

## 专题：非线性物理

**编者按** 非线性波是非线性物理中常见的现象. 研究非线性波有助于弄清物理系统非线性作用下的运动变化规律, 合理解释相关的自然现象. 由于非线性波不满足物理学中常用的线性叠加原理, 同时非线性波的控制方程往往是非线性偏微分方程, 这导致对它的研究一直是数学和物理中重要而困难的课题. 近十年来, 由于观测技术的进步, 玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC) 系统中孤立子和光纤系统中怪波实验研究取得了重要进展, 极大地推动了不同物理系统中非线性波及其相关问题的研究. 本专题邀请国内活跃在非线物理研究第一线的专家撰文 15 篇 (含综述和研究论文), 内容包括从物理角度研究 BEC 系统的拓扑性质和孤立子、铁磁纳米线的磁怪波和弹性管中怪波、光学系统中的怪波和孤立子及其发生机制, 以及从数学角度 (可积系统) 研究非局域系统的孤立子、离散物理系统的多维相容和非线性波、Boussinesq 系统 Lax 对等性质等.

希望本专题能够尽可能反映基于可积系统的非线性波研究现状, 为青年学者选择科研方向、确定研究课题以及从事相关领域研究的人员提供一点帮助, 促进我国在非线物理的物理应用和数学理论的发展.

(客座编辑: 中国科学院物理研究所 刘伍明; 深圳大学高等研究院 贺劲松; 北京信息科技大学 王灯山)

## 旋量玻色-爱因斯坦凝聚体拓扑性质的研究进展\*

王力<sup>1)</sup> 刘静思<sup>2)</sup> 李吉<sup>3)</sup> 周晓林<sup>4)</sup> 陈向荣<sup>1)</sup>  
刘超飞<sup>5)†</sup> 刘伍明<sup>6)7)‡</sup>

1) (四川大学物理学院, 成都 610065)

2) (北京景山学校朝阳学校, 北京 100012)

3) (太原师范学院物理系, 晋中 030619)

4) (四川师范大学物理与电子工程学院, 成都 610101)

5) (江西理工大学理学院, 赣州 341000)

6) (中国科学院物理研究所, 北京凝聚态物理国家实验室, 北京 100190)

7) (中国科学院大学物理学院, 北京 100190)

(2019 年 10 月 28 日收到; 2019 年 12 月 2 日收到修改稿)

实现玻色-爱因斯坦凝聚的原子大多具备内部自旋自由度, 在光势阱下原子内部自旋被解冻, 从而使原子可以凝聚到各个超精细量子态上, 形成旋量玻色-爱因斯坦凝聚体. 灵活的自旋自由度成为体系相关的动力学变量, 可以使体系出现新奇的拓扑量子态, 如自旋畴壁、涡旋、磁单极子、斯格明子等. 本文综述了旋量玻色-爱因斯坦凝聚的实验和理论研究, 旋量玻色-爱因斯坦凝聚体中拓扑缺陷的种类, 以及两分量、三分量玻色-爱因斯坦凝聚体中拓扑缺陷的研究进展.

**关键词:** 旋量玻色-爱因斯坦凝聚体, 自旋畴壁, 涡旋, 斯格明子, 磁单极子

**PACS:** 03.75.Lm, 03.75.Hh, 03.75.Nt, 05.30.Jp

**DOI:** 10.7498/aps.69.20191648

\* 国家重点研发计划“量子调控与量子信息”重点专项 (批准号: 2016YFA0301500) 和国家自然科学基金 (批准号: 11434015, 61835013, 11875149, 61565007) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: liuchaofei0809@163.com

‡ 通信作者. E-mail: wmliu@iphy.ac.cn

## 1 引言

对于一个多粒子的玻色系统, 当体系的温度极低, 且原子间的距离足够靠近时, 大量原子将会凝聚在动量为零的最低能态上, 从而出现一种具有宏观量子特性的简并态, 即玻色-爱因斯坦凝聚 (Bose-Einstein condensate, BEC)<sup>[1-5]</sup>. 当 BEC 被限制在磁势阱 (如四极阱 (Paul)<sup>[6]</sup>, Ioffe-Pritchard 阱 (IPT)<sup>[7]</sup>, 时间轨道势阱 (time orbiting potential, TOP)<sup>[8]</sup> 等) 中时, 原子处于弱场束缚态, 内部自旋自由度被冻结, 此时凝聚体性质可以通过标量形式的序参量来描述<sup>[9,10]</sup>. 当 BEC 被限制在光势阱<sup>[11,12]</sup> 中时, 内部自旋自由度被释放, 其磁化性质由自旋相互作用决定, 这样的体系称为旋量 BEC<sup>[13-16]</sup>.

实验方面, 1998 年美国麻省理工学院 (MIT) 的 Stamper-Kurn 研究组<sup>[16]</sup> 在沿磁势阱的中心轴射入红外线光束形成的光偶极阱中, 首次实现了金属  $^{23}\text{Na}$  原子系统的 BEC, 通过这一突破性进展把在磁势阱中冻结的自旋自由度解放出来, 在冷原子物理领域中开辟了旋量 BEC 研究的崭新领域. 实验采用光势阱捕获和冷却钠原子, 当温度达到  $1-2\ \mu\text{K}$ , 原子密度数约为  $1 \times 10^{14}\ \text{cm}^{-3}$  时, 转移到磁势阱中经由射频诱导蒸发进一步冷却, 在  $F=1, m_F=-1$  的电子基态上产生含有  $(5-10) \times 10^6$  个原子的凝聚体. 随着红外线激光束能量的提升, 在稳定的磁势阱中控制凝聚体进入光势阱, 然后关闭磁势阱, 让凝聚体处于全光阱中. 图 1 为光势阱中  $F=1$  旋量 BEC 所有精细态上钠原子的分布, 从图 1(b) 可以清晰地看到凝聚体分布在三个超精细态上, 金属钠原子的自旋自由度被充分释放.

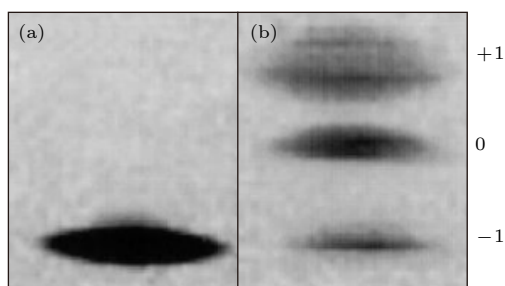


图 1 光势阱中  $F=1$   $^{23}\text{Na}$  凝聚体的超精细态<sup>[16]</sup>. (a) 250 ms 时光势阱中钠原子的吸收图像; (b) 340 ms 时光势阱中钠原子的吸收图像

Fig. 1. Optical trapping of  $^{23}\text{Na}$  condensates in all  $F=1$  hyperfine states: shown are absorption images after (a) 250 ms and (b) 340 ms of optical confinement.

2001 年, Barrett 等<sup>[17]</sup> 在两束  $\text{CO}_2$  激光束 (功率为 12 W, 波长为  $10.6\ \mu\text{m}$ ) 交叉会聚形成的全光阱中得到了  $F=1$  的  $^{87}\text{Rb}$  原子的旋量 BEC. 实验中首先将低速的铷原子装载到磁光阱中, 接着逐步降低光强, 关闭磁场, 然后把原子抽运到  $F=1, m_F=1$  态, 最后打开  $\text{CO}_2$  激光束, 使原子装载到光势阱中. 整个过程中是通过在 2 s 时间内逐步降低光强, 即减少阱深来实现蒸发冷却的. 图 2 为实验得到的 Stern-Gerlach 梯度磁场中自由膨胀 10 ms 后的原子吸收图像, 从下到上分别是  $F=1, m_F=-1, 0, 1$  凝聚体的三个分量.

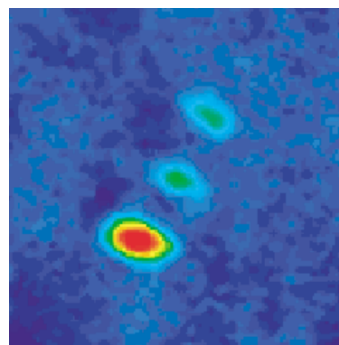


图 2 铷原子云在 Stern-Gerlach 梯度磁场中自由膨胀 10 ms 后的吸收图像<sup>[17]</sup>. 从下到上分别是  $F=1, m_F = (-1, 0, 1)$  凝聚体的三个分量

Fig. 2. Absorptive image of Rb atomic cloud after 10 ms free expansion in a Stern-Gerlach magnetic field gradient. Three distinct components are observed corresponding to  $F=1, m_F = (-1, 0, 1)$  spin projections from bottom to top, respectively.

2003 年, Gustavson 等<sup>[18]</sup> 研究了  $F=2$  的  $^{23}\text{Na}$  旋量 BEC, 观察到了数秒寿命的精细态 ( $F=2, m_F=-2$ ), 且原子密度数为每立方厘米  $10^{14}$ . Chang<sup>[19]</sup>、Schmaljohann<sup>[20]</sup>、Kuwamoto<sup>[21]</sup> 等观察到了  $F=2$  的  $^{87}\text{Rb}$  旋量 BEC, 并研究了其动力学性质. 2012 年, Pasquiou 等<sup>[22]</sup> 也从实验上观察到了  $F=3$  的  $^{52}\text{Cr}$  旋量 BEC, 并研究了其热力学性质, 表明在极低磁场下, 当自旋自由度被热激活时, 凝聚体的临界温度会降低.

特别地, 在 2011 年, 美国国家标准与技术研究院的 Spielman<sup>[23]</sup> 研究组在  $^{87}\text{Rb}$  旋量 BEC 中两个内部自旋态之间通过双光子拉曼过程实现了等效的自旋-轨道耦合, 这是人类历史上首次通过人工合成磁场实现了 BEC 的自旋-轨道耦合效应, 成为近年来冷原子物理中的一个研究热点<sup>[24-27]</sup>.

2012年, 中国科技大学潘建伟<sup>[28]</sup> 研究组也实现了 BEC 中的一维自旋-轨道耦合. 此外, 山西大学<sup>[29]</sup> 和麻省理工<sup>[30]</sup> 的研究组, 分别用 <sup>40</sup>K 和 <sup>6</sup>Li 实现了费米冷原子气体中的自旋-轨道耦合. 量子气体中自旋-轨道耦合的实现, 开辟了研究冷原子物理的新方向, 如光与原子相互作用对旋量 BEC 拓扑结构的影响, 自旋涡旋阵列的产生, 以及各种新奇拓扑缺陷的产生. 科研工作者不仅详细研究了自旋-轨道耦合的 BEC 的性质<sup>[31–34]</sup>, 还在实验上成功模拟了 Zitterbewegung(狄拉克颤动)<sup>[35,36]</sup>、自旋霍尔效应<sup>[37]</sup> 等现象, 并提出了研究量子霍尔效应<sup>[38]</sup>、反常量子自旋霍尔效应<sup>[39]</sup>、费米气体中的拓扑量子相变<sup>[40]</sup> 等物理问题的方案.

理论方面, 1998年 Ho<sup>[41]</sup> 和 Ohmi<sup>[42]</sup> 独立进行了旋量 BEC 的理论研究. 他们推广了 Gross-Pitaevskii 方程, 在平均场理论下研究了自旋  $F = 1$  的 BEC 的基态结构和拓扑缺陷的性质. 同年, Law 等<sup>[43]</sup> 利用量子光学中的代数方法研究了其自旋混合动力学行为. 接着, Koashi<sup>[44,45]</sup>、Ciobanu<sup>[46]</sup> 和 Semenoff<sup>[47]</sup> 等研究了  $F = 2$  的旋量 BEC 的基态结构、自旋相关、磁效应、激发谱及相位等一系列理论性质. Santos<sup>[48]</sup>、Diener<sup>[49]</sup>、Makela<sup>[50]</sup> 等对  $F = 3$  的旋量 BEC 也进行了理论研究. 2007年, Yip<sup>[51]</sup> 研究了自旋  $F \leq 4$  的旋量 BEC 的基态及其对称性.

BEC 作为一种新颖的物质形态, 是物理学前沿的研究热点之一, 特别是实验上实现了旋量 BEC、分子的 BEC、费米凝聚体、自旋-轨道耦合的超冷原子气体以来, 又掀起了新一轮的研究热潮. 本文综述了旋量 BEC 的实验和理论研究, 旋量 BEC 中产生的拓扑缺陷的种类, 如自旋畴壁、涡旋、磁单极子、skymions、扭结, 并结合我们的工作着重介绍了两分量和三分量旋量 BEC 中拓扑缺陷的研究进展.

## 2 旋量玻色-爱因斯坦凝聚体

### 2.1 旋量玻色-爱因斯坦凝聚体的哈密顿量表示

自旋为  $f$  的 BEC 的序参量在旋转下有  $2f + 1$  个分量, 且这些分量是随着时间空间变化的, 携带关于超流和磁性的信息, 能形成自旋流及质量流, 产生丰富的自旋结构<sup>[52]</sup>.

考虑自旋  $f$  的全同玻色子体系, 取  $\hat{\psi}_m(\mathbf{r})$  为相应的场算符, 假设满足对易关系:

$$[\hat{\psi}_m(\mathbf{r}), \hat{\psi}_n^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta_{nm}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1)$$

$$[\hat{\psi}_n(\mathbf{r}), \hat{\psi}_m(\mathbf{r}')] = 0, \quad (2)$$

$$[\hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}), \hat{\psi}_n^\dagger(\mathbf{r}')] = 0. \quad (3)$$

考虑两个自旋为  $f$  的玻色子的耦合作用, 其总自旋  $F$  为  $0, 2, \dots, 2f$ , 耦合态对应的湮灭算符为

$$\hat{A}_{\text{FM}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{m_1, m_2 = -f}^f \langle F, M | f, m_1; f, m_2 \rangle \hat{\psi}_{m_1}(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{m_2}(\mathbf{r}'). \quad (4)$$

哈密顿量具有标量性, 在旋转下保持不变, 进一步得到相互作用哈密顿量:

$$\hat{V}^F = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' v^{(F)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \sum_{M=-F}^F \hat{A}_{\text{FM}}^\dagger(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{A}_{\text{FM}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (5)$$

其中  $v^{(F)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  表示相互作用势, 且

$$\sum_F \sum_{M=-F}^F \hat{A}_{\text{FM}}^\dagger(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{A}_{\text{FM}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{n}(\mathbf{r}) \hat{n}(\mathbf{r}'), \quad (6)$$

$$\hat{n}(\mathbf{r}) \equiv \sum_{m=-f}^f \hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_m(\mathbf{r}), \quad (7)$$

其中  $\hat{n}(\mathbf{r})$  是粒子数密度算符,  $::$  表示取正规序. 当相互作用势的量级与原子平均间隔相比忽略不计时, 可以将  $v^{(F)}$  近似表示为  $\delta$  函数的形式:

$$v^{(F)} = g_{\text{F}} \delta(\mathbf{r}), \quad (8)$$

$$g_{\text{F}} = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_{\text{F}}, \quad (9)$$

其中  $g_{\text{F}}$  描述两个粒子间相互作用强度,  $a_{\text{F}}$  指 S 波散射长度. 由此哈密顿量可以表示为

$$\hat{V}^F = \frac{g_{\text{F}}}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{M=-F}^F \hat{A}_{\text{FM}}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{\text{FM}}(\mathbf{r}), \quad (10)$$

其中  $\hat{A}_{\text{FM}}(\mathbf{r})$  如 (4) 式所示

$$\langle 0, 0 | f, m_1; f, m_2 \rangle = \delta_{m_1+m_2, 0} \frac{(-1)^{f-m_1}}{\sqrt{2f+1}}, \quad (11)$$

$$\hat{A}_{00}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\sqrt{2f+1}} \sum_{-f}^f (-1)^{f-m} \hat{\psi}_m(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{-m}(\mathbf{r}'). \quad (12)$$

对于自旋  $f=1$  时的相互作用哈密顿量, 此时两个玻色子碰撞的总自旋  $F$  只能是 0 和 2, 相应的相互作用哈密顿量可表示为

$$\hat{V}_0 = \frac{g_0}{2} \int d^3\mathbf{r} \hat{A}_{00}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{00}(\mathbf{r}), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \hat{V}_2 &= \frac{g_2}{2} \int d^3\mathbf{r} \sum_{M=-2}^2 \hat{A}_{2M}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{2M}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{g_2}{2} \int d^3\mathbf{r} \left[ : \hat{n}^2(\mathbf{r}) : - \hat{A}_{00}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{00}(\mathbf{r}) \right], \quad (14) \end{aligned}$$

联合两式得到总的相互作用哈密顿量为

$$\hat{V} = \int d^3\mathbf{r} \left[ \frac{g_2}{2} : \hat{n}^2(\mathbf{r}) : + \frac{g_0 - g_2}{2} \hat{A}_{00}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{00}(\mathbf{r}) \right], \quad (15)$$

将自旋 1 情况的算符恒等式:  $\hat{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{F}(\mathbf{r}) + 3\hat{A}_{00}^\dagger(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{A}_{00}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = : \hat{n}(\mathbf{r}) \hat{n}(\mathbf{r}') :$  代入上式, 得到:

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \left[ c_0 : \hat{n}^2(\mathbf{r}) : + c_1 : \hat{F}^2(\mathbf{r}) : \right], \quad (16)$$

其中

$$c_0 = \frac{g_0 + 2g_2}{3}, \quad (17)$$

$$c_1 = \frac{g_2 - g_0}{3}, \quad (18)$$

同样地, 可以得到  $f=2$  时的相互作用哈密顿量:

$$\begin{aligned} \hat{V} &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \left[ c_0 : \hat{n}^2(\mathbf{r}) : + c_1 : \hat{F}^2(\mathbf{r}) : \right. \\ &\quad \left. + c_2 \hat{A}_{00}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{00}(\mathbf{r}) \right], \quad (19) \end{aligned}$$

其中

$$c_0 = (4g_2 + 3g_4)/7, \quad (20)$$

$$c_1 = (g_4 - g_2)/7, \quad (21)$$

$$c_2 = (7g_0 - 10g_2 + 3g_4)/7, \quad (22)$$

$f=3$  时的相互作用哈密顿量为

$$\begin{aligned} \hat{V} &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \left[ c_0 : \hat{n}^2(\mathbf{r}) : + c_1 : \hat{F}^2(\mathbf{r}) : \right. \\ &\quad \left. + c_2 \hat{A}_{00}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{00}(\mathbf{r}) \right. \\ &\quad \left. + c_3 \sum_{M=-2}^2 \hat{A}_{2M}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{2M}(\mathbf{r}) \right], \quad (23) \end{aligned}$$

其中

$$c_0 = (9g_4 + 2g_6)/11, \quad (24)$$

$$c_1 = (g_6 - g_4)/11, \quad (25)$$

$$c_2 = (11g_0 - 21g_4 + 10g_6)/11, \quad (26)$$

$$c_3 = (11g_0 - 18g_4 + 7g_6)/11. \quad (27)$$

## 2.2 旋量玻色-爱因斯坦凝聚体的拓扑荷

对于各种形式的拓扑缺陷主要通过计算拓扑荷来判定. 线缺陷形式的涡旋可通过观察相位图中的奇异点和缠绕数来识别, 对于点缺陷, 如磁单极子, 可以通过计算拓扑荷来确定是整数磁单极子还是分数磁单极子<sup>[53]</sup>. 在两分量 BEC 系统中, 原子可以是两种不同的元素<sup>[54]</sup>, 也可以是同种元素的两种同位素<sup>[55]</sup>, 或者是同种原子的不同超精细态<sup>[56]</sup>, 该体系可用自旋 1/2 系统来描述<sup>[57,58]</sup>.

自旋  $S = \Psi^\dagger \sigma \Psi / |\Psi|^2$ , 其分量形式为

$$\begin{cases} S_x = \frac{2|\psi_1||\psi_2|}{|\Psi|^2} \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ S_y = -\frac{2|\psi_1||\psi_2|}{|\Psi|^2} \sin(\theta_1 - \theta_2), \\ S_z = \frac{|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2}{|\Psi|^2} \end{cases} \quad (28)$$

其中  $\psi_1, \psi_2, \theta_1, \theta_2$  分别为两个分量的波函数和相位. 局部自旋的三个分量可表示为

$$\begin{cases} S_x = \sin \theta \cos \varphi \\ S_y = \sin \theta \sin \varphi, \\ S_z = \cos \theta \end{cases} \quad (29)$$

其中  $\theta$  和  $\varphi$  分别为极角和方位角. 比较两式可知自旋的极角只与两分量的相对密度有关, 即自旋的  $S_z$  分量由两组分的密度差决定, 而  $S_x, S_y$  分量由相对密度和相对相位共同决定, 表明两分量 BEC 不同的相对密度和相对相位会导致不同结构的自旋纹理, 可以用拓扑荷密度  $q(r)$  来描述其拓扑结构的空分布:

$$q(r) = \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{ij} \mathbf{S} \cdot \partial_i \mathbf{S} \times \partial_j \mathbf{S}, \quad (30)$$

对全空间积分得拓扑荷:

$$\begin{aligned}
 Q(S_x, S_y, S_z) &= \int \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{ij} \mathbf{S} \cdot \partial_i \mathbf{S} \times \partial_j \mathbf{S} d\mathbf{r} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ \frac{\partial S_x}{\partial x} & \frac{\partial S_y}{\partial x} & \frac{\partial S_z}{\partial x} \\ \frac{\partial S_x}{\partial y} & \frac{\partial S_y}{\partial y} & \frac{\partial S_z}{\partial y} \end{vmatrix} d\mathbf{r} \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \int \begin{vmatrix} S_x & S_z & S_y \\ \frac{\partial S_x}{\partial x} & \frac{\partial S_z}{\partial x} & \frac{\partial S_y}{\partial x} \\ \frac{\partial S_x}{\partial y} & \frac{\partial S_z}{\partial y} & \frac{\partial S_y}{\partial y} \end{vmatrix} d\mathbf{r} \\
 &= -Q(S_x, S_z, S_y). \tag{31}
 \end{aligned}$$

从 (31) 式可以看出, 任意交换自旋密度矢量的三个分量  $S_x, S_y, S_z$  中的两个分量, 或者任意改变三个分量中其中一个分量的正负号, 将会出现不同结构的自旋纹理, 但其拓扑荷密度  $q(r)$  和拓扑荷的绝对值  $|Q|$  不会变化.

### 3 拓扑缺陷的分类

拓扑缺陷的独特性是在弱微扰下能稳定存在, 在空间自由连续地变换而不改变其自身性质. 这种稳定性由表征序参量流形的离散拓扑量子数保护. 拓扑缺陷的分类主要依靠同伦论, 描述不同的拓扑缺陷会出现不同的序参量流形. 表 1 总结了利用同伦群对拓扑缺陷进行分类的结果. 旋量 BEC 有丰富的序参量流形, 因而可产生不同种类的拓扑缺陷, 如整数和分数涡旋 [59–64], 非阿贝尔涡旋 [65], 'tHooft-Polyakov 磁单极子 [66], 狄拉克磁单极子 [67–68], skyrmions [69–71] 和扭结 [72].

表 1 同伦群描述的拓扑缺陷结构  
Table 1. Topological defect structures described by homotopy groups.

$\pi_n$	缺陷	孤子
$\pi_0$	畴壁	暗孤子
$\pi_1$	涡旋	非奇异畴壁
$\pi_2$	磁单极	二维 skyrmions
$\pi_3$		skyrmions, 扭结
$\pi_4$		瞬子

#### 3.1 自旋畴壁

畴壁可由零阶同伦群  $\pi_0(\mathcal{R})$  表征. 若  $\pi_0(\mathcal{R}) = 0$  说明体系是相连的, 若  $\pi_0(\mathcal{R}) = 1$ , 说明

体系被分为两个非连续区域. 以两分量赝自旋 1/2 的序参量来描述, 其赝自旋表示为 (28) 式. 图 3 表示在赝自旋表象中自旋密度  $S_x, S_y, S_z$  的分布情况. 第一组分分布在势阱的左边, 标记为自旋朝上  $S_z = 1$  (图中红色表示); 第二组分在强烈的排斥作用下分布在第一组分的低密度区域, 即势阱的右边, 标记为自旋朝下  $S_z = -1$  (图中蓝色表示). 两个分量的相分离导致在赝自旋表象中形成了两个自旋畴, 在两个自旋畴的界面上形成了自旋畴壁. 在这个区域自旋既不朝上也不朝下 (即  $|S_z| \neq 1$ ), 而是在  $x$  方向上有了分量. 从左边自旋畴到右边自旋畴的过程中, 畴壁上的自旋沿着  $x$  方向翻转, 赝自旋在  $x-y$  平面的投影均指向  $x$  轴的正方向, 形成了如图 3(d) 中的经典奈尔型畴壁 [73].

#### 3.2 涡旋

涡旋可由一阶同伦群  $\pi_1(\mathcal{R})$  表征, 描述一个从实空间回路到序参量流形的映射. 它属于线缺陷, 常见于超流和液晶位错中. 对于 S 波超导体、液  $^4\text{He}$  以及旋量 BEC, 绕涡旋线的质量环流是量子化的, 其涡旋由缠绕数  $n_w$  表征:

$$\oint_C \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = n_w \kappa, \tag{32}$$

积分沿着闭合路径  $C$  进行, 其中  $\kappa \equiv h/M$ ,  $\mathbf{v}_s (= h/M \nabla \phi)$  为超流速度. 对于标量序参量, 其序参量流形为  $\mathcal{R} = U(1)$ , 其基本群为整数加群:  $\pi_1(U(1)) \cong \mathbb{Z}$ .  $\pi_1(U(1))$  的群元与缠绕数  $n_w$  的值是一一对应的 [74].

对于自旋 1 的铁磁 BEC, 序参量流形为  $SO(3)$ , 其基本群为  $\pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ , 可存在 Mermin-Ho 涡旋, 对应序参量为:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \\ \psi_{-1} \end{pmatrix} = \sqrt{n} \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\beta}{2} \\ \sqrt{2} e^{i\phi} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \\ e^{2i\phi} \sin^2 \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}, \tag{33}$$

其中  $\beta$  是方位角,  $\phi$  表示极坐标下极角. Mermin-Ho 涡旋在中心处的方位角  $\beta = 0$ , 在边界处对应的方位角  $\beta = \pi/2$ . 因此, 空间内自旋方向在中心处是垂直的, 边界处是水平的. 这种涡旋的缠绕数组合为  $(0, 1, 2)$ , 每个组分的密度分布都是轴对称的, 势阱中心被  $\psi_1$  组分占据,  $\psi_0$  组分被推到外部,  $\psi_{-1}$  组分被排挤到最边缘区域.

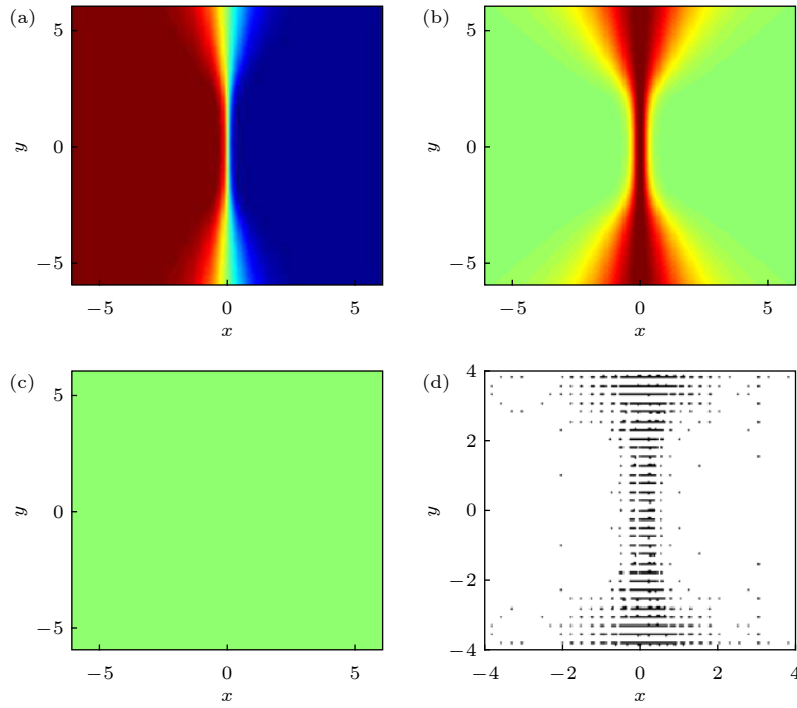


图3 赝自旋密度  $S_x, S_y, S_z$  的空间分布<sup>[73]</sup> (a)—(c) 表示旋转角频率为 0; (d) 自旋纹理投影到  $x-y$  平面内的矢量表示  
 Fig. 3. The pseudospin density distribution for (a)  $S_z$ , (b)  $S_x$  and (c)  $S_y$  for  $\Omega = 0$ ; (d) the vectorial representation of the spin texture projected onto the  $x-y$  plane.

另一种涡旋结构为极核涡旋, 对应序参量为

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \\ \psi_{-1} \end{pmatrix} = \sqrt{n} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos^2 \frac{\beta}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta \\ e^{i\phi} \sin^2 \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

这种涡旋的缠绕数满足组合  $(1, 0, -1)$ . 势阱中心被  $\psi_0$  组分占据,  $\psi_1$  和  $\psi_{-1}$  组分被推到外部区域. 不同于 Mermin-Ho 涡旋中心处的纵向磁化, 极核涡旋代表手征对称性的自发破缺.

对于涡旋而言, 相位的改变量是量子化的, 应是  $2\pi$  的整数倍<sup>[75]</sup>. 在两分量 BEC 系统中, 通过光学方法可以实现半量子化涡旋 (half-quantized vortice), 描述两分量系统中, 组分一涡旋的相位改变量是  $2\pi$ , 组分二相位改变量为 0 的情况. 相对于整个系统, 每个组分的相位改变量为  $\pi$ , 因此称之为半量子化涡旋或 Alice 涡旋<sup>[76]</sup>. 2017 年 Liu C F 和 Liu W M<sup>[77]</sup> 利用变分方法, 得到了自旋-轨道耦合和外磁场联合作用下自旋 1BEC 中无核半量子涡旋可能的稳定解. 计算表明, 各向同性自旋-轨道耦合提供了稳定无核半量子涡旋和相应的奇异半量子自旋纹理激发的局部能量最小. 各向同性自旋-轨道耦合和垂直磁场的联合约束是获得这种激

发的关键因素, 研究还提供了半量子涡旋的稳定相图和最可能的尺寸. 图 4 为自旋 1BEC 中半量子涡旋近似解和相应的奇异自旋纹理. 在自旋 2BEC 的单轴向列相和四面体循环相中还存在非阿贝尔涡旋, 其迷向群都是阿贝尔群<sup>[78]</sup>. 非阿贝尔涡旋的特点在于其涡旋的生成元是不能互换的, 因此当两个涡旋碰撞时, 它们不能合并或者通过对方, 而是形成一个 rung 涡旋粘在一起.

### 3.3 磁单极子

磁单极子可由二阶同伦群  $\pi_2(\mathcal{R})$  表征, 描述从实空间一个球到序参量流形的映射, 为二维 skyrmion 结构, 常见的两种二维 skyrmions 构型如图 5. 在铁磁 BEC 系统中可以产生狄拉克磁单极子, 其铁磁相的序参量为

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \\ \psi_{-1} \end{pmatrix} = \sqrt{n} e^{i\theta} U(\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{n} e^{i(\theta-\gamma)} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} \cos^2 \frac{\beta}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta \\ e^{i\alpha} \sin^2 \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

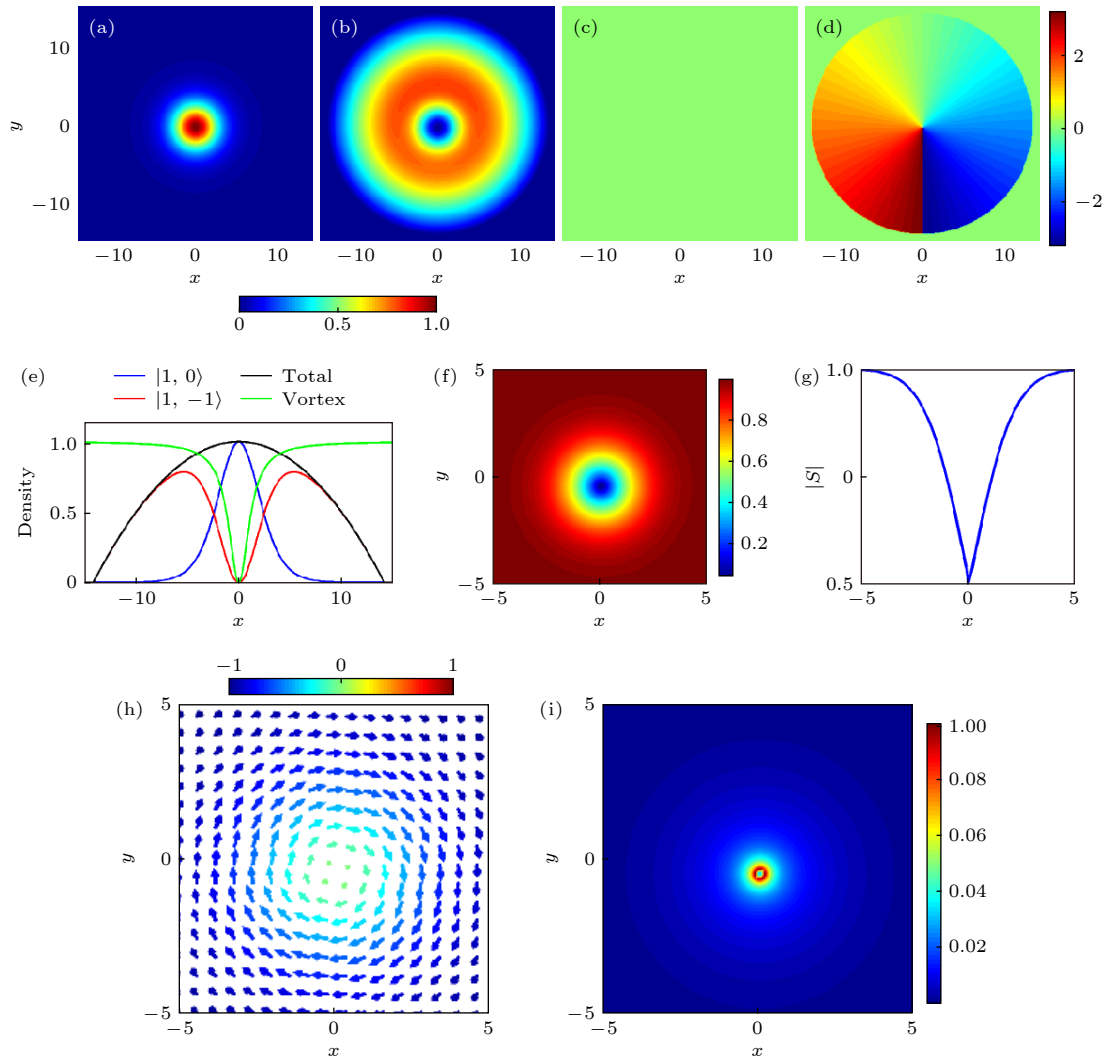


图 4 自旋 1 BEC 中半量子涡旋的近似解和相应的奇异自旋纹理<sup>[77]</sup> (a) 和 (b) 对应  $|F = 1, m_F = 0\rangle$  和  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  分量的密度; (c) 和 (d) 是对应的相; (e) 为半量子涡旋的分布; (f)  $|S|$  自旋密度; (g)  $|S|$  自旋密度分布; (h) 自旋纹理; (i) 拓扑荷密度  $q(x, y)$

Fig. 4. Approximate half-quantum vortex solution in the spin-1 BEC and the corresponding singular spin texture: (a) and (b) are the densities of the  $|F = 1, m_F = 0\rangle$  and  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  components, respectively; (c) and (d) are the corresponding phases; (e) shows the profile of the half-quantum vortex; (f) spin density  $|S|$ ; (g) the profile of the spin density  $|S|$ ; (h) spin texture; (i) topological charge density  $q(x, y)$ .

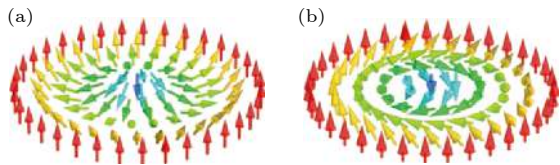


图 5 两种常见的二维 skyrmions 的矢量场构型<sup>[79]</sup> (a) 豪猪型 skyrmion; (b) 螺旋型 skyrmion

Fig. 5. Two common vector field configurations of two-dimensional skyrmions: (a) The hedgehog type skyrmion; (b) the spiral type skyrmion.

这样的点缺陷在铁磁 BEC 中三个自旋态的分布分别为: 在  $\psi_1$  分量表现为双量子数涡旋线, 在  $\psi_0$  分量表现为单量子数涡旋线, 在  $\psi_{-1}$  分量表现为

孤子态, 没有涡旋线.

自 1931 年狄拉克磁单极子被首次提出以来, 便受到了广泛关注, 尽管到目前为止仍然没有探测到真实的磁单极子, 科研工作者在不同领域也取得了较大的进展, 例如固态物理中的自旋冰材料, 便提供了一种人造磁单极子环境. 最具有突破性进展的是研究者在铁磁 BEC 中实验上实现了人造磁单极子<sup>[80,81]</sup>.

### 3.4 三维 skyrimion

三维 skyrimion 可由三阶同伦群  $\pi_3(\mathcal{R})$  表征, 这是一个扩展到整个三维实空间的拓扑结构, 类似

于粒子的拓扑孤子, 所有自旋有序排列, 在有限空间下自旋会发生反转. 考虑一个铁磁系统, 对应的序参量具有  $SO(3)$  对称性. 它是在位置  $\mathbf{r}$  处序参量通过一个向量  $\boldsymbol{\Omega}$  表示, 向量的方向和梯度描述了自

旋的方向和旋转的角度. 给定条件  $f(\infty) = 0$ , 保证序参量均匀且在无限远处等于  $\zeta^{\text{FM}} = (1, 0, 0)^T$ . 给定另一条件  $f(0) = 2\pi n$  保证 skyrmion 属于同伦分类. 通过酉变换得到序参量表示:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \\ \psi_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left( \cos \frac{f(r)n}{2} - i \cos \theta \sin \frac{f(r)n}{2} \right)^2 \\ -\sqrt{2}i \left( \cos \frac{f(r)n}{2} - i \cos \theta \sin \frac{f(r)n}{2} \right) \sin \frac{f(r)n}{2} \sin \theta e^{i\phi} \\ -\sin^2 \frac{f(r)n}{2} \sin^2 \theta e^{2i\phi} \end{pmatrix}, \quad (36)$$

其中  $\hat{f} = (\hat{f}_x, \hat{f}_y, \hat{f}_z)$ ,  $(r, \theta, \phi)$  是位置  $\mathbf{r}$  处的极坐标.

Skyrmion 在凝聚态的许多体系中发挥了作用, 例如液氦、量子霍尔体系、液晶以及螺旋铁磁系统, 目前在旋量 BEC 中的 skyrmion 已经成为研究热点. 图 6 是研究者在两分量 BEC 中通过非阿贝尔规范场诱导观察到的三维 skyrmions<sup>[82,83]</sup>.

### 3.5 扭结

扭结也可由三阶同伦群  $\pi_3(\mathcal{R})$  表征, 表现为一个闭合回路互相嵌套的结构, 描述从三维球空间  $S^3$  到  $S^2$  的映射. 不同于其他拓扑缺陷, 如涡旋、磁单极子和三维 skyrmion 通过缠绕数来描述, 扭结是通过连接数或 Hopf 不变量来描述. Hopf 映射是从  $S^3$  到  $S^2$ , 在  $S^2$  中一个点的原像会形成一个无结的回路. 假设在 BEC 系统中给定一个闭合路径  $C_1$ , 自旋矢量固定在一个给定的方向, 另一个回路  $C_2$  沿着自旋不同的方向. 如果两个回路  $C_1$  和  $C_2$  连接一次, 那么连接数就为 1. 连接数可正可负, 决定于两个回路的相对取向. 扭结自 Faddeev 和 Niemi 提出在三维经典场论中可以稳定孤子的形式存在以来, 引起了物理学家极大的研究兴趣. 与三维 skyrmion 的情况一样,  $S^3$  域是通过设置一个边界条件来给定的, 即在空间无穷大的各个方向上, 序参量的值是相同的. 考虑自旋 1 的极性相, 序参量流形为  $\mathcal{R}^{\text{polar}} \cong (S_r^2 \times U(1)_\phi) / (\mathbb{Z}_2)_{r,\phi}$ , 这里  $U(1)$  和  $\mathbb{Z}_2$  对一维空间以上的同伦群无对称贡献, 因此, 得到  $\pi_3 \mathcal{R}^{\text{polar}} \cong \pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ . 对应的拓扑荷, 也即 Hopf 荷  $Q \in \mathbb{Z}$ <sup>[84]</sup>.

通过操纵外部磁场, 可以在自旋 1BEC 中形成扭结. 在外部磁场存在时, 线性塞曼效应引起  $\hat{d}$  的拉莫尔进动, 而二次塞曼效应  $\hat{d}$  往往平行与磁场. 假设一个处于光势阱的 BEC, 其  $\hat{d} = (0 \ 0 \ 1)^T$ , 在  $z$  方向施加均匀磁场, 然后突然关闭均匀磁场, 打开四极场, 由于线性塞曼效应,  $\hat{d}$  开始围绕磁场旋转. 此时  $\hat{d}$  作为时间的函数运动, 从而导致扭结的形成. 图 7 显示了四极场作用下球形光势阱中扭结产生的动力学过程.

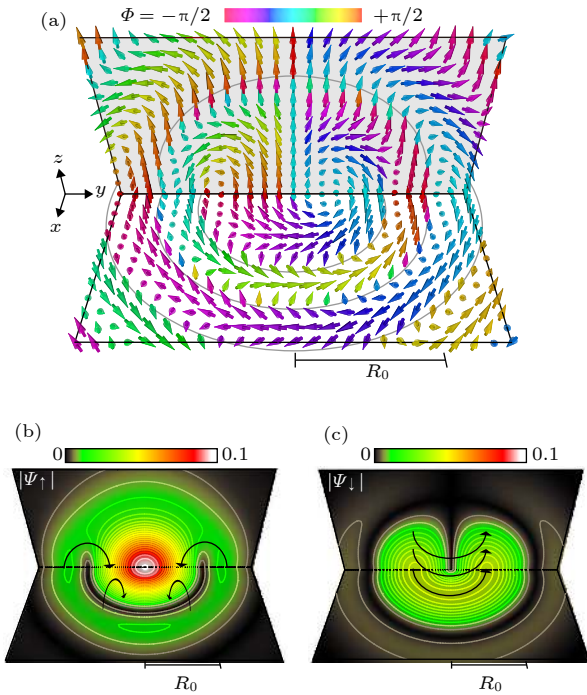


图 6 稳定的三维 skyrmions 在  $x-y$  和  $z-x$  平面的空间分布<sup>[83]</sup>. (a) 中的箭头和颜色分别表示赝自旋方向和 OP 的  $U(1)$  相分布. 彩图 (b) 和 (c) 分别表示  $|\Psi_\uparrow(\mathbf{r})|$  和  $|\Psi_\downarrow(\mathbf{r})|$  的振幅

Fig. 6. The spatial profile of the stable 3D skyrmions in the  $x-y$  and  $z-x$  planes: The arrows and their colors in (a) indicate the pseudospin direction and the  $U(1)$  phase of the OP, respectively; the color maps of (b) and (c) give the amplitudes  $|\Psi_\uparrow(\mathbf{r})|$  and  $|\Psi_\downarrow(\mathbf{r})|$ , respectively.



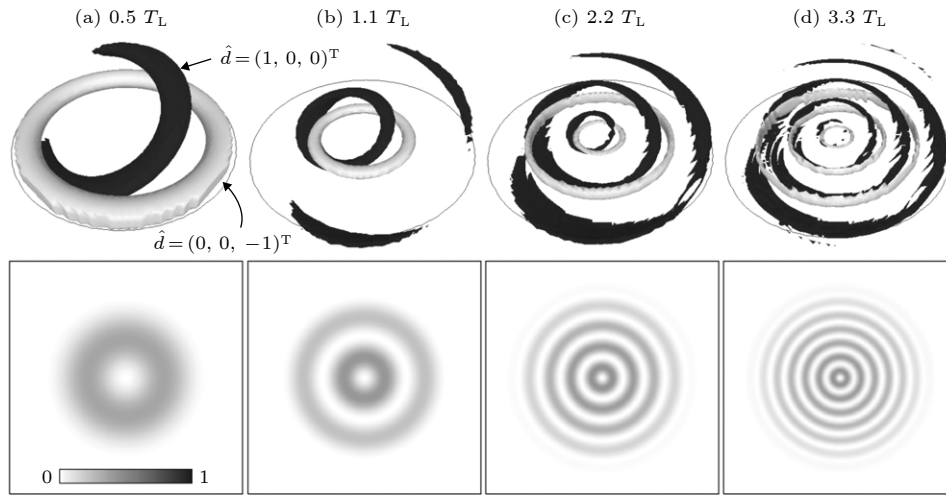


图 7 四极场作用下球形光势阱中扭结产生的动力学过程<sup>[85]</sup>. 上一行表示  $\hat{d} = (0, 0, -1)^T$  和  $\hat{d} = (1, 0, 0)^T$  的图像快照, 下一行表示  $x-y$  平面上  $m = -1$  分量的密度截面

Fig. 7. Dynamics of the creation of knots in a spherical optical trap under a quadrupole magnetic field. Snapshots of the preimages of  $\hat{d} = (0, 0, -1)^T$  and  $\hat{d} = (1, 0, 0)^T$ (top), and the cross sections of the density for the  $m = -1$  components on the  $x-y$  plane (bottom).

## 4 旋量玻色-爱因斯坦凝聚体中的拓扑缺陷研究

### 4.1 两分量旋量玻色-爱因斯坦凝聚体中的拓扑缺陷研究

对于两分量 BEC<sup>[86]</sup>, 由于组分内相互作用与组分间相互作用两者的竞争导致体系出现丰富而有趣的拓扑结构, 如上文介绍的涡旋、skyrmion、磁单极子和量子扭结等, 现已成为实验研究的理想平台. 实验方面, 1999 年 Matthews 等<sup>[87]</sup> 在两分量 BEC 中产生了量子涡旋. 2001 年 Anderson 等<sup>[88]</sup> 采用两束正交的探测光观察到双组分的 BEC 中暗孤子受动力学不稳定的影响衰变为涡旋环. 2016 年 Hall 等<sup>[89]</sup> 演示了在旋量 BEC 中扭结孤子的实验创建和检测, 所观察到的扭结纹理对应于三阶同伦群, 如图 8.

理论方面, 1999 年 Williams 和 Holland<sup>[90]</sup> 展示了在 BEC 中选择性地产生具有不同角动量超流涡旋的方法, 包括求解具有强耦合原子态的双组分凝聚体的时间相关运动方程. 2002 年 Battye 等<sup>[91]</sup> 证实了在两分量 BEC 中存在稳定的 skyrmion 结构. 同年 Martikainen 等<sup>[92]</sup> 理论研究了在两分量 BEC 中产生磁单极子的方法, 并证明磁单极子的产生并不局限于反铁磁自旋凝聚, 同时研究了这种磁单极子的膨胀探测, 以及势阱中位移磁单极子的

动力学. 2004 年 Kasamatsu 和 Tsubota<sup>[93]</sup> 通过数值积分耦合的 Gross-Pitaevskii 方程, 研究了双组分 BEC 在轴对称势阱中由调制不稳定性引起的多畴壁形成动力学. 2010 年 Wang 等<sup>[94]</sup> 在无外势的自旋-轨道耦合两分量 BEC 中发现了平面波相和条纹相, 在考虑外势的情况下, 体系将出现新的量子态, 如分数涡旋和涡旋格子<sup>[95]</sup> 以及 skyrmion 格子<sup>[96]</sup>.

接着, 人们研究了旋转势下自旋-轨道耦合两分量 BEC 的基态性质. 2011 年 Xu 和 Han<sup>[97]</sup> 在旋转势下自旋-轨道耦合两分量 BEC 体系中发现了对称排列的涡旋列和中心伴有巨 skyrmion 的三角涡旋格子. 2011 年 Zhou 等<sup>[98]</sup> 探讨了具有旋转和自旋-轨道耦合两分量 BEC 的基态性质, 发现了半量子数涡旋格子结构. 2012 年 Liu 等<sup>[99]</sup> 总结了 skyrmions 的类型, 并通过研究自旋-轨道耦合的两分量 BEC 的随机投影 Gross-Pitaevskii 方程, 发现自旋-轨道耦合能够诱导系统产生具有两个  $S_z$  极值的环形-双曲状的 skyrmions. 图 9 为总结的 skyrmions 类型.

2014 年 Wang 等<sup>[100]</sup> 研究了准二维旋转双分量 BEC 在改变自旋-轨道耦合和旋转频率强度的情况下呈现出的各种丰富的基态结构, 表明各向异性自旋-轨道耦合引起的不同基态相之间的转变明显不同于各向同性的情况. Fetter<sup>[101]</sup> 用时间相关的拉格朗日形式和变分函数研究了自旋-轨道耦合

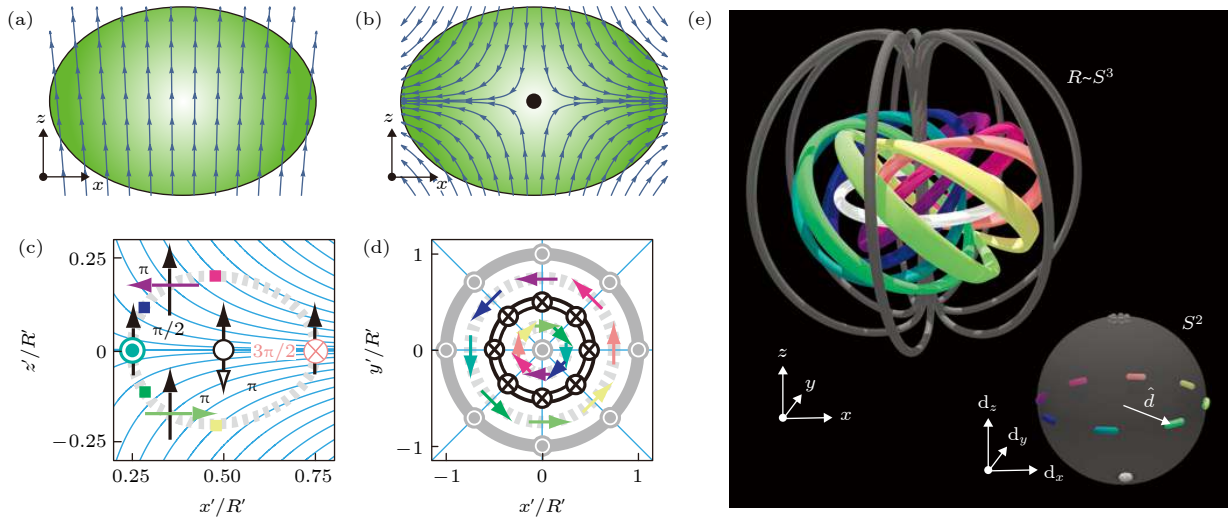


图 8 扭结孤子的结构及其产生方法<sup>[89]</sup> (a) 和 (b) 为扭结形成之前和形成过程中磁感应线的示意图, 绿色椭圆为对应的凝聚体; (c) 和 (d) 显示扭结形成时, 最初的  $z$  方向的向列相矢量 (黑色箭头) 沿着局部磁场 (青色线) 的方向进动, 以实现最终的结构 (彩色箭头). 灰色虚线表示  $d_z = 0$ , 白线表示孤子核 ( $d_z = -1$ ), 深灰色线表示体积  $V$  ( $d_z = 1$ ) 的边界; (e) 表示实空间中扭结孤子的构型及其与  $S^2$  中向列矢量  $\hat{d}$  的关系

Fig. 8. Structure of the knot soliton and the method of its creation: Schematic magnetic field lines before (a) and during (b) the knot formation, with respect to the condensate (green ellipse); (c), (d) as the knot is tied, the initially  $z$ -pointing nematic vector (black arrows) precesses about the direction of the local magnetic field (cyan lines) to achieve the final configuration (coloured arrows); the dashed grey line shows where  $d_z = 0$ , the white line indicates the soliton core ( $d_z = -1$ ), and the dark grey line defines the boundary of the volume  $V$  ( $d_z = 1$ ); (e) the knot soliton configuration in real space and its relation to the nematic vector  $\hat{d}$  in  $S^2$  (inset).

的 BEC 中双组分涡旋的动力学. 2016 年 Sakaguchi 和 Umeda<sup>[102]</sup> 通过数值模拟和变分方法, 研究了 Rashba 型自旋-轨道耦合的双组分 BEC 的 Gross-Pitaevskii 方程. 发现当不存在相互作用时, 多量子涡旋态成为谐波势中的基态. 当引力相互作用较强时, 多量子涡旋态在方位角方向呈现调制不稳定性, 出现孤子态. 当排斥相互作用较强时, 形成中心为多量子涡旋的涡旋晶格态, 且涡旋晶格态近似于多量子涡旋态的线性组合.

2017 年 Sakaguchi<sup>[103]</sup> 通过数值分析研究了双组分 BEC 中自旋-轨道耦合条纹和半涡旋物质波孤子在组分间线性混合 (Rabi 耦合) 作用下, 以耦合结构振荡和穿梭运动形式产生宏观量子效应的可能性. 研究得到在一维系统中, 本征振荡表现为条纹孤子在空间上的偶数分量和奇数分量之间的翻转, 而在二维系统中则表现为半涡旋孤子的零涡旋和涡旋分量之间的周期性跃迁. 同年, Wang 等<sup>[104]</sup> 研究了环形势阱中自旋-轨道耦合两分量 BEC 的旋涡态和自旋纹理, 系统地讨论了旋转、自旋-轨道耦合和原子间相互作用对系统基态涡旋结构和自旋纹理的影响. 特别是当旋转频率固定在临界值以上时, 各向同性自旋-轨道耦合的增强使每个分量

中有一个可见的涡旋链, 在中心区域伴随着一个隐藏的巨涡旋和一个 (或几个) 隐藏的涡旋链. Kato 等<sup>[105]</sup> 研究了具有 Rashba 自旋-轨道耦合双组分 BEC 中涡旋-反涡旋对的动力学性质, 并且发现旋涡-反涡旋对的速度远小于无自旋-轨道耦合的速度且存在稳态, 而两个具有相同环流的涡旋相互移动或联合会形成一个静止状态.

2018 年 Shi 等<sup>[106]</sup> 研究了旋转非对称势阱中具有 Dresselhaus 自旋-轨道耦合 (DSOC) 的两分量 BEC 中的拓扑缺陷和自旋纹理. 结果表明, 对于不含自旋-轨道耦合的初始混合凝聚体, 旋转频率的增强可导致系统的结构相变. 在各向同性 DSOC 存在的情况下, 该系统维持涡流对、Anderson-Toulouse 无核涡流、圆形涡旋片和组合涡旋结构. 特别地, 当旋转频率固定在径向势阱频率之上时, 强 DSOC 导致了由多层可见涡旋链、隐藏涡旋链和隐藏巨涡旋流组成的特殊拓扑结构. Li 和 Liu<sup>[107]</sup> 利用 Gross-Pitaevskii 方程研究了自旋-轨道耦合作用和梯度磁场对旋转两分量 BEC 基态的影响. 研究表明, 在梯度磁场中, 随着自旋-轨道耦合强度增大, 基态结构由 skyrmion 格子逐渐过渡为沿着对角线方向排列的 skyrmion 列. 当自

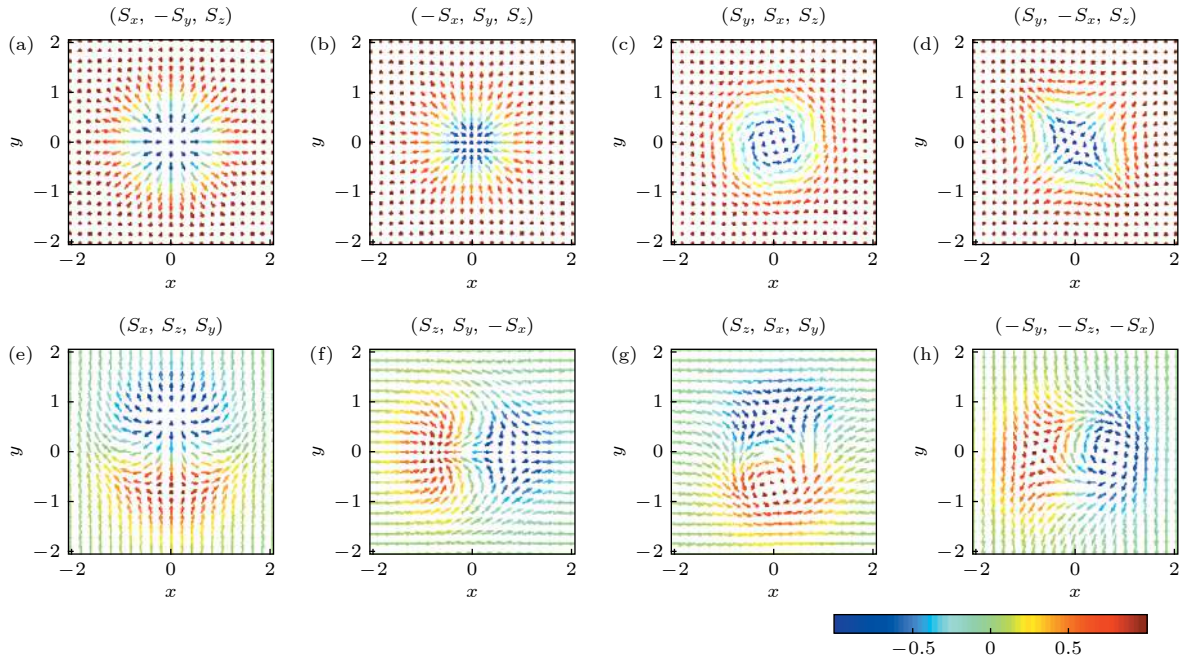


图9 Skyrmons 的类型 ( $\lambda = 0.5$ )<sup>[99]</sup> (a)–(h) 表示自旋矢量的模式: (a) 径向-向外 skyrmion, (b) 径向-向内 skyrmion, (c) 环形 skyrmion, (d) 双曲 skyrmion, (e) 双曲-径向向外 skyrmion, (f) 双曲-径向向内 skyrmion, (g) 环形-双曲 skyrmion-I, (h) 环形-双曲 skyrmion-II

Fig. 9. Configuration of the skyrmion where  $\lambda = 0.5$ : The (a)–(h) figures indicate the mode of the spin vectors: (a) radial-out skyrmion, (b) radial-in skyrmion, (c) circular skyrmion, (d) hyperbolic skyrmion, (e) hyperbolic-radial(out) skyrmion, (f) hyperbolic-radial (in) skyrmion, (g) circular-hyperbolic skyrmion-I, and (h) circular-hyperbolic skyrmion-II<sup>[99]</sup>.

旋-轨道耦合强度和旋转频率都小的情况, 磁场梯度的增强可导致基态由平面波相转变为 half-skyrmion; 当自旋-轨道耦合强度和旋转频率都大的情况, 梯度磁场可诱导 hidden 涡旋的产生. 图 10 为不同自旋-轨道耦合强度下梯度磁场中两分量  $^{87}\text{Rb}$ BEC 基态粒子数密度分布和相位分布.

#### 4.2 三分量旋量玻色-爱因斯坦凝聚体中的拓扑缺陷研究

对于自旋  $F = 1$  的旋量三分量 BEC, 原子可能占据的塞曼态有  $|1, 1\rangle$ ,  $|1, 0\rangle$ ,  $|1, -1\rangle$  三种, 体系内会出现两种类型基态相——磁相和晶列相, 依赖于自旋无关相互作用和自旋相关相互作用.

实验上 2001 年 Raghavan 等<sup>[108]</sup> 通过静态直流磁场在三分量旋量 BEC 中产生了暗孤子和涡旋结构. 2002 年 Ogawa 等<sup>[109]</sup> 采用四极磁场将自旋 1BEC 限制在 Ioffe-Pritchard 势阱中, 发现在凝聚体中产生了涡旋. 2006 年 Itin 等<sup>[110]</sup> 研究了自旋 1BEC 在一对载流线和偏置磁场控制的双磁阱中产生涡旋的几种机制, 图 11 为凝聚体快速分裂过程中涡旋的动力学形成, 显示动态涡旋存在于凝聚体的所有分量中, 在  $\psi_{-1}$  分量中占 99% 以上, 在

$\psi_0$  分量中动态涡旋和拓扑涡旋共存. 2014 年, Ray 等<sup>[80,81]</sup> 在自旋 1BEC 中借助梯度磁场, 观察到了狄拉克磁单极子, 图 12 为狄拉克磁单极子的实验产生过程, 显示了凝聚体中不同自旋组分中的粒子密度随  $B_{z,f}$  的减小而减小.

理论上 2002 年 Isoshima 和 Machida<sup>[111]</sup> 在旋转外势下, 采用推广的 Bogoliubov 理论研究了自旋 1BEC 中各种轴对称涡旋的稳定结构. 同年 Mizushima 等<sup>[112]</sup> 通过求解广义 Gross-Pitaevskii 方程研究了旋转条件下铁磁自旋 1BEC 中的 Mermin-Ho 和 Anderson-Toulouse 无核涡旋, 得到在铁磁情况下, Mermin-Ho 涡旋是稳定的. 2006 年 Saito 等<sup>[113,114]</sup>, 以及 2009 年 Turner<sup>[115]</sup> 研究了铁磁自旋 1BEC 中的极核涡旋, 发现系统核心由  $m_F = 0$  原子填充, 围绕涡旋有  $m_F = 1$  分量的质量流, 以及  $m_F = -1$  分量的相等但自旋相反的质量流, 这就产生了净自旋流, 但没有净质量流. 2007 年 Mottonen 等<sup>[116]</sup> 研究了非旋转条件下在三维抛物势与 Ioffe-Pritchard 场中的自旋 1 铁磁态旋量 BEC 中无核涡旋的能量和动力学稳定性.

2008 年 Ji 等<sup>[117]</sup> 研究了自旋 1 钠原子 BEC 中半量子涡旋的动态生成. 模拟结果表明, 在外加

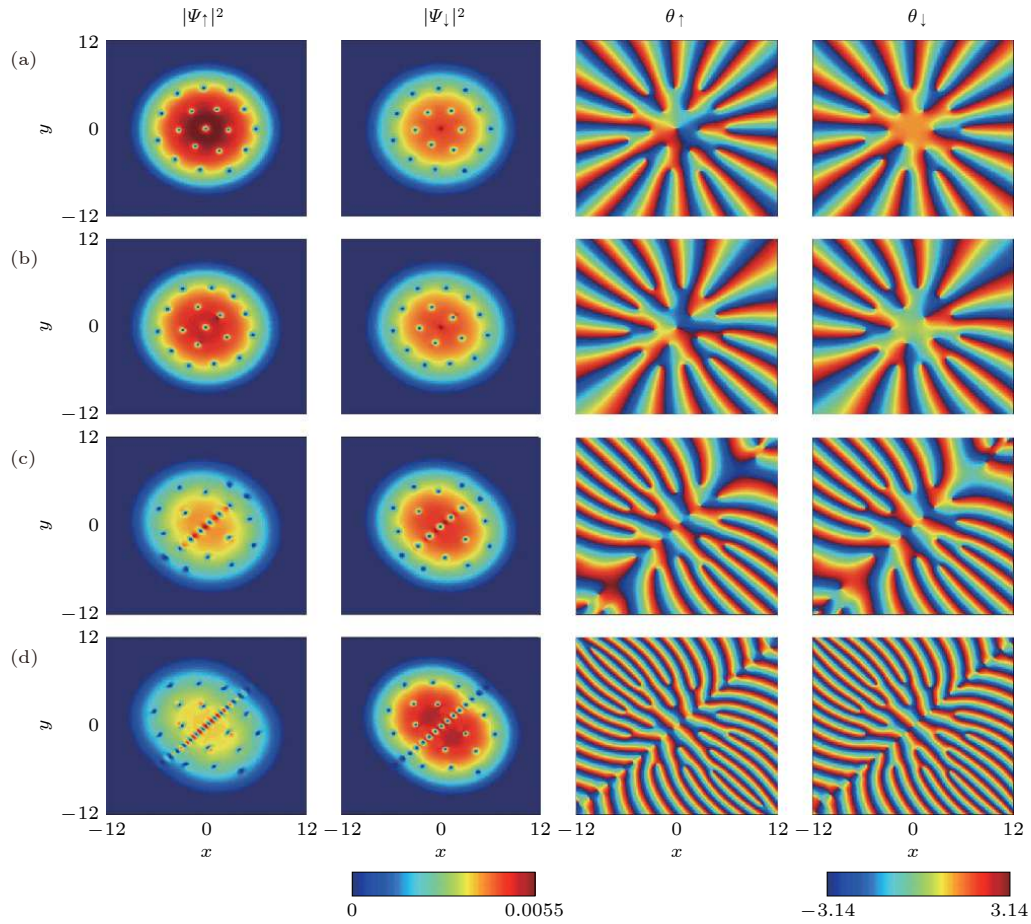


图 10 不同自旋-轨道耦合强度下梯度磁场中两分量<sup>87</sup>RbBEC 基态粒子数密度分布 (第 1、2 列) 和相位分布 (第 3、4 列)<sup>[107]</sup> (a)–(d) 的  $\tilde{\kappa}$  值分别为 0, 0.2, 0.8, 2

Fig. 10. Particle number densities (the first and second columns) and phase distributions (the third and fourth columns) of ground state of the two-component BEC of <sup>87</sup>Rb for the different spin-orbit coupling strengths: the parameters of  $\tilde{\kappa}$  in (a)–(d) are 0, 0.2, 0.8, 2, respectively<sup>[107]</sup>.

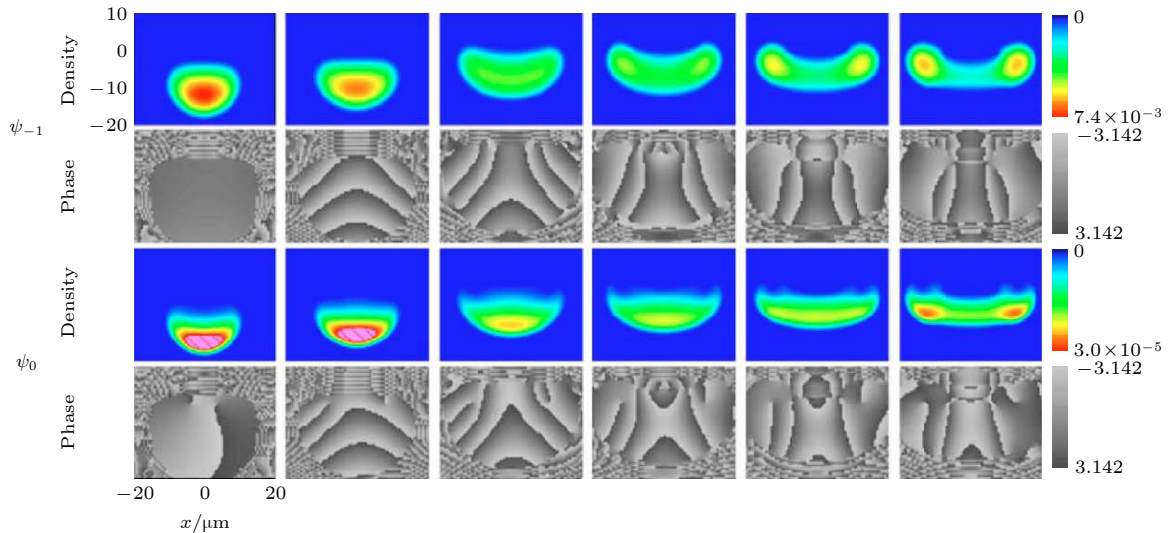


图 11 涡旋的动力学形成<sup>[110]</sup>. 涡旋形成于凝聚体的所有分量中, 在  $\psi_{-1}$  分量中占 99% 以上, 在  $\psi_0$  分量中动态涡旋和拓扑涡旋共存  
Fig. 11. Dynamical formation of vortices: vortices are formed in all components, more than 99% of total population is in  $\psi_{-1}$  component. In the  $\psi_0$  component, dynamical and topological vortices coexist<sup>[110]</sup>.

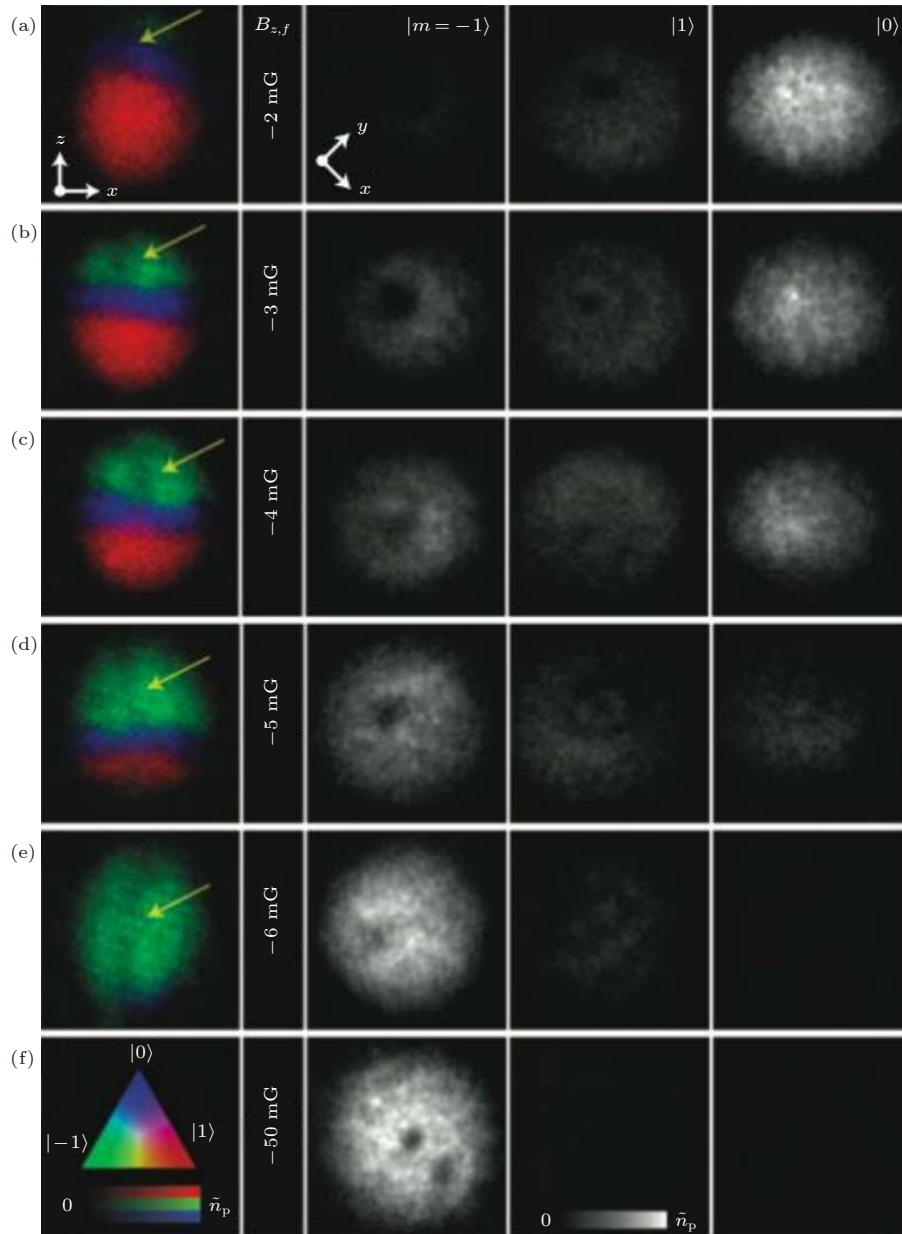


图 12 狄拉克磁单极子的实验产生<sup>[80]</sup> (a)–(f) 每一行都包含单个凝聚体的图像. 最左边的列显示了三种自旋状态  $\{|1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$  沿水平轴的柱状密度彩色图像; 最右边三列显示沿纵轴拍摄的图像

Fig. 12. Experimental creation of Dirac monopoles. Each row (a)–(f) contains images of an individual condensate. The leftmost column shows colour composite images of the column densities taken along the horizontal axis for the three spin states  $\{|1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$ ; The rightmost three columns show images taken along the vertical axis<sup>[80]</sup>.

脉冲磁捕获势的情况下, 旋转光势阱中可以同时产生独立的半量子涡旋和涡旋晶格, 同时还发现, 一个明显的周期调制的自旋密度波空间结构总是嵌入在方形半量子涡旋晶格中. 2012年 Liu 和 Liu<sup>[118]</sup> 研究了旋转和快速淬火的自旋 1BEC 中由自旋-轨道耦合引起的半 skyrmion 激发, 给出了描述半 skyrmion 自旋矢量的三个表达式. 结果表明, 半 skyrmion 激发依赖于自旋-轨道耦合和旋转的结合, 当自旋-轨道耦合强度和旋转频率均大于某

些临界值时, 半 skyrmion 由一个或几个圆包围中心, 形成径向晶格, 即使在强铁磁 (或反铁磁) 凝聚体中也会发生. 图 13 为旋转频率对  $^{23}\text{Na}$  旋量 BEC 自旋纹理的影响.

2013年 Liu 等<sup>[119]</sup> 利用阻尼映射 Gross-Pitaevkii 方程, 研究了二维体系中自旋-轨道耦合的  $^{23}\text{Na}$  自旋 1BEC 中的涡旋斑图, 研究发现较弱的自旋-轨道耦合可以完全破坏不考虑自旋-轨道耦合情况下出现的周期性涡旋晶格; 在自旋-轨道耦

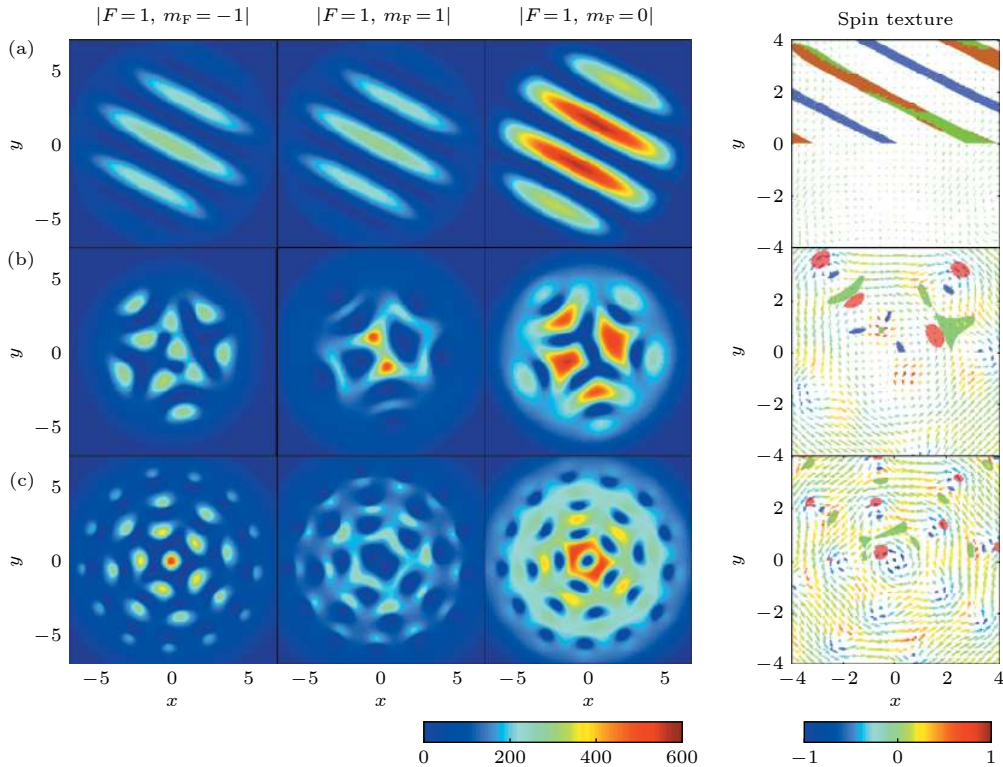


图 13 旋转频率对 $^{23}\text{Na}$ 旋量 BEC 的影响<sup>[118]</sup>, 其中  $\mu_{j,0}$  ( $j = 0, \pm 1$ ) =  $3.6 \hbar\omega$ ,  $\mu = 25 \hbar\omega$ ,  $\kappa_x = \kappa_y = \kappa_z = 1$ ,  $a_0 = 50 a_B$ , and  $a_2 = 55 a_B$ . (a)  $\Omega = 0$ ; (b)  $\Omega = 0.2 \omega$ ; (c)  $\Omega = 0.5 \omega$ . 第四列显示了相应的自旋纹理和涡旋的位置

Fig. 13. The effect of rotation frequency for spinor BEC of  $^{23}\text{Na}$  with  $\mu_{j,0}$  ( $j = 0, \pm 1$ ) =  $3.6 \hbar\omega$ ,  $\mu = 25 \hbar\omega$ ,  $\kappa_x = \kappa_y = \kappa_z = 1$ ,  $a_0 = 50 a_B$ , and  $a_2 = 55 a_B$ ; (a)  $\Omega = 0$ ; (b)  $\Omega = 0.2 \omega$ ; (c)  $\Omega = 0.5 \omega$ . The fourth column shows the corresponding spin textures and the positions of the vortices<sup>[118]</sup>.

合较强的情况下, 各自旋态的涡旋易形成涡旋组, 并绕凝聚体中心形成花瓣状涡旋斑图. 2014 年 Song 等<sup>[120]</sup> 利用精确对角化和平均场理论研究了弱相互作用的自旋-轨道耦合自旋 1 玻色气体在外谐波势阱中的碎裂问题, 研究发现这种碎裂倾向源于总角动量守恒, 且受自旋-轨道耦合强度和自旋相关相互作用的影响. Lovegrove 等<sup>[121]</sup> 将铁磁态无核涡旋通过相位植入法, 在极化态凝聚体中得到了混合态下稳定的无核涡旋. 2015 年 Zhao 等<sup>[122]</sup> 在自旋 1BEC 中解析得到了两种不均匀的自旋畴构型, 它们分别由正二次塞曼效应和负二次塞曼效应所致. 分析表明, 二次塞曼效应可以诱导自旋畴的动态相变, 其符号可以影响自旋模式的拓扑结构. 2016 年, Gautam 和 Adhikari<sup>[123]</sup> 对零磁化强度的自旋 1 和自旋 2 旋量 BEC 中的分数涡旋进行分类, 并利用精确的数值解和拉格朗日变分近似研究了准二维旋量 BEC 中涡旋的静力学和动力学性质.

2017 年 Liu 等<sup>[124]</sup> 通过虚实演化方法研究了具有面内四极磁场自旋 1 的旋量 BEC 的基态结

构. 研究发现, 面内四极磁场和旋转双重作用可导致中央 Mermin-Ho 涡旋的产生; 随着磁场梯度增强, Mermin-Ho 涡旋周围环绕的涡旋趋向对称化排布; 在四极磁场下, 密度相互作用和自旋交换相互作用作为体系的调控参数, 可以控制 Mermin-Ho 涡旋周围的涡旋数目. Li 等<sup>[125]</sup> 研究了铁磁自旋 1BEC 中由自旋-轨道耦合引起具有极核旋涡的狄拉克磁单极子, 随着自旋-轨道耦合强度的增加, 具有极核旋涡的狄拉克磁单极子可以转化为正方形晶格. 在自旋-轨道耦合确定的情况下, 增大相互作用强度可引起从具有极核旋涡的狄拉克磁单极子向具有 Mermin-Ho 涡旋的循环相变. 图 14 显示了具有 Mermin-Ho 涡旋的磁单极子的形成.

## 5 总结与展望

1998 年 Ketterle 研究组首次在自旋为 1 的  $^{23}\text{Na}$  原子系统中实现了 BEC, 为冷原子物理开辟了旋量 BEC 的研究领域. 尤其是在超冷原子气体中人造自旋-轨道耦合的实验实现, 为研究拓扑量

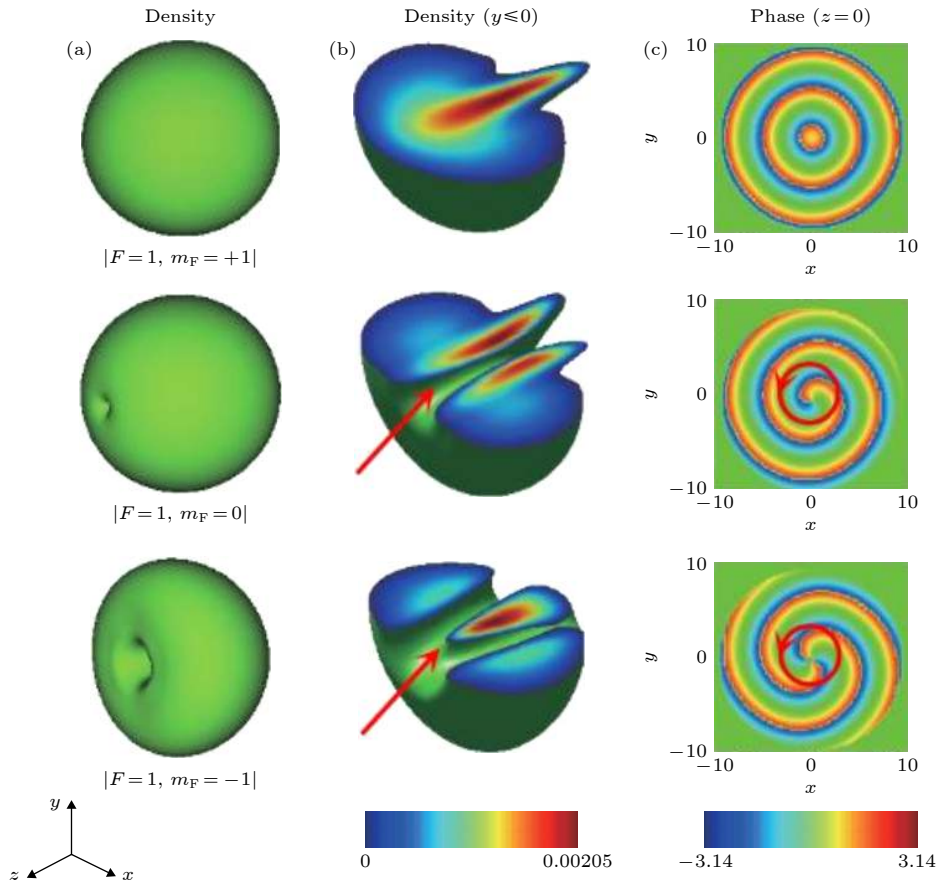


图 14 具有 Mermin-Ho 涡旋的磁单极子<sup>[125]</sup> (a) 等值面的粒子数密度; (b) 粒子数密度等深线段 ( $y \leq 0$ ), 节点线 (Dirac 线) 的位置用红色箭头突出显示; (c)  $z=0$  平面上的位相分布. 单涡旋 ( $m_F = 0$ ) 和双涡旋 ( $m_F = -1$ ) 具有相同的环流, 由红圈突出显示

Fig. 14. The monopoles with the Mermin-Ho vortex: (a) Isosurface of particle densities; (b) segments of isosurface of particle densities ( $y \leq 0$ ), the position of the nodal line (Dirac string) is highlighted by the red arrow; (c) phase distributions in the  $z = 0$  planes. the single vortex ( $m_F = 0$ ) and double vortex ( $m_F = -1$ ) have the same circulations, as highlighted by the red circles<sup>[125]</sup>.

子态提供了一个理想的实验平台. 本文综述了旋量 BEC 的实验和理论研究, 旋量 BEC 中产生的拓扑缺陷的种类, 如自旋畴壁、涡旋、磁单极子、skyrmion、扭结, 着重介绍了两分量和三分量旋量 BEC 中拓扑缺陷的研究进展. 今后的工作可以推广到具有高自旋 BEC 体系, 以及不同自旋-轨道耦合形式的玻色气体等, 如 Rashba 自旋-轨道耦合和旋转势作用下的铁磁自旋 2BEC 中新奇的拓扑结构研究. 此外, 在冷原子平台上研究具有长程相互作用的拓扑缺陷也是未来的一个方向, 以及通过研究自旋-轨道耦合旋量 BEC 的动力学行为, 并从非平衡过程中来观察一些拓扑结构, 如冯卡门涡街和量子扭结, 也是非常有意义的工作.

### 参考文献

[1] Coen S, Haelterman M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 140401  
 [2] Williams J E, Holland M J 1999 *Nature* **401** 568

[3] Abo-Shaeer J R, Raman C, Vogels J M, Ketterle W 2001 *Science* **292** 476  
 [4] Leanhardt A E, Shin Y, Kielpinski D, Pritchard D E, Ketterle W 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 140403  
 [5] Sadler L E, Higbie J M, Leslie S R, Vengalattore M, Stamper-Kurn D M 2006 *Nature* **443** 312  
 [6] Alan L M, John V P, William D P 1985 *Phys. Rev. Lett.* **54** 2596  
 [7] Reichel J, Hansel W, Hansch T W 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 3398  
 [8] Wolfgang P, Michael H A, Jason R E 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 3352  
 [9] Pethick C, Smith H 2008 *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (UK: Cambridge Univ. Press) p569-584  
 [10] Pitaevskii L, Stringari S 2002 *Bose-Einstein Condensation*(Oxford: Clarendon Press)p382-395  
 [11] Stenger J, Stamper-Kurn D M, Andrews M R, Chikkatur A P, Inouye S, Miesner H J, Ketterle W 1998 *J. Low Temp. Phys.* **113** 167  
 [12] Bloch I, Dali bard J, Zwerger W 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 885  
 [13] Stenger J, Inouye S, Stamper-Kurn D M, Miesner H-J, Chikkatur A P, Ketterle W 1988 *Nature* **336** 345  
 [14] Kawaguchi Y, Ueda M 2012 *Phys. Rep.* **520** 253  
 [15] Weiler C N, Neely T W, Scherer D R, Bradley A S, Davis M

- J, Anderson B P 2008 *Nature* **455** 948
- [16] Stamper-Kurn D M, Andrews M R, Chikkatur A P, Inouye S, Miesner H-J, Stenger J, Ketterle W 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2027
- [17] Barrett M D, Sauer J A, Chapman M S 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 010404
- [18] Gustavson T L, Lehar A E, Chikkatur A P 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 090401
- [19] Chang M S, Hamley C D, Barrett M D 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 140403
- [20] Schmaljohann H, Erhard M, Kronjäger J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 040402
- [21] Kuwamoto T, Araki K, Eno T 2004 *Phys. Rev. A* **69** 063604
- [22] Pasquiou B, Marechal E, Vernac L 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 045307
- [23] Lin Y J, Jimenez G K, Spielman I B 2011 *Nature* **471** 83
- [24] Galitski V, Spielman I B 2013 *Nature* **494** 49
- [25] Dalibard J, Gerbier F, Juzeliunas G, Ohberg P 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1523
- [26] Zhai H 2012 *Int. J. Mod. Phys. B* **26** 1230001
- [27] Goldman N, Juzeliunas G, Ohberg P, Spielman I B 2014 *Rep. Prog. Phys.* **77** 126401
- [28] Zhang J Y, Ji S C, Chen Z, Zhang L, Du Z D, Yan B, Pan G S, Zhao B 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 115301
- [29] Wang P J, Yu Z Q, Fu Z K, Miao J, Huang L H 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095301
- [30] Cheuk L W, Sommer A T, Hadzibabic Z, Yefsah T, Bakr W S, Zwierlein M W 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095302
- [31] Liao R, Huang Z G, Lin X M, Fialko O 2014 *Phys. Rev. A* **89** 063614
- [32] Bhat I A, Mithun T, Malomed B A, Porsezian K 2015 *Phys. Rev. A* **92** 063606
- [33] Hu F Q, Wang J J, Yu Z F, Zhang A X, Xue J K 2016 *Phys. Rev. E* **93** 022214
- [34] Li Y, Pitaevskii L P, Stringari S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 225301
- [35] Qu C, Hammer C, Gong M, Zhang C, Engels P 2013 *Phys. Rev. A* **88** 021604
- [36] Leblanc L J, Beeler M C, Garcia K J, Perry A R, Sugawa S, Williams R A, Spielman I B 2013 *New J. Phys.* **15** 073011
- [37] Beeler M C, Williams R A, Garcia K J, LeBlanc L J, Perry A R, Spielman I B 2013 *Nature* **498** 201
- [38] Kennedy C J, Siviloglou G A, Miyake H, Burton W C, Ketterle W 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 225301
- [39] Liu X J, Law K T, Ng T K 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 086401
- [40] Gong M, Tewari S, Zhang C 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 195303
- [41] Ho T L 1988 *Phys. Rev. Lett.* **81** 742
- [42] Ohmi T, Machida K 1998 *J. Phys. Soc. Jpn.* **67** 1822
- [43] Law C K, Pu H, Bigelow N P 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 5257
- [44] Koashi M, Ueda M 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 1066
- [45] Ueda M, Koashi M 2002 *Phys. Rev. A* **65** 063602
- [46] Ciobanu C V, Yip S K, Ho T L 2000 *Phys. Rev. A* **61** 033607
- [47] Zhou F, Semenov G W 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 180411
- [48] Santos L, Pfau T 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 190404
- [49] Diener R B, Ho T L 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 190405
- [50] Makela H, Suominen K A 2007 *Phys. Rev. A* **75** 033610
- [51] Yip S K 2007 *Phys. Rev. A* **75** 023625
- [52] Li J 2018 *Ph.D. Dissertation* (Beijing: Chinese Academy of Sciences) (in Chinese) [李吉 2018 博士学位论文 (北京: 中国科学院大学)]
- [53] Jin J J 2014 *Ph. D. Dissertation* (Taiyuan: Shanxi University) (in Chinese) [靳晶晶 2014 博士学位论文 (太原: 山西大学)]
- [54] Modugno G, Modugno M, Riboli F, Roati G, Inguscio M 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 19040
- [55] Papp S B, Pino J M, Wieman C E 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 040402
- [56] Schweikhard V, Coddington I, Engels P, Tung S, Cornell E A 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 210403
- [57] Leslie L S, Hansen A, Wright K C, Deutsch B M, Bigelow N P 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 250401
- [58] Matthews M R, Anderson B P, Haljan P C, Hall D S, Wieman C E, Cornell E A 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 2498
- [59] Zhou F 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 080401
- [60] Yip S K 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 4677
- [61] Leonhardt U, Volovik G E 2000 *JETP Lett.* **72** 46
- [62] Isoshima T, Machida K, Ohmi T 2001 *J. Phys. Soc. Jpn.* **70** 1604
- [63] Makela H, Zhang Y, Suominen K A 2003 *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** 8555
- [64] Semeno G W, Zhou F 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 100401
- [65] Kobayashi M, Kawaguchi Y, Nitta M, Ueda M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 115301
- [66] Stoof H T C, Vliegen E, Khawaja U A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 120407
- [67] Blaha S 1976 *Phys. Rev. Lett.* **36** 874
- [68] Ruostekoski J, Anglin J R 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 190402
- [69] Shankar R 1977 *J. Phys.* **38** 1405
- [70] Volovik G E, Mineev V P 1976 *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **23** 647
- [71] Khawaja U A, Stoof H 2001 *Nature* **411** 918
- [72] Kawaguchi Y, Nitta M, Ueda M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 180403
- [73] Jin J J, Zhang S Y, Han W 2011 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **44** 165302
- [74] Liu J S 2017 *Ph.D. Dissertation* (Beijing: Chinese Academy of Sciences) (in Chinese) [刘静思 2017 博士学位论文 (北京: 中国科学院大学)]
- [75] Eto M, Kasamatsu K, Nitta M, Tsuchi H, Tsubota M 2011 *Phys. Rev. A* **83** 063603
- [76] Volovik G E 2000 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **97** 2431
- [77] Liu C F, Liu W M 2017 *Opt. Exp.* **25** 32800
- [78] Huhtamäki J A M, Simula T P, Kobayashi M 2009 *Phys. Rev. A* **80** 051601
- [79] Fert A, Cros V, Sampaio J 2013 *Nature Nanotech.* **8** 152
- [80] Ray M W, Ruokokoski E, Kandel S, Möttönen M, Hall D S 2014 *Nature* **505** 657
- [81] Ray M W, Ruokokoski E, Tiurev K, Möttönen M, Hall D S 2015 *Science* **348** 544
- [82] Ruostekoski J, Anglin J R 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3934
- [83] Kawakami T, Mizushima T, Nitta M, Machida K 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 015301
- [84] Stamper-Kurn D M, Ueda M 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 1191
- [85] Choi J Y, Kwon W J, Shin Y I 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 035301
- [86] Hall D S, Matthews M R, Ensher J R, Wieman C E, Cornell E A 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 1539
- [87] Madison K W, Chevy F, Wohlleben W, Dalibard J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 806
- [88] Anderson B P, Haljan P C, Regal C A, Feder D L, Collins L A, Clark C W, Cornell E A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2926
- [89] Hall D S, Ray M W, Tiurev K, Ruokokoski E, Gheorghie A H, Möttönen M 2016 *Nat. Phys.* **12** 478



- [90] Leanhardt A E, Gorlitz A, Chikkatur A P 1999 *Phys. Rev. Lett.* **89** 190403
- [91] Battye R A, Cooper N R, Sutcliffe P M 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 080401
- [92] Martikainen J P, Collin A, Suominen K A 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 090404
- [93] Kasamatsu K, Tsubota M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 100402
- [94] Wang C J, Cao C, Jian C M, Zhai H 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 160403
- [95] Sinha S, Nath R, Santos L 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 270401
- [96] Hu H, Ramachandhran B, Pu H, Liu X J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 010402
- [97] Xu X Q, Han J H 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 200401
- [98] Zhou X F, Zhou J, Wu C J 2011 *Phys. Rev. A* **84** 063624
- [99] Liu C F, Fan H, Zhang Y C, Wang D S, Liu W M 2012 *Phys. Rev. A* **86** 053616
- [100] Wang X, Tan R B, Du Z J, Zhao W Y, Zhang X F, Zhang S G 2014 *Chin. Phys. B* **23** 070308
- [101] Fetter A L 2014 *Phys. Rev. A* **89** 023629
- [102] Sakaguchi H, Umeda K 2016 *J. Phys. Soc. Jpn.* **85** 064402
- [103] Sakaguchi H 2017 *Phys. Rev. A* **96** 043620
- [104] Wang H, Wen L H, Yang H, Shi C X, Li J H 2017 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **50** 155301
- [105] Kato M, Zhang X F, Saito H 2017 *Phys. Rev. A* **95** 043605
- [106] Shi C X, Wen L H, Wang Q B, Yang H, Wang H 2018 *J. Phys. Soc. Jpn.* **87** 094003
- [107] Li J, Liu W M 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 110302 (in Chinese) [李吉, 刘伍明 2018 物理学报 **67** 110302]
- [108] Pu H, Raghavan S, Bigelow N P 2001 *Phys. Rev. A* **63** 063603
- [109] Ogawa S I, Möttöen M, Nakahara M, Ohmi T, Shimada H 2002 *Phys. Rev. A* **66** 013617
- [110] Itin A P, Morishita T, Satoh M, Tolstikhin O I, Watanabe S 2006 *Phys. Rev. A* **73** 063615
- [111] Isoshima T, Machida K 2002 *Phys. Rev. A* **66** 053610
- [112] Mizushima T, Machida K, Kita T 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 030401
- [113] Saito H, Kawaguchi Y, Ueda M 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 065302
- [114] Saito H, Kawaguchi Y, Ueda M 2007 *Phys. Rev. A* **75** 013621
- [115] Turner A M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 080603
- [116] Pietila V, Möttöen M, Virtanen S M 2007 *Phys. Rev. A* **76** 023610
- [117] Ji A C, Liu W M, Song J L, Zhou F 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 010402
- [118] Liu C F, Liu W M 2012 *Phys. Rev. A* **86** 033602
- [119] Liu C F, Wan W J, Zhang G Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 200306 (in Chinese) [刘超飞 万文娟 张赣源 2013 物理学报 **62** 200306]
- [120] Song S W, Zhang Y C, Zhao H, Wang Xuan, Liu W M 2014 *Phys. Rev. A* **89** 063613
- [121] Lovegrove J, Borgh M O, Ruostekoski 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 075301
- [122] Zhao D, Song S W, Wen L, Li Z D, Luo H G, Liu W M 2015 *Phys. Rev. A* **91** 013619
- [123] Gautam S, Adhikari S K 2016 *Phys. Rev. A* **93** 013630
- [124] Liu J S, Li J, Liu W M 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 130305 (in Chinese) [刘静思 李吉 刘伍明 2017 物理学报 **66** 130305]
- [125] Li J, Yu Y M, Zhuang L, Liu W M 2017 *Phys. Rev. A* **95** 043633

SPECIAL TOPIC—Nonlinear physics

## The research progress of topological properties in spinor Bose-Einstein condensates\*

Wang Li<sup>1)</sup> Liu Jing-Si<sup>2)</sup> Li Ji<sup>3)</sup> Zhou Xiao-Lin<sup>4)</sup> Chen Xiang-Rong<sup>1)</sup>  
Liu Chao-Fei<sup>5)†</sup> Liu Wu-Ming<sup>6)7)‡</sup>

1) (*College of Physics, Sichuan University, Chengdu 610065, China*)

2) (*Beijing Jingshan School Chaoyang Branch School, Beijing 100012, China*)

3) (*College of Physics, Taiyuan Normal University, Jinzhong, 030619, China*)

4) (*School of Physics and Electronic engineering, Sichuan Normal University, Chengdu 610101, China*)

5) (*School of Science, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China*)

6) (*Beijing National Laboratory for Condensed Matter Physics, Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

7) (*School of Physical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

( Received 28 October 2019; revised manuscript received 2 December 2019 )

### Abstract

Most of the atoms that realize Bose-Einstein condensation have internal spin degree of freedom. In the optical potential trap, the internal spin of the atom is thawed, and the atom can be condensed into each hyperfine quantum state to form the spinor Bose-Einstein condensate. Flexible spin degrees of freedom become dynamic variables related to the system, which can make the system appear novel topological quantum states, such as spin domain wall, vortex, magnetic monopole, skyrmion, and so on. In this paper, the experimental and theoretical study of spinor Bose-Einstein condensation, the types of topological defects in spinor Bose-Einstein condensate, and the research progress of topological defects in spinor two-component and three-component Bose-Einstein condensate are reviewed.

**Keywords:** spinor Bose - Einstein condensation, spin domain wall, vortex, magnetic monopole, skyrmion

**PACS:** 03.75.Lm, 03.75.Hh, 03.75.Nt, 05.30.Jp

**DOI:** 10.7498/aps.69.20191648

\* Project supported by the NKRD, China (Grant No. 2016YFA0301500) and the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11434015, 61835013, 11875149, 61565007).

† Corresponding author. E-mail: [liuchaofei0809@163.com](mailto:liuchaofei0809@163.com)

‡ Corresponding author. E-mail: [wmliu@iphy.ac.cn](mailto:wmliu@iphy.ac.cn)