于情形 (4)—(5) 有  $u(x, t) = -u(-x, -t)$ . 我们给出了对应于情形 (1)—(3) 的解  $u(x, t)$  的图, 如图 1 所示.

值得指出, 经典的 Sasa-Satsuma 方程有一个显著的特征, 即存在双峰孤波解. 对于逆空时非局部可积方程 (4), 我们也给出了类似的双峰孤波解. 但对于本文研究的逆空时非局部可积方程 (7), 并没有发现这样的双峰孤波解的存在. 从这个意义上说, 逆空时非局部可积方程 (4) 和方程 (7) 确有不同的性质. 逆空时非局部可积方程 (7) 值得进一步研究.

### 参考文献

- [1] Sasa N, Satsuma J 1991 *J. Phys. Soc. Jpn* **60** 409
- [2] Porsezian K, Nakkeeran K 1996 *Phys. Rev. Lett* **76** 3955
- [3] Mihalache D, Torner L, Moldoveanu F, Panoiu N C, Truta N 1993 *Phys. Rev. E* **48** 4699
- [4] Ghosh S, Kundu A, Nandy S 1999 *J. Math. Phys.* **40** 1993
- [5] Li Y S, Han W T 2001 *Chin. Ann. Math.* **22B** 171
- [6] Gilson C, Hietarinta J, Nimmo J, Ohta Y 2003 *Phys. Rev. E* **68** 016614
- [7] Wright O C 2007 *Chaos, Solitons Fractals* **33** 374
- [8] Nimmo J, Yilmaz H 2015 *J. Phys. A: Math. Theor.* **48** 425202
- [9] Bandelow U, Akhmediev N 2012 *Phys. Rev. E* **86** 026606
- [10] Li Z H, Li L, Tian H P, Zhou G S 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 4096
- [11] Ohta Y 2010 *AIP Conference Proceeding* **1212** 114
- [12] Zhao L C, Li S C, Ling L M 2014 *Phys. Rev. E* **89** 023210
- [13] Xu T, Li M, Li L 2015 *Europhys. Lett.* **109** 30006
- [14] Liu Y K, Li B 2017 *Chin. Phys. Lett.* **34** 010202
- [15] Ablowitz M J, Musslimani Z H 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 064105
- [16] Ablowitz M J, Musslimani Z H 2016 *Stud. Appl. Math.* **139** 7
- [17] Ji J L, Zhu Z N 2017 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **42** 699
- [18] Lou S Y 2018 *J. Math. Phys.* **59** 083507
- [19] Yang B, Yang J 2018 *Stud. Appl. Math* **140** 178
- [20] Song C Q, Xiao D M, Zhu Z N 2017 *J. Phys. Soc. Jpn.* **86** 054001
- [21] Rao J, Cheng Y, He J S 2017 *Stud. Appl. Math.* **139** 568
- [22] Rao J, Cheng Y, Porsezian K, Mihalache S, He J S 2020 *Physica D* **401** 132180
- [23] Ji J L, Zhu Z N 2017 *J. Math. Anal. Appl.* **453** 973
- [24] Ma L Y, Zhu Z N 2016 *J. Math. Phys.* **57** 083507

SPECIAL TOPIC—Nonlinear physics

# An integrable reverse space-time nonlocal Sasa-Satsuma equation\*

Song Cai-Qin<sup>1)</sup> Zhu Zuo-Nong<sup>2)†</sup>

1) (*College of Sciences, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China*)

2) (*School of Mathematical Sciences, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China*)

( Received 14 December 2019; revised manuscript received 21 December 2019 )

## Abstract

In this paper, we introduce an integrable reverse space-time nonlocal Sasa-Satsuma equation. The Darboux transformation and soliton solutions for this nonlocal integrable equation are constructed.

**Keywords:** integrable reverse space-time nonlocal Sasa-Satsuma equation, Darboux transformation, soliton solution

**PACS:** 02.30.Ik, 04.20.Jb, 04.30.Nk, 05.45.Yv

**DOI:** [10.7498/aps.69.20191887](https://doi.org/10.7498/aps.69.20191887)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos.11671255, 11801367).

† Corresponding author. E-mail: [znzhu@sjtu.edu.cn](mailto:znzhu@sjtu.edu.cn)