

专题：非线性物理

## 离散可积系统：多维相容性\*

张大军†

(上海大学数学系, 上海 200444)

(2019年10月28日收到; 2019年11月14日收到修改稿)

对比已有完善而系统理论的微分方程领域, 差分方程理论尚处于发展之中. 近年来离散可积理论的进展, 带来了差分方程理论的革命. 多维相容性是伴随离散可积系统研究出现的新的概念, 作为对离散可积性的一种理解, 提供了构造离散可积系统的 Bäcklund 变换、Lax 对和精确解的工具. 本文旨在综述多维相容性的概念及其在离散可积系统研究中的应用.

关键词：离散可积系统, 多维相容性

PACS: 02.30.Ik, 05.45.Yv

DOI: 10.7498/aps.69.20191647

## 1 引言

离散系统泛指含有离散自变量的常差分、微分差分、偏差分系统、以及变换和映射等. 由于缺少导数、积分等局部化的数学工具, 对于非线性离散系统的研究, 往往伴随着新的数学概念、理论和方法的出现.

现代可积理论兴起于 20 世纪 60 年代中期孤立子的命名<sup>[1]</sup>、反散射变换方法的建立<sup>[2]</sup>和 Lax 对概念的提出<sup>[3]</sup>, 参见文献<sup>[4]</sup>. 早期对离散可积系统的探索主要是可积离散化, 早在 20 世纪 70 年代: Case 和 Kac<sup>[5]</sup>对 Schrödinger 谱问题的离散以及 Ablowitz 和 Ladik<sup>[6-8]</sup>对 Ablowitz-Kaup-Newell-Segur(AKNS) 谱问题的离散 建立了基于差分的反散射变换过程; Hirota<sup>[9-11]</sup>对双线性方程的离散利用双线性 Bäcklund 变换与 Lax 对的联系获得了一系列离散可积系统. 进入 80 年代后, 对离散可积系统的研究逐渐向形成独立于连续系统的研究方法, 系统进展有: 京都学派 Date 等<sup>[12-16]</sup>和 Ueno 等<sup>[17]</sup>对 Sato 理论的离散; 荷兰学者 Nijhoff

等<sup>[18-22]</sup>和 Quispel 等<sup>[23]</sup>基于 Fokas 和 Ablowitz<sup>[24]</sup>的直接线性化格式以及 Levi 和 Benguria<sup>[25]</sup>的变换与离散的同等性认识发展起来的构造和研究离散可积系统的系统方法. 进入 90 年代以后, 离散可积系统的显著进展包括: 超离散可积系统的提出及其连续极限的建立<sup>[26,27]</sup>, 基于奇点囿禁的奇点理论与可积性的联系的发现<sup>[28,29]</sup>, 奇点囿禁在可积性判别上的不充分性的发现<sup>[30]</sup>, 以及基于代数熵理论对可积性的判别<sup>[31]</sup>. 这些进展相继推动了超离散可积系统、离散 Painlevé 方程、可积性检验等方面的发展.

进入新世纪后, 离散可积系统继续迎来新的发展. Sakai<sup>[32]</sup>基于有理曲面理论和 Blow-up 分析对离散 Painlevé 方程的分类, 揭示了离散 Painlevé 方程丰富的代数几何结构, Bobenko 和 Suris<sup>[33]</sup>、Adler 等<sup>[34]</sup>和 Nijhoff 等<sup>[35,36]</sup>学者对于“多维相容性”的理解以及对若干离散可积系统的分类, 各种精确求解方法 在离散可积系统中相继实现<sup>[37-45]</sup>, 等等, 一系列进展标志着对离散可积系统的研究进入到一个新的阶段. 2009 年在著名的英国剑桥牛顿所 (The Isaac Newton Institute for

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11875040, 11631007) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: djzhang@staff.shu.edu.cn

Mathematical Sciences) 举办的为期半年的离散可积系统主题研讨活动, 是对当时离散可积系统蓬勃发展的一个反映.

可积系统与数学和物理的众多分支都有联系, 已经渗透到数学物理的各个领域<sup>[4]</sup>. 在数学方面, 离散可积系统的发展伴随着离散几何和离散复分析的发展, 这与连续意义下可积系统丰富的几何背景以及分析的工具在其研究中的重要作用是分不开的. 对与离散可积系统相关的差分算子理论与复分析方面的研究, 如势函数的渐近性、散射理论、Riemann-Hilbert 问题、解的长时间渐近分析、初边值问题等等, 建议参考文献 [42,46]. 除了提及的上述进展, 还有如离散几何、对称理论、Galois 理论、Lagrangian 多形式理论等许多方面的重要进展. 值得指出的是, 最近由 Hietarinta, Joshi 和 Nijhoff<sup>[47]</sup>完成的一部专著《Discrete Systems and Integrability》已经出版. 读者可以参考了解其更多内容. 国际上每两年一届的 SIDE 会议 (Symmetries and Integrability of Difference Equations) 是离散可积系统及其相关问题的首要国际会议, 1994 年始于加拿大 Montreal, 至今已经成功举办 13 届, 其中 SIDE-10 于 2012 年在我国宁波召开.

本文将在第二、三节重点介绍多维相容性的概念及其应用. 希望通过具体的例子让更多读者了解离散可积系统及其中的概念和方法.

## 2 多维相容性

离散可积系统从未独立于连续系统. 下面首先来介绍两种引入离散变量的途径.

### 2.1 离散变量的引入

离散化是引入离散变量的方式之一. 从熟悉的 AKNS 谱问题开始:

$$\Phi_x = M\Phi, \quad M = \begin{pmatrix} \eta & u \\ v & -\eta \end{pmatrix}, \quad \Phi = (\phi_1, \phi_2)^T, \quad (1)$$

其中  $u = u(x, t)$ ,  $v = v(x, t)$ ,  $\eta$  是谱参数, 为了方便, 记  $M = M(\eta, U)$ ,  $U = (u, v)^T$ . 定义

$$\Phi_{n+j} = \Phi(x + j\epsilon), \quad (2)$$

然后利用差分  $(\Phi_{n+1} - \Phi_n)/\epsilon$  替代导数  $\Phi_x$ , 得到

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 + \epsilon\eta & \epsilon u \\ \epsilon v & 1 - \epsilon\eta \end{pmatrix} \Phi_n, \\ \Phi_n &= (\phi_{1,n}, \phi_{2,n})^T. \end{aligned} \quad (3)$$

Ablowitz-Ladik (AL) 谱问题指<sup>[7]</sup>

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1} &= \begin{pmatrix} \lambda & Q_n \\ R_n & 1/\lambda \end{pmatrix} \Phi_n, \\ \Phi_n &= (\phi_{1,n}, \phi_{2,n})^T. \end{aligned} \quad (4)$$

在 (2) 式和

$$(Q_n, R_n) = \epsilon(u, v), \quad \lambda = e^{\epsilon\eta} \quad (5)$$

之下, 对  $\Phi_{n+1} = \Phi(x + \epsilon)$  在  $\epsilon = 0$  展开, 并取  $\epsilon \rightarrow 0$ , 则 AKNS 谱问题 (1) 式可以作为领头项从 AL 谱问题 (4) 式中恢复出来, 同时谱参数从  $\lambda$ -平面变到  $\eta$ -平面.

(2) 式是我们所熟悉的数值 (差分) 离散: 如图 1, 将区间  $[x_0, x]$  等分成  $n$  份, 步长为  $\epsilon$ . 在  $x$  点,  $\Phi_n$  与  $\Phi(x)$  仍然表示相同的数值, 但是自变量的空间已经从实数域  $\mathbb{R}$  变为整数域  $\mathbb{Z}$ . 差分离散是计算连续极限的基础, 但是对于可积系统而言, 差分离散 (也称为直接离散) 不足以保持原有系统的可积特征. 关于由 AL 谱问题 (4) 式引出的半离散 AKNS 系统, 读者可以参考文献 [48–51].

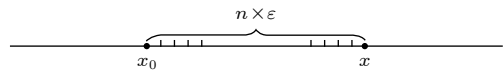


图 1  $[x_0, x]$  上的数值离散

Fig. 1. Numerical discretisation on  $[x_0, x]$ .

递推关系可以很自然地视为离散的方程. 例如 Hermite 正交多项式  $\{H_n(x)\}$  满足递推关系

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

第 I 型 Bessel 函数

$$J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2/4)^k}{k!\Gamma(\alpha + k + 1)}$$

满足方程常微分方程

$$x^2 w'' + xw' + (x^2 - \alpha^2)w = 0,$$

其中  $x$  是自变量,  $\alpha$  是参数. 由此方程可以建立 Bessel 函数的递推关系 (参考文献 [47] 的第 37 页)

$$x(w_{\alpha+1} + w_{\alpha-1}) - 2\alpha w_\alpha = 0,$$

此时  $x$  和  $\alpha$  互换了角色,  $x$  是参数,  $\alpha$  成为自变量. 再如, Painlevé II 方程

$$f''(t) = 2f^3 + tf - \alpha$$

的解满足递推关系

$$f_{\alpha+1}(t) = -f_{\alpha}(t) - \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{f'_{\alpha}(t) - f_{\alpha}^2(t) - \frac{t}{2}}$$

这里  $f'(t)$  表示对  $t$  的导数.

在上面 Bessel 函数和 Painlevé II 方程的解的例子中, 递推关系分别来自于两个微分方程的解之间的变换, 可以视为通过变换建立起来的解之间的叠加关系. 这是由连续系统到离散系统的常见过程. 尤其, KdV 方程的 Bäcklund 变换的非线性叠加公式提供了对 KdV 方程的完美的离散化.

对于著名的 KdV 方程,

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (6)$$

Wahlquist 和 Estabrook<sup>[52]</sup> 在 1973 年发现形如

$$(\tilde{w} + w)_x = 2\lambda - \frac{1}{2}(\tilde{w} - w)^2, \quad (7a)$$

$$(\tilde{w} - w)_t = \frac{1}{2}[(\tilde{w} - w)^3]_x - 6\lambda(\tilde{w} - w)_x - (\tilde{w} - w)_{xxx} \quad (7b)$$

的非线性 Bäcklund 变换, 其中  $w$  满足势 KdV 方程

$$w_t + 3(w_x)^2 + w_{xxx} = 0, \quad (8)$$

$u = w_x$  满足 KdV 方程 (6).

利用 Bäcklund 变换 (7a) 式可以建立 KdV 方程的解的非线性叠加公式. 首先在 (7a) 式中, 从同样的种子解  $w$  出发, 分别记由  $\lambda = \lambda_1$  和  $\lambda = \lambda_2$  引出的  $\tilde{w}$  为  $w_1$  和  $w_2$ , 即

$$(w_1 + w)_x = 2\lambda_1 - \frac{1}{2}(w_1 - w)^2, \quad (9a)$$

$$(w_2 + w)_x = 2\lambda_2 - \frac{1}{2}(w_2 - w)^2. \quad (9b)$$

接下来, 在 (7a) 式中取  $w = w_1$ ,  $\lambda = \lambda_2$ , 记  $\tilde{w} = w_{12}$ , 有

$$(w_{12} + w_1)_x = 2\lambda_2 - \frac{1}{2}(w_{12} - w_1)^2; \quad (10a)$$

取  $w = w_2$ ,  $\lambda = \lambda_1$ , 记  $\tilde{w} = w_{21}$ , 有

$$(w_{21} + w_2)_x = 2\lambda_1 - \frac{1}{2}(w_{21} - w_2)^2. \quad (10b)$$

上述过程可以描述为图 2.

可以证明  $w_{12}$  和  $w_{21}$  能够相等 (参考文献 [49]). 进一步, 从 (9) 式和 (10) 式得到

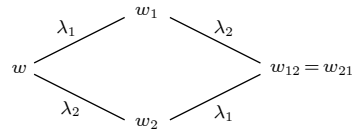


图 2 Bäcklund 变换解的交换性质

Fig. 2. Permutation property of Bäcklund transformation.

$$4(\lambda_1 - \lambda_2) = (w_1 - w_2)(w_{12} - w), \quad (11)$$

称为 (势)KdV 方程解的非线性叠加公式, 也称为 Bianchi 等式<sup>①</sup>, 还称为离散的势 KdV 方程<sup>[47]</sup>. 作为离散的方程时, (11) 式通常写为

$$(w_{n+1,m} - w_{n,m+1})(w_{n,m} - w_{n+1,m+1}) = p - q, \quad (12)$$

其中  $p$  和  $q$  分别是对应于  $n$ -方向和  $m$ -方向的方向参数.

modified KdV(mKdV) 方程

$$u_t = 6u^2u_x - u_{xxx} \quad (13)$$

和 sine-Gordon 方程

$$\theta_{xx} - \theta_{tt} = \sin \theta \quad (14)$$

拥有形式相同的非线性叠加公式 (文献 [53,54]):

$$\tan \frac{\theta_{12} - \theta}{4} = \frac{p + q}{p - q} \tan \frac{\theta_1 - \theta_2}{4}, \quad (15)$$

即

$$p \sin \frac{\theta_{12} - \theta_1 + \theta_2 - \theta}{4} = q \sin \frac{\theta_{12} + \theta_1 - \theta_2 - \theta}{4}. \quad (16)$$

此方程经过变换  $u = e^{\frac{i\theta}{2}}$  以后, 可以写为

$$p(u_{12}u_2 - u_1u) = q(u_{12}u_1 - u_2u), \quad (17)$$

此方程也称为离散势 mKdV 方程. 有意思的是, 离散的 sine-Gordon 方程形如

$$p \sin \frac{\varphi_{12} + \varphi - \varphi_1 - \varphi_2}{4} = q \sin \frac{\varphi_{12} + \varphi + \varphi_1 + \varphi_2}{4}, \quad (18)$$

由 Hirota<sup>[11]</sup> 和 Orfanidis<sup>[55]</sup> 先后得到, 与 (16) 式只有部分符号差别, 经过同样的变换  $u = e^{\frac{i\varphi}{2}}$  以后, 可以写为<sup>[18]</sup>

$$p(u_{12}u - u_1u_2) = q(uu_1u_2u_{12} - 1). \quad (19)$$

2 阶 AKNS 方程组

$$u_t = u_{xx} - 2u^2v, \quad v_t = -v_{xx} - 2v^2u \quad (20)$$

的 Bäcklund 变换的非线性叠加公式形如

$$(u_1 - u_2)(uv_{12} + 1) + (p - q)u = 0, \quad (21a)$$

<sup>①</sup>Luigi Bianchi 最早得到了 sine-Gordon 方程解的非线性叠加公式 (15) 式, 并证明了形如图 2 的解的交换性质<sup>[56,57]</sup>.

$$(v_1 - v_2)(uv_{12} + 1) - (p - q)v_{12} = 0, \quad (21b)$$

由 Konopelchenko<sup>[58]</sup> 于 1982 年获得.

Bäcklund 变换提供了引入离散变量的一种方式. (9a) 式中  $w_1$  可视为  $w$  沿一个方向上的平移, (9b) 式中  $w_2$  可视为  $w$  沿另一个方向上的平移. 非线性叠加公式 (11) 式是这两个方向上平移相容性的结果. 同时, (9a) 式作为一个独立方程, 也可视为一个微分-差分方程.

Bäcklund 变换应用于非线性模型, Darboux 变换的目标对象则是在线性层面 (Lax 对). 对于给定的连续谱问题, 存在与之相应的连续等谱发展方程族; 它的 Darboux 变换可视为一个离散的谱问题, 与原有连续谱问题之间的相容性引出的微分差分方程自然给出连续等谱发展方程族的解之间的 Bäcklund 变换. 这一漂亮的联系首先由 Levi 和 Benguria<sup>[25,59]</sup> 发现, 对于研究和理解离散可积系统具有重要意义. AKNS 谱问题 (1) 式存在如下 Darboux 变换<sup>[60]</sup>:

$$\tilde{\Phi} = T\Phi, \quad T = T(\gamma, U, \tilde{U}) = \begin{pmatrix} 2(\eta - \gamma) + u\tilde{v} & u \\ \tilde{v} & 1 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

式中  $U = (u, v)^T$ . 作为 Darboux 变换,  $\tilde{\Phi}$  满足 AKNS 谱问题 (1) 式, 即  $\tilde{\Phi}_x = \tilde{M}\Phi$ ,  $\tilde{M} = M(\eta, \tilde{U})$ , 这相当于要求 (1) 式与 (22) 式相容, 即  $(\tilde{\Phi})_x = (\tilde{\Phi}_x)$ , 由此有

$$T_x - \tilde{M}T + TM = 0, \quad (23)$$

引出的方程

$$u_x = \tilde{u} - u - u^2\tilde{v}, \quad v_x = v - v + uv^2, \quad (24)$$

可视为连续的等谱 AKNS 方程族的 Bäcklund 变换. 作为离散的谱问题, (22) 式引出一个新的半离散 AKNS 族<sup>[61,62]</sup>, 可视为微分-差分 Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程族 Lax 三重组的对称约束的结果<sup>[63]</sup>. 若考虑两个不同方向上的 Darboux 变换:

$$\tilde{\Phi} = T(p/2, U, \tilde{U})\Phi, \quad \hat{\Phi} = T(q/2, U, \hat{U})\Phi, \quad (25)$$

作为离散的 Lax 对, 其相容性得到方程 (21), 且在适当的连续极限下, (21) 式引出 (20) 式 (参考文献 [43]). 显然, 由 Darboux 变换作为 Lax 对引出的 4 点方程  $Q(U, \tilde{U}, \hat{U}, \tilde{\hat{U}}; p, q) = 0$  即为 4 个解之间的非线性叠加公式. 更多的关于 Darboux 变换作为离散谱问题的例子可见文献 [64].

当作为离散的方程时, 变换的符号意义可以理解为

$$\begin{aligned} u &= u_{n,m}, \\ \tilde{u} &= u_{n+1,m}, \\ \hat{u} &= u_{n,m+1}, \\ \tilde{\hat{u}} &= u_{n+1,m+1}, \end{aligned} \quad (26)$$

变换引入的参数  $p$  和  $q$  分别表示  $n$ -方向和  $m$ -方向上的链参数. 如图 3 所示.

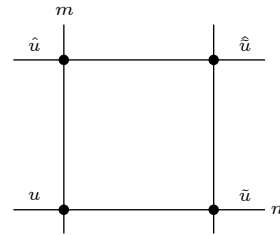


图 3 变换与平面网格  
Fig. 3. Map and lattice.

### 2.2 多维相容性

对于离散可积系统的研究需要引入新的概念. 下面介绍离散可积系统的“多维相容性”的概念.

回到 (势)KdV 方程解的非线性叠加公式 (12) 式, 这一叠加关系可以重复下去. 为了方便, 我们采用 (26) 式中的符号, 将 (12) 式写为

$$(u - \tilde{u})(\tilde{u} - \hat{u}) = p - q. \quad (27)$$

这是一个定义在平面网格上的四方格方程. 我们引入第三个方向  $l$ , 该方向上的平移表示为  $\bar{u} = u_{n,m,l+1}$ , 方向参数为  $r$ , 如图 4 所示.

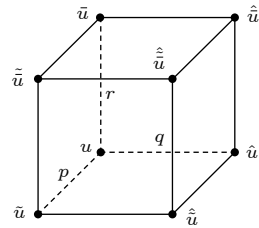


图 4 相容立方体  
Fig. 4. Consistent cube.

观察方程在  $(\tilde{\cdot}, p)$  和  $(\hat{\cdot}, q)$  互换下保持不变, 要求  $(\bar{\cdot}, r)$  与另外两个方向之间也存在对称性, 则有

$$(u - \tilde{u})(\tilde{u} - \bar{u}) = p - r, \quad (28a)$$

$$(u - \hat{u})(\hat{u} - \bar{u}) = r - q, \quad (28b)$$

视 (27) 式定义在图 4 中立方体的底面, (28a) 式和

(28b) 式则分别定义在左侧和后侧. 如何体现这种维数扩充后的相容性? 首先, 由上述 3 个方程有

$$\widehat{u} = \frac{p-q}{\widehat{u}-\widetilde{u}} + u, \quad (29a)$$

$$\widetilde{u} = \frac{r-q}{\widehat{u}-\widetilde{u}} + u, \quad (29b)$$

$$\widetilde{u} = \frac{p-r}{\widetilde{u}-\widehat{u}} + u, \quad (29c)$$

引入方向  $l$  以后的相容性体现在  $\overline{(29a)} = \overline{(29b)} = \overline{(29c)}$ . 将 (29a) 式和 (29b) 式代入到  $\overline{(29c)}$  算得

$$\widehat{\widetilde{u}} = \frac{(q-p)\widetilde{u}\widehat{u} + (r-q)\widehat{u}\widetilde{u} + (p-r)\widetilde{u}\widehat{u}}{(q-r)\widetilde{u} + (p-q)\widehat{u} + (r-p)\widehat{u}}.$$

此式右端在任意交换  $(\widehat{\cdot}, p)$ ,  $(\widetilde{\cdot}, q)$  和  $(\widetilde{\cdot}, r)$  下都保持不变, 说明从  $\overline{(29a)}$  和  $\overline{(29b)}$  也将得到同样的  $\widehat{\widetilde{u}}$ .

方程 (27) 的这种性质称为该方程的 3 维相容性, 也称为立方体相容 (consistent-around-the-cube (CAC)), 它体现了 (27) 式自身的性质. 方程 (17) 也具有同样的性质. 一般地, 对于一个定义在平面四方格上的方程

$$Q(u, \widetilde{u}, \widehat{u}, \widehat{\widetilde{u}}; p, q) = 0, \quad (30)$$

将其嵌入到图 4 中立方体的 6 个面中, 得到

$$\begin{aligned} Q(u, \widetilde{u}, \widehat{u}, \widehat{\widetilde{u}}; p, q) = 0, & \quad Q(\overline{u}, \overline{\widetilde{u}}, \overline{\widehat{u}}, \overline{\widehat{\widetilde{u}}}; p, q) = 0, \\ Q(u, \widetilde{u}, \overline{u}, \overline{\widetilde{u}}; p, r) = 0, & \quad Q(\widehat{u}, \widehat{\widetilde{u}}, \overline{\widehat{u}}, \overline{\widehat{\widetilde{u}}}; p, r) = 0, \\ Q(u, \widehat{u}, \overline{u}, \overline{\widehat{u}}; q, r) = 0, & \quad Q(\widetilde{u}, \widetilde{\widehat{u}}, \overline{\widetilde{u}}, \overline{\widetilde{\widehat{u}}}; q, r) = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

如果从上式左侧的 3 个方程中分别解出  $\widehat{\widetilde{u}}$ ,  $\widetilde{\widehat{u}}$  和  $\overline{\widehat{\widetilde{u}}}$ , 代入到右侧的 3 个方程后得到同样的  $\overline{\widehat{\widetilde{u}}}$ , 则称方程 (30) 具有 3 维相容性.

对于离散系统而言, 上述多维相容性将提供一系列的可积特征, 后文将进一步介绍. 对于一个  $d$ -维的离散方程, 如果嵌入到一个  $(d+1)$ -维链后, 所有的  $d$ -维子链都是相容的, 则称原  $d$ -维离散方程具有  $(d+1)$ -维相容性. 对于 2 维离散方程, 这种多维相容性即为 3 维相容性, 或 CAC 性质.

### 2.3 ABS 方程

本世纪初, 多维相容性逐渐被系统地认识并作为工具应用到离散系统的研究中 [65,35,36,33]. 2003 年, Adler, Bobenko 和 Suris (ABS) [34] 发表了他们在多维相容性的基础上对四方格方程的分类, 他们得到的方程列表被统称为 ABS 方程.

ABS 在假设方程 (30) 具有 3 维相容性的基础

上, 进一步要求 (30) 式满足:

- (i) 仿线性 (affine linear),
- (ii) 在正方形对称群  $D_4$  下不变,
- (iii) 四面体性质 (tetrahedron property).

在前两条要求下方程 (30) 的一般形式可以设为

$$\begin{aligned} & k_0 u \widetilde{u} \widehat{u} \widehat{\widetilde{u}} + k_1 (u \widetilde{u} \widehat{u} + u \widehat{u} \widetilde{u} + u \widehat{u} \widehat{\widetilde{u}} + \widetilde{u} \widehat{u} \widehat{\widetilde{u}}) \\ & + k_2 (\widetilde{u} \widehat{u} + u \widehat{u}) + k_3 (u \widetilde{u} + \widehat{u} \widetilde{u}) + k_4 (u \widehat{u} + \widehat{\widetilde{u}} \widehat{u}) \\ & + k_5 (u + \widetilde{u} + \widehat{u} + \widehat{\widetilde{u}}) + k_6 = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

其中  $k_i$  都是待定系数; 四面体性质指  $\widehat{\widetilde{u}}$  只与  $\widehat{u}$ ,  $\widetilde{u}$  和  $\widehat{u}$  有关, 而与  $u$  无关, 即  $(\widehat{u}, \widetilde{u}, \widehat{u}, \widehat{\widetilde{u}})$  四个点在立方体 (图 4) 中构成一个四面体. ABS 证明了满足上面 3 条要求的 3 维相容方程 (30) 只有 9 个 (允许存在 Möbius 变换), 并分别命名为 H1, H2, H3( $\delta$ ), A1( $\delta$ ), A2, Q1( $\delta$ ), Q2, Q3( $\delta$ ), Q4:

$$H1 : (u - \widehat{u})(\widetilde{u} - \widehat{u}) - p + q = 0, \quad (33a)$$

$$H2 : (u - \widehat{u})(\widetilde{u} - \widehat{u}) - (p - q)(u + \widetilde{u} + \widehat{u} + \widehat{\widetilde{u}} + p + q) = 0, \quad (33b)$$

$$H3(\delta) : p(u \widetilde{u} + \widehat{u} \widehat{\widetilde{u}}) - q(u \widehat{u} + \widetilde{u} \widehat{\widetilde{u}}) + \delta(p^2 - q^2) = 0, \quad (33c)$$

$$A1(\delta) : p(u + \widehat{u})(\widetilde{u} + \widehat{\widetilde{u}}) - q(u + \widetilde{u})(\widehat{u} + \widehat{\widetilde{u}}) - \delta^2 pq(p - q) = 0, \quad (33d)$$

$$\begin{aligned} A2 : & p(1 - q^2)(u \widetilde{u} + \widehat{u} \widehat{\widetilde{u}}) - q(1 - p^2)(u \widehat{u} + \widetilde{u} \widehat{\widetilde{u}}) \\ & - (p^2 - q^2)(1 + u \widetilde{u} \widehat{u} \widehat{\widetilde{u}}) = 0, \end{aligned} \quad (33e)$$

$$\begin{aligned} Q1(\delta) : & p(u - \widehat{u})(\widetilde{u} - \widehat{u}) - q(u - \widetilde{u})(\widehat{u} - \widehat{\widetilde{u}}) \\ & + \delta^2 pq(p - q) = 0, \end{aligned} \quad (33f)$$

$$\begin{aligned} Q2 : & p(u - \widehat{u})(\widetilde{u} - \widehat{u}) - q(u - \widetilde{u})(\widehat{u} - \widehat{\widetilde{u}}) \\ & + pq(p - q)(u + \widetilde{u} + \widehat{u} + \widehat{\widetilde{u}} - p^2 + pq - q^2) = 0, \end{aligned} \quad (33g)$$

$$\begin{aligned} Q3(\delta) : & p(1 - q^2)(u \widehat{u} + \widetilde{u} \widehat{\widetilde{u}}) - q(1 - p^2)(u \widetilde{u} + \widehat{u} \widehat{\widetilde{u}}) \\ & - (p^2 - q^2) \left( \widetilde{u} \widehat{u} + u \widehat{\widetilde{u}} + \frac{\delta^2(1-p^2)(1-q^2)}{4pq} \right) = 0, \end{aligned} \quad (33h)$$

$$\begin{aligned} Q4 : & \text{sn}(p)(u \widetilde{u} + \widehat{u} \widehat{\widetilde{u}}) - \text{sn}(q)(u \widehat{u} + \widetilde{u} \widehat{\widetilde{u}}) \\ & - \text{sn}(p - q)(\widetilde{u} \widehat{u} + u \widehat{\widetilde{u}}) \\ & + \text{sn}(p)\text{sn}(q)\text{sn}(p - q)(1 + k^2 u \widetilde{u} \widehat{u} \widehat{\widetilde{u}}) = 0, \end{aligned} \quad (33i)$$

其中, H1 即为离散势 KdV 方程 (27), H3( $\delta = 0$ ) 为离散势 mKdV 方程 (17) ( $u \rightarrow i^{n+m}u$ ), Q1( $\delta =$

0) 为离散的 Schwarzian KdV 方程, 也称为交比 (cross-ratio) 方程,  $A1(\delta)$  在  $u \rightarrow (-1)^{n+m}u$  下即为  $Q1(\delta)$ ,  $A2$  在  $u \rightarrow u^{(-1)^{n+m}}$  下为  $Q3(\delta = 0)$ ,  $Q4$  是著名的 Krichever-Novikov 方程的 Bäcklund 变换的非线性叠加公式, 原型中系数用 Weierstrass 椭圆函数表示<sup>[34,66]</sup>, (33i) 中 Jacobi 椭圆函数的参数化形式来自于 Hietarinta<sup>[67]</sup>, 式中  $k$  为 Jacobi 椭圆函数的模 (modulus).

### 2.4 离散 Boussinesq 型方程

离散的势 Boussinesq 方程是平面 9 点方程, 定义在  $3 \times 3$  格子上:

$$\frac{P-Q}{x_{11}-x_{20}} - \frac{P-Q}{x_{02}-x_{11}} = (x_{00}-x_{21})(x_{10}-x_{01}) - (x_{01}-x_{22})(x_{21}-x_{12}), \quad (34)$$

式中  $P, Q$  分别表示  $n, m$  的方向参数,  $x_{ij} = x_{n+i, m+j}$ . 这类方程早期由 Nijhoff 等<sup>[68-70]</sup> 学者构造并研究. 借助于其他 (因) 变量, (34) 式可以改写为 (参考文献 [65])

$$\tilde{y} - x\tilde{x} + z = 0, \quad \hat{y} - x\hat{x} + z = 0, \quad (35a)$$

$$y - x\hat{x} + \hat{z} - \frac{P-Q}{\tilde{x}-\hat{x}} = 0. \quad (35b)$$

取向量  $\mathbf{u} = (x, y, z)^T$ , 方程可以视为向量意义下的四方格系统, 并具有 3 维相容性.

2011 年, Hietarinta<sup>[71]</sup> 在 (35) 式形式的基础上, 寻找了可能的离散 Boussinesq 型的 3 维相容系统, 代表方程为 (考虑到对称性和 Möbius 变换):

$$[B-2]: \quad \tilde{y} = x\tilde{x} - z, \quad \hat{y} = x\hat{x} - z, \quad (36a)$$

$$y = x\hat{x} - \hat{z} + b_0(\hat{x} - x) + b_1 + \frac{P-Q}{\tilde{x}-\hat{x}}, \quad (36b)$$

$$[A-2]: \quad \tilde{y} = z\tilde{x} - x, \quad \hat{y} = z\hat{x} - x, \quad (37a)$$

$$y = x\hat{z} - b_0x + \frac{P\tilde{x} - Q\hat{x}}{\hat{z} - \tilde{z}}, \quad (37b)$$

$$[C-3]: \quad \tilde{y}z = \tilde{x} - x, \quad \hat{y}z = \hat{x} - x, \quad (38a)$$

$$\hat{z}y = b_0x + b_1 + z\frac{P\tilde{y}\hat{z} - Q\hat{y}\tilde{z}}{\tilde{z} - \hat{z}}, \quad (38b)$$

式中  $P, Q$  仍然分别表示  $n, m$  的方向参数,  $b_i$  都是任意常数, 有的  $b_i$  可以通过适当的变换去掉. 显然, [B-2] 是 (35) 式的推广. 文献 [71] 中还得到 [C-4] 方程, 现已证明与 [C-3] 之间存在 Möbius 变换, 故不再

列出.

### 2.5 不同方程间的 3 维相容性

离散的 sine-Gordon 方程 (19) 不是 3 维相容的, 但是它与离散势 mKdV 方程 (17) 一起可以实现立方体相容<sup>[72]</sup>. 在符号 (26) 式下, 两个方程分别表示为

$$B1(u, \tilde{u}, \hat{u}, \hat{\tilde{u}}; p, q) = p(u\hat{\tilde{u}} - \tilde{u}\hat{u}) - q(u\tilde{u}\hat{\tilde{u}} - 1) = 0, \quad (39)$$

和

$$B2(u, \tilde{u}, \hat{u}, \hat{\tilde{u}}; p, q) = p(\hat{\tilde{u}}\hat{u} - u\tilde{u}) - q(\tilde{u}\hat{\tilde{u}} - u\hat{u}) = 0. \quad (40)$$

方程 (39) 在变换  $u \rightarrow (-1)^n u$  下成为 (40) 式.

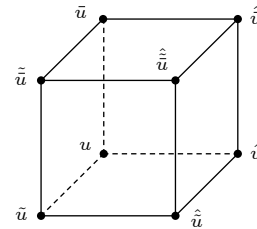


图 5 离散 sine-Gordon 和势 mKdV 方程的相容立方体  
Fig. 5. The consistent cube for the discrete sine-Gordon equation and potential mKdV equation.

将方程 (39) 和方程 (40) 以如下方式放置于立方体的 6 个面:

$$\text{底: } B1(u, \tilde{u}, \hat{u}, \hat{\tilde{u}}; p, q) = 0,$$

$$\text{顶: } B1(\tilde{u}, \hat{\tilde{u}}, \hat{u}, \hat{\tilde{u}}; p, q) = 0,$$

$$\text{左: } B1(u, \tilde{u}, \tilde{u}, \tilde{u}; p, r) = 0,$$

$$\text{右: } B1(\hat{u}, \hat{\tilde{u}}, \hat{\tilde{u}}, \hat{\tilde{u}}; p, r) = 0,$$

$$\text{后: } B2(u, \hat{u}, \tilde{u}, \hat{\tilde{u}}; q, r) = 0,$$

$$\text{前: } B2(\tilde{u}, \hat{\tilde{u}}, \hat{\tilde{u}}, \hat{\tilde{u}}; q, r) = 0. \quad (41)$$

可以检验, 在给定初值  $u, \tilde{u}, \hat{u}, \tilde{u}$  以后,  $\hat{\tilde{u}}$  是唯一的. 这说明两个方程按照如此方式放置于立方体的 6 个面时, 它们 (在一起) 具有 3 维相容性.

ABS 方程和离散 Boussinesq 型方程都是利用同一方程构成相容立方体, 而上面这个例子说明允许用不同的方程构成相容立方体. 文献 [73] 给出了更多的例子. Adler 等<sup>[74]</sup> 和 Boll<sup>[75]</sup> 对这种情况进行了讨论. 详细结果列于 Boll<sup>[76]</sup> 的博士学位论文中.

### 2.6 高维的多维相容方程

对于定义在 6 面体上的 8 点 3 维 (标量) 离散方程, 如图 6(a), 目前已知的具有四维相容性 (见图 7) 的方程有<sup>[34]</sup>

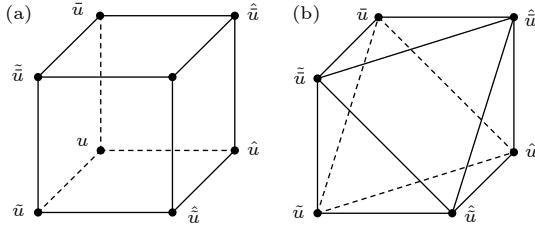


图 6 定义 3 维方程的 6 面体以及 8 面体  
Fig. 6. Cube and octahedron for 3D equations.

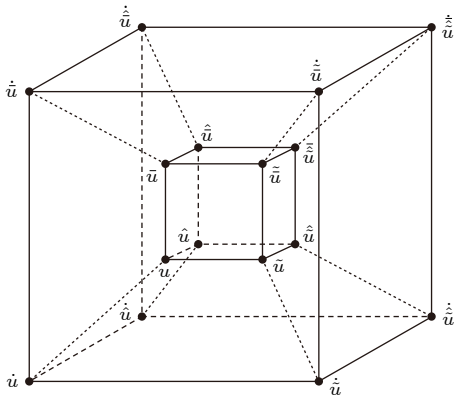


图 7 围绕超立方体的 4D 相容性  
Fig. 7. 4D consistency around the hyper cube.

$$u\hat{\tilde{u}} - \tilde{u}\hat{u} + \tilde{u}\hat{u} - \hat{u}\tilde{u} = 0, \quad (42a)$$

$$\frac{(\tilde{u} - \bar{u})(\hat{u} - \hat{\tilde{u}})}{(\bar{u} - \hat{u})(\hat{\tilde{u}} - \tilde{u})} = \frac{(u - \tilde{u})(\hat{u} - \hat{\tilde{u}})}{(\tilde{u} - \hat{u})(\hat{\tilde{u}} - \tilde{u})}. \quad (42b)$$

对于定义在 8 面体上的 6 点 3 维离散方程, 如图 6(b), 要求这些方程具有 4 维相容性, Adler 等<sup>[77]</sup>于 2011 年进行了分类. 满足条件的方程共有 5 个:

$$i) \quad \hat{\tilde{u}}\tilde{u} - \tilde{u}\hat{u} + \tilde{u}\hat{u} - \hat{u}\tilde{u} = 0, \quad (43a)$$

$$ii) \quad \frac{(\hat{\tilde{u}} - \hat{u})(\hat{u} - \bar{u})(\tilde{u} - \tilde{u})}{(\hat{\tilde{u}} - \tilde{u})(\hat{u} - \hat{\tilde{u}})(\tilde{u} - \bar{u})} = 1, \quad (43b)$$

$$iii) \quad (\hat{\tilde{u}} - \hat{u})\hat{u} + (\hat{u} - \tilde{u})\bar{u} + (\tilde{u} - \hat{\tilde{u}})\tilde{u} = 0, \quad (43c)$$

$$iv) \quad \frac{(\hat{\tilde{u}} - \hat{u})}{\hat{u}} + \frac{(\hat{u} - \tilde{u})}{\bar{u}} + \frac{(\tilde{u} - \hat{\tilde{u}})}{\tilde{u}} = 0, \quad (43d)$$

$$v) \quad \frac{(\hat{\tilde{u}} - \tilde{u})}{\bar{u}} = \hat{\tilde{u}} \left( \frac{1}{\tilde{u}} - \frac{1}{\hat{\tilde{u}}} \right). \quad (43e)$$

这些方程可以存在方向参数, 但是这些参数可

以通过适当的变换移除. 这些方程均已经出现于早期的文献中. 如: (42a) 式是离散的 BKP 方程, 又称为 Miwa 方程<sup>[78]</sup>; (42b) 式被认为是离散 Schwarzian BKP, 首先从几何中得到<sup>[79]</sup>; (43a) 式由 Hirota<sup>[80]</sup>在 1981 年给出, 又称为离散广义 Toda 方程; (43b) 式, (43c) 式和 (43d) 式分别称为离散 Schwarzian KP、离散势 KP 和离散 modified KP 方程, 最早由 Nijhoff 等系统构造 (见文献<sup>[20]</sup>中 (4) 式和 (23) 式和文献<sup>[22]</sup>中 (4.16) 式); (43e) 式由 Date 等于 1982 年获得 (见文献<sup>[13]</sup>中 (N-1) 方程).

### 3 多维相容性的应用

“多维相容性”不仅作为一类离散系统的可积性的理解, 还提供了研究手段, 可用于构造离散可积系统的 Bäcklund 变换、Lax 对、精确解等等.

#### 3.1 Bäcklund 变换

Bäcklund 变换始于对伪球面的构造. Bianchi<sup>[81]</sup>首先证明了 Bäcklund 给出的含任意参数的变换可以保持 sine-Gordon 方程不变. 变换不仅是引入离散变量的一个渠道, 也是联系离散与连续的一座桥梁. 通常, auto-Bäcklund 变换指同一方程的解之间的变换, nonauto-Bäcklund 变换指不同方程的解之间的变换.

“多维相容性”提供了非常直观的构造 auto-Bäcklund 变换的方法. 对于任意具有 3 维相容性的方程 (30), 将其置于相容立方体的 6 个面中, 如图 8 所示.

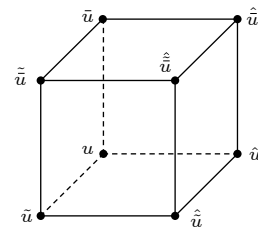


图 8 相容立方体  
Fig. 8. The consistent cube.

底面和顶面的方程分别为

$$Q(u, \tilde{u}, \hat{u}, \hat{\tilde{u}}; p, q) = 0, \quad (44a)$$

$$Q(\bar{u}, \tilde{u}, \hat{u}, \hat{\tilde{u}}; p, q) = 0. \quad (44b)$$

当将  $\bar{u}$  也视为方程 (44a) 的解时, 相容立方体侧面

的两个方程

$$Q(u, \tilde{u}, \bar{u}, \tilde{\bar{u}}; p, r) = 0, \quad (45a)$$

$$Q(u, \bar{u}, \hat{u}, \hat{\bar{u}}; r, q) = 0. \quad (45b)$$

自然地构成方程 (44a) 的一个 Bäcklund 变换. 对于 H1 方程 (33a) 来说, 多维相容性为它提供的 Bäcklund 变换是 (28) 式.

即使是对于两个方程合作构成相容立方体时, 上述思想依然有效. 对于离散 sine-Gordon 方程 (39) 和离散势 mKdV 方程 (40) 而言, 它们合作构成相容立方体 (见 (41) 式). 此时, 左侧和后侧的两个方程, 即

$$p(u\tilde{u} - \tilde{u}\bar{u}) - r(u\tilde{u}\tilde{\bar{u}} - 1) = 0, \quad (46a)$$

$$r(\hat{u}\hat{\bar{u}} - u\bar{u}) - q(\bar{u}\hat{u} - u\hat{u}) = 0, \quad (46b)$$

构成离散 sine-Gordon 方程 (39) 的 Bäcklund 变换. 不过这个变换没有对称性.

多维相容性也可以用于构造不同方程间的 nonauto-Bäcklund 变换. 下面以 Q2 和 Q1( $\delta$ ) 为例来解释如何利用相容立方体建立 nonauto-Bäcklund 变换. 首先, 将 Q2 方程 (33g) 置于相容立方体的 6 个面. 然后在顶层方程 Q2( $\bar{u}, \tilde{u}, \hat{u}, \hat{\bar{u}}; p, q) = 0$  中引入关系

$$\bar{u} = \frac{v}{\epsilon} + \frac{\delta^2}{4\epsilon^2}, \quad (47)$$

对方程乘以  $\epsilon^2$  以后取极限  $\epsilon \rightarrow 0$ , 顶层方程变为

$$p(v - \tilde{v})(\tilde{v} - \hat{v}) - q(v - \tilde{v})(\hat{v} - \tilde{v}) + \delta^2 pq(p - q) = 0, \quad (48)$$

即 Q1( $\delta$ ). 此时, 立方体的左侧和后侧的两个方程, 经过替换 (47) 式以及取极限以后, 得到

$$\delta(u - \tilde{u})(v - \tilde{v}) = -p[\delta^2(u + \tilde{u}) - 2v\tilde{v}] + p^2\delta(v + \tilde{v} + p\delta), \quad (48a)$$

$$\delta(u - \hat{u})(v - \hat{v}) = -q[\delta^2(u + \hat{u}) - 2v\hat{v}] + q^2\delta(v + \hat{v} + q\delta), \quad (48b)$$

这就是 Q2 与 Q1( $\delta$ ) 之间的 nonauto-Bäcklund 变换.

2008 年, Atkinson 构造了 ABS 方程之间一系列 nonauto-Bäcklund 变换, 详细结果请参考文献 [73] 中表 3. 除了上述方法, Bäcklund 变换可以利用 Yang-Baxter 映射以及 ABS 方程的分解性质来构造, 相关内容读者可以分别参考文献 [82] 和文献 [83].

### 3.2 Lax 对

众所周知, Bäcklund 变换与 Lax 对存在密切

联系, 对于多维相容系统来说, 这种联系更加直接. 下面以 H1 方程 (33a) 为例, 利用其 3 维相容性引出的 Bäcklund 变换构造它的 Lax 对.

将 H1 的 Bäcklund 变换 (28) 式改写为

$$\tilde{\bar{u}} = \frac{p-r}{\bar{u}-\tilde{u}} + u, \quad \hat{\bar{u}} = \frac{r-q}{\hat{u}-\bar{u}} + u. \quad (49)$$

取  $\bar{u} = g/f$ , 得到

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{g}}{\tilde{f}} &= \frac{ug + (p-r-u\tilde{u})f}{g-\tilde{u}f}, \\ \frac{\hat{g}}{\hat{f}} &= \frac{ug + (q-r-u\hat{u})f}{g-\hat{u}f}. \end{aligned} \quad (50)$$

引入  $\Phi = (g, f)^T$ , 上式改写为

$$\tilde{\Phi} = \gamma_1 M \Phi, \quad \hat{\Phi} = \gamma_2 N \Phi, \quad (51a)$$

$$M = \begin{pmatrix} u & p-r-u\tilde{u} \\ 1 & -\tilde{u} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} u & q-r-u\hat{u} \\ 1 & -\hat{u} \end{pmatrix}, \quad (51b)$$

式中  $\gamma_i$  可视为分式线性形式 (50) 式写成矩阵形式 (51) 式后保留的原分子、分母的公因子, 一般取为  $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{|M|}}$ ,  $\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{|N|}}$ , 对于 H1 来说,  $\gamma_i$  可以取为任意常数. 相容性  $\hat{\Phi} = \tilde{\Phi}$  引出

$$\hat{M}N = \tilde{N}M, \quad (52)$$

计算后可得 H1 方程 (33a).

在 H1 的 Lax 对 (51) 式中, 取  $\Phi = (\phi_1, \phi_2)^T$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ , 从  $\tilde{\Phi} = M\Phi$  中消去  $\phi_1$ , 得到

$$\tilde{\phi}_2 = (u - \tilde{u})\tilde{\phi}_2 - (p - r)\phi_2, \quad (53)$$

此为 H1 方程谱问题的标量形式. 由此出发可以构造 H1 方程的无穷守恒律 [84].

上面以 H1 为例给出了利用 Bäcklund 变换构造 Lax 对的方法, 事实上, 所有的 ABS 方程都具有相同结构的 Lax 对, 且存在一般形式. 具体地, 对于任一 ABS 方程  $Q(u, \tilde{u}, \hat{u}, \hat{\bar{u}}; p, q) = 0$ , 其 Lax 对为 (参考文献 [85])

$$\tilde{\Phi} = \gamma_1 M \Phi, \quad \hat{\Phi} = \gamma_2 N \Phi, \quad (54a)$$

其中

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} -\partial_{\tilde{u}}Q & -Q \\ \partial_{\tilde{u}}\partial_{\tilde{u}}Q & \partial_{\tilde{u}}Q \end{pmatrix}_{\hat{u}=\hat{\bar{u}}=0, q=r}, \\ N &= \begin{pmatrix} -\partial_{\hat{u}}Q & -Q \\ \partial_{\hat{u}}\partial_{\hat{u}}Q & \partial_{\hat{u}}Q \end{pmatrix}_{\tilde{u}=\tilde{\bar{u}}=0, p=r}, \end{aligned} \quad (54b)$$

$\gamma_1 = \sqrt{|M|}$ ,  $\gamma_2 = \sqrt{|N|}$ . 显然, 将矩阵谱问题改



写成标量形式后, 可以发现所有的 ABS 方程都具有类似于 (53) 式的二阶离散谱问题.

通常, 对于由一个方程构成相容立方体时, 由于方程的对称性, 其 Bäcklund 变换具有对称性, Lax 对也具有对称性, 即在上式  $M$  中, 将  $(\tilde{\cdot}, p)$  换为  $(\cdot, q)$ , 即得到  $N$ . 在文献 [86] 中搜集了更多的利用 3 维相容性构造 Lax 对的例子. 对于由两个方程构成相容立方体时, 例如 2.5 节中的离散 sine-Gordon 方程和势 mKdV 方程, 由它们的相容立方体构造的离散 sine-Gordon 方程的 Bäcklund 变换具有非对称性, 由此引出的离散 sine-Gordon 方程的 Lax 对也是非对称的:

$$\tilde{\Phi} = \frac{-1}{\sqrt{u\tilde{u}}} \begin{pmatrix} -p\tilde{u} & r \\ ru\tilde{u} & -pu \end{pmatrix} \Phi, \quad (55a)$$

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{u\hat{u}}} \begin{pmatrix} -ru & qu\hat{u} \\ q & -r\hat{u} \end{pmatrix} \Phi. \quad (55b)$$

### 3.3 孤子解

下面以离散势 KdV (即 H1) 方程 (33a) 为例, 演示如何通过其 Bäcklund 变换构造单孤子解 (1-soliton solution (1SS)). 首先需要种子解. 取

$$a^2 = -p, \quad b^2 = -q, \quad (56)$$

不难发现

$$u_0 = an + bm + \lambda, \quad (57)$$

是方程 (33a) 的一个解, 其中  $\lambda$  是任意常数.

方程 (33a) 的 Bäcklund 变换是 (28) 式, 即

$$(u - \tilde{u})(\tilde{u} - \bar{u}) = -a^2 + k^2, \quad (58a)$$

$$(u - \hat{u})(\bar{u} - \hat{u}) = -k^2 + b^2. \quad (58b)$$

相应于参数化 (56) 式, 这里取  $r = -k^2$ . 取  $u$  为 (57) 作为种子解, 设新解  $\bar{u}$  形如

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + v, \quad (59)$$

其中  $\bar{u}_0$  是种子解 (57) 沿  $l$  方向的一次平移:

$$\bar{u}_0 = an + bm + k + \lambda, \quad (60)$$

$v$  是待定函数. 将 (59) 式和 (57) 式代入 Bäcklund 变换 (58) 式得到

$$\tilde{v} = \frac{Ev}{v+F}, \quad \hat{v} = \frac{Gv}{v+H}, \quad (61)$$

其中

$$E = -(a+k), \quad F = -(a-k),$$

$$G = -(b+k), \quad H = -(b-k).$$

引入  $v = f/g$  和  $\Phi = (f, g)^T$ , 将 (61) 改写为

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 1 & F \end{pmatrix} \Phi, \quad \hat{\Phi} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 1 & H \end{pmatrix} \Phi. \quad (62)$$

验算可见成立相容性  $\tilde{\hat{\Phi}} = \hat{\tilde{\Phi}}$ , 否则需要在上式的矩阵前乘上平衡因子 (类似于 (51) 式中的  $\gamma_i$ ). 进一步求解, 先后得到

$$f_{n,m} = E^n f_{0,m}, \quad g_{n,m} = \frac{E^n - F^n}{-2k} f_{0,m} + F^n g_{0,m},$$

以及

$$f_{n,m} = G^m f_{n,0}, \quad g_{n,m} = \frac{G^m - H^m}{-2k} f_{n,0} + H^m g_{n,0}.$$

从而有

$$\Phi_{n,m} = \begin{pmatrix} E^n G^m & 0 \\ \frac{E^n G^m - F^n H^m}{-2k} & F^n H^m \end{pmatrix} \Phi_{0,0}. \quad (63)$$

取

$$\rho_{n,m} = \left(\frac{E}{F}\right)^n \left(\frac{G}{H}\right)^m \rho_{0,0} = \left(\frac{a+k}{a-k}\right)^n \left(\frac{b+k}{b-k}\right)^m \rho_{0,0}, \quad (64)$$

其中  $\rho_{0,0}$  为常数, 从 (63) 式可得

$$v_{n,m} = \frac{v_{0,0} \rho_{n,m} / \rho_{0,0}}{1 + \frac{v_{0,0}}{2k} - \frac{v_{0,0}}{2k} \rho_{n,m} / \rho_{0,0}}. \quad (65)$$

重新定义常数  $\rho_{0,0}$  后, 有

$$v_{n,m} = \frac{-2k \rho_{n,m}}{1 + \rho_{n,m}}. \quad (66)$$

代入到 (59) 式, 离散势 KdV 方程 (33a) 的 1-孤子解为

$$u_{n,m}^{1SS} = \bar{u}_0 + v_{n,m} = an + bm + \lambda + \frac{k(1 - \rho_{n,m})}{1 + \rho_{n,m}}. \quad (67)$$

依据上述过程, 若利用 Bäcklund 变换获得 2-孤子解显然不容易. 但是 1-孤子解的结构往往可以“暗示”一些 2-孤子解的结构信息, 有助于发现合适的变换公式将离散方程双线性化, 并进一步获得  $N$ -孤子解. 相关内容可以参考文献 [38, 87, 88].

### 3.4 0-孤子解与不动点方法

对于 (33) 式中所列的 ABS 方程,  $u = 0$  一般都不是解, 而且也不易明显看出一些简单的解. “不动点方法”是在 Bäcklund 变换的基础上求解 0-孤子解的方法. 从上一节的求解过程来看, 对于方程  $Q(u, \tilde{u}, \hat{u}, \bar{u}; p, q) = 0$  的 Bäcklund 变换 (3.1), 其中的参数  $r$  是孤子参数, 将作为离散谱在  $\bar{u}$  中引

出一个孤子. 现在, 如果孤子参数  $r$  在变换中“失效”, 即  $\bar{u} = u$ , 则有

$$Q(u, \tilde{u}, u, \tilde{u}; p, r) = 0, \quad (68a)$$

$$Q(u, u, \hat{u}, \hat{u}; r, q) = 0. \quad (68b)$$

由此变换引出的原方程的解应当是最简单的, 可以作为 0-孤子解.

对于 H1 方程 (33a), 有

$$(\tilde{u} - u)^2 = r - p, \quad (\hat{u} - u)^2 = r - q.$$

由此很容易得到

$$u = an + bm + \gamma, \quad a^2 = r - p, \quad b^2 = r - q,$$

即 (57) 式.

如果方程  $Q(u, \tilde{u}, \hat{u}, \hat{u}; p, q) = 0$  在变换  $u \rightarrow T(u)$  下不变, 可在变换 (3.1) 中取  $\bar{u} = T(u)$ , 从而有

$$Q(u, \tilde{u}, T(u), T(\tilde{u}); p, r) = 0, \quad (69a)$$

$$Q(u, T(u), \hat{u}, T(\hat{u}); r, q) = 0. \quad (69b)$$

对于 Q1( $\delta$ ) 方程 (33f), 在  $T(u) = u + c$  下不变, 对于的 Bäcklund 变换 (69) 式有

$$\begin{aligned} r(u - \tilde{u})^2 &= p(c^2 + \delta^2 r(p - r)), \\ r(u - \hat{u})^2 &= q(c^2 + \delta^2 r(q - r)). \end{aligned} \quad (70)$$

经过参数化  $(p, q) \rightarrow (\alpha, \beta)$ :

$$\begin{aligned} p &= \frac{c^2/r - \delta^2 r}{a^2 - \delta^2}, \quad q = \frac{c^2/r - \delta^2 r}{b^2 - \delta^2}, \\ \alpha &:= pa, \quad \beta := qb, \end{aligned} \quad (71)$$

可得 Q1( $\delta$ ) 的线性 0-孤子解:

$$u_0 = \alpha n + \beta m + \lambda,$$

其中  $\lambda$  是任意常数. 此外, Q1( $\delta$ ) 方程 (33f), 还在  $T(u) = -u$  下不变. 此时的 Bäcklund 变换 (69) 式给出

$$\begin{aligned} 4pu\tilde{u} + r(u - \tilde{u})^2 &= \delta^2 pr(p - r), \\ 4qu\hat{u} + r(u - \hat{u})^2 &= \delta^2 r(q - r). \end{aligned} \quad (72)$$

经过参数化  $(p, q) \rightarrow (\alpha, \beta)$ :

$$p = \frac{1}{2}r(1 - \cosh(\alpha')) = -\frac{1}{4}r(1 - \alpha)^2/\alpha, \quad (73)$$

$$q = \frac{1}{2}r(1 - \cosh(\beta')) = -\frac{1}{4}r(1 - \beta)^2/\beta, \quad (74)$$

得到解

$$u_0 = A\alpha^n \beta^m + B\alpha^{-n} \beta^{-m}, \quad AB = \delta^2 r^2 / 16. \quad (75)$$

上述所描述的过程称为“不动点方法”. 首先用于构造 Q4 方程的种子解 [89], 其后又系统地应用于其他 ABS 方程 0-孤子解的构造 [37,38]. 当然, 也可

以利用其他的方法构造 0-孤子解, 例如, 利用方程间的 Bäcklund 变换 (如 (48) 式), 从一个方程的 0-孤子解得到另一个方程的 0-孤子解.

## 4 结 论

通过简单的描述和例子介绍了多维相容性的概念及其在离散可积系统中的应用. 对于多维相容性, 存在一定的几何背景, 换言之, 经典的初等几何中的点线之间的关系蕴含着若干离散可积系统的多维相容性 (如文献 [79,90]). 此外, 多维相容性也可以从平面波因子的对称性来理解. Miwa 映射提供的离散的平面波因子 [78]

$$\psi = \prod_i (1 - p_i k)^{n_i}$$

在各个方向上具有对称性; 考虑到不少离散可积系统可以从平面波因子出发通过 Cauchy 矩阵方法 [37,45] 等途径来构造, 不难理解由此获得的离散可积系统具有多方向上的相容性.

对比连续系统, 目前, 离散可积系统在代数结构和工具、几何背景、离散的分析工具等方面都仍待发展. 例如, 基于谱问题、零曲率方程和 Kac-Moody 代数的连续可积系统理论并不适用于离散系统, 许多连续意义下的几何体系仍未实现离散化, 离散的复分析也尚未成熟.

对于离散可积系统的研究也是一个在不断认识离散可积性、发展研究方法和工具、与新兴数学工具结合 (如 Tropical 几何、Cluster 代数等) 的过程. 关于离散可积系统中值得关注的发展与研究方向, 建议读者关注 SIDE 会议的网站.

## 参考文献

- [1] Zabusky N J, Kruskal M D 1965 *Phys. Rev. Lett.* **15** 240
- [2] Gardner C S, Greene J M, Kruskal M D, Miura R M 1967 *Phys. Rev. Lett.* **19** 1095
- [3] Lax P D 1968 *Commun. Pure Appl. Math.* **21** 467
- [4] Deift P 2019 arXiv: 1902.10267
- [5] Case K M, Kac M 1973 *J. Math. Phys.* **14** 594
- [6] Ablowitz M J, Ladik J F 1975 *J. Math. Phys.* **16** 598
- [7] Ablowitz M J, Ladik J F 1976 *J. Math. Phys.* **17** 1011
- [8] Ablowitz M J, Ladik J F 1976 *Stud. Appl. Math.* **55** 213
- [9] Hirota R 1977 *J. Phys. Soc. Jpn.* **43** 1424
- [10] Hirota R 1977 *J. Phys. Soc. Jpn.* **43** 2074
- [11] Hirota R 1977 *J. Phys. Soc. Jpn.* **43** 2079
- [12] Date E, Jimbo M, Miwa T 1982 *J. Phys. Soc. Jpn.* **51** 4116
- [13] Date E, Jimbo M, Miwa T 1982 *J. Phys. Soc. Jpn.* **51** 4125
- [14] Date E, Jimbo M, Miwa T 1983 *J. Phys. Soc. Jpn.* **52** 388

- [15] Date E, Jimbo M, Miwa T 1983 *J. Phys. Soc. Jpn.* **52** 761
- [16] Date E, Jimbo M, Miwa T 1983 *J. Phys. Soc. Jpn.* **52** 766
- [17] Ueno K, Takasaki K 1984 In: Okamoto K (ed) *Group Representations and Systems of Differential Equations Advanced Studies in Pure Mathematics* (Vol. 4) (Tokyo: Kinokuniya) pp1–95
- [18] Nijhoff F W, Quispel G R W, Capel H W 1983 *Phys. Lett. A* **97** 125
- [19] Nijhoff F W, Quispel G R W, Capel H W 1983 *Phys. Lett. A* **98** 83
- [20] Nijhoff F W, Capel H W, Wiersma G L, Quispel G R W 1984 *Phys. Lett. A* **105** 267
- [21] Nijhoff F W 1985 *Lett. Math. Phys.* **9** 235
- [22] Nijhoff F W, Capel H W, Wiersma G L 1985 In: Martini R (ed) *Geometric Aspects of the Einstein Equations and Integrable Systems (Scheveningen 1984)* Lecture Notes in Phys (Vol. 239) (Berlin: Springer) pp263–302
- [23] Quispel G R W, Nijhoff F W, Capel H W, van der Linden J 1984 *Physica A* **125** 344
- [24] Fokas A S, Ablowitz M 1981 *Phys. Rev. Lett.* **47** 1096
- [25] Levi D, Benguria R 1980 *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **77** 5025
- [26] Takahashi D, Satsuma J 1990 *J. Phys. Soc. Jpn.* **59** 3514
- [27] Tokihiro T, Takahashi D, Matsukidaira J, Satsuma J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 3247
- [28] Grammaticos B, Ramani A, Papageorgiou V G 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 1825
- [29] Ramani A, Grammaticos B, Hietarinta J 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 1829
- [30] Hietarinta J, Viallet C 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 325
- [31] Bellon M P, Viallet C 1999 *Commun. Math. Phys.* **204** 425
- [32] Sakai H 2001 *Commun. Math. Phys.* **220** 165
- [33] Bobenko A I, Suris Yu B 2002 *Int. Math. Res. Not.* **2002** 573
- [34] Adler V E, Bobenko A I, Suris Yu B 2003 *Commun. Math. Phys.* **233** 513
- [35] Nijhoff F W, Walker A J 2001 *Glasg. Math. J.* **43A** 109
- [36] Nijhoff F W 2002 *Phys. Lett. A* **297** 49
- [37] Nijhoff F W, Atkinson J, Hietarinta J 2009 *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 404005
- [38] Hietarinta J, Zhang D J 2008 *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 404006
- [39] Atkinson J, Nijhoff F W 2010 *Commun. Math. Phys.* **299** 283
- [40] Nijhoff F W, Atkinson J 2010 *Int. Math. Res. Not.* **2010** 3837
- [41] Butler S, Joshi N 2010 *Inverse Prob.* **26** 115012
- [42] Butler S 2012 *Nonlinearity* **25** 1613
- [43] Cao C W, Xu X X 2012 *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** 055213
- [44] Cao C W, Zhang G Y 2012 *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** 095203
- [45] Zhang D J, Zhao S L 2013 *Stud. Appl. Math.* **131** 72
- [46] Bobenko A I, Its A 2016 *Duke Math. J.* **165** 2607
- [47] Hietarinta J, Joshi N, Nijhoff F W 2016 (Cambridge: Camb. Univ. Press)
- [48] Zhang D J, Chen S T 2010 *Stud. Appl. Math.* **125** 393
- [49] Zhang D J, Chen S T 2010 *Stud. Appl. Math.* **125** 419
- [50] Fu W, Qiao Z J, Sun J W, Zhang D J 2013 arXiv: 1307.3671
- [51] Fu W, Qiao Z J, Sun J W, Zhang D J 2015 *J. Nonlinear. Math. Phys.* **22** 321
- [52] Wahlquist H D, Estabrook F B 1973 *Phys. Rev. Lett.* **31** 1386
- [53] Lamb JR G L 1971 *Rev. Mod. Phys.* **43** 99
- [54] Chen H H 1974 *Phys. Rev. Lett.* **33** 925
- [55] Orfanidis S J 1978 *Phys. Rev. D* **18** 3828
- [56] Bianchi L 1892 *Rend. Lincei* **5** 2
- [57] Bianchi L 1894 *Lezioni di Geometria Differenziale* (3rd Ed.) (Pisa: Enrico Spoerri)
- [58] Konopelchenko B G 1982 *Phys. Lett. A* **87** 445
- [59] Levi D 1981 *J. Phys. A: Math. Gen.* **14** 1083
- [60] Adler V E, Yamilov R I 1994 *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** 477
- [61] Merola I, Ragnisco O, Tu G Z 1994 *Inverse Prob.* **10** 1315
- [62] Zhang H W, Tu G Z, Oevel W, Fuchssteiner B 1991 *J. Math. Phys.* **32** 1908
- [63] Chen K, Deng X, Zhang D J 2017 *J. Nonlinear. Math. Phys.* **24(Suppl.1)** 18
- [64] Cao C W, Zhang G Y 2012 *Chin. Phys. Lett.* **29** 050202
- [65] Walker A J 2001 *Ph.D. Thesis* (Leeds: University of Leeds)
- [66] Adler V E 1998 *Int. Math. Res. Not.* **1998** 1
- [67] Hietarinta J 2005 *J. Nonlinear. Math. Phys.* **12** 223
- [68] Nijhoff F W, Papageorgiou V G, Capel H W, Quispel G R W 1992 *Inverse Prob.* **8** 597
- [69] Nijhoff F W 1997 In: Fokas A S, Gel'fand I M (eds) *Algebraic Aspects of Integrable Systems: In memory of Irene Dorfman* (Boston: Birkhauser) pp237–260
- [70] Nijhoff F W 1999 In: Bobenko A I, Seiler R (eds) *Discrete Integrable Geometry and Physics* (Oxford: Clarendon Press) pp209–234
- [71] Hietarinta J 2011 *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** 165204
- [72] Hietarinta J, Zhang D J 2008 preprint
- [73] Atkinson J 2008 *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** 135202
- [74] Adler V E, Bobenko A I, Suris Yu B 2009 *Funct. Anal. Appl.* **43** 3
- [75] Boll R 2011 *J. Nonlinear. Math. Phys.* **18** 337
- [76] Boll R 2012 *Ph.D. Dissertation* (Berlin: Technischen Universität Berlin)
- [77] Adler V E, Bobenko A I, Suris Yu B 2012 *Int. Math. Res. Not.* **2012** 1822
- [78] Miwa T 1982 *Proc. Jpn. Acad.* **58A** 9
- [79] Konopelchenko B G, Schief W K 2002 *Stud. Appl. Math.* **109** 89
- [80] Hirota R 1981 *J. Phys. Soc. Jpn.* **50** 3785
- [81] Bianchi L 1885 *Ann. Matem.* **13** 177
- [82] Atkinson J, Nieszporski M 2014 *Int. Math. Res. Not.* **2014** 4215
- [83] Zhang D D, Zhang D J 2018 *J. Nonlinear. Math. Phys.* **25** 34
- [84] Zhang D J, Cheng J W, Sun Y Y 2013 *J. Phys. A: Math. Theor.* **46** 265202
- [85] Xenitidis P 2011 *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** 435201
- [86] Bridgman T, Hereman W, Quispel G R W, van der Kamp P H 2013 *Found. Comput. Math.* **13** 517
- [87] Hietarinta J, Zhang D J 2010 *J. Math. Phys.* **51** 033505
- [88] Hietarinta J, Zhang D J 2011 *SIGMA* **7** 061
- [89] Atkinson J, Hietarinta J, Nijhoff F W 2007 *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** F1
- [90] Konopelchenko B G, Schief W K 2002 *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** 6125

SPECIAL TOPIC—Nonlinear physics

# Discrete integrable systems: Multidimensional consistency<sup>\*</sup>

Zhang Da-Jun<sup>†</sup>

(*Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, China*)

( Received 28 October 2019; revised manuscript received 14 November 2019 )

## Abstract

In contrast to the well-established theory of differential equations, the theory of difference equations has not quite developed so far. The most recent advances in the theory of discrete integrable systems have brought a true revolution to the study of difference equations. Multidimensional consistency is a new concept appearing in the research of discrete integrable systems. This property, as an explanation to a type of discrete integrability, plays an important role in constructing the Bäcklund transformations, Lax pairs and exact solutions for discrete integrable system. In the present paper, the multidimensional consistency and its applications in the research of discrete integrable systems are reviewed.

**Keywords:** discrete integrable systems, multidimensional consistency

**PACS:** 02.30.Ik, 05.45.Yv

**DOI:** [10.7498/aps.69.20191647](https://doi.org/10.7498/aps.69.20191647)

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11875040, 11631007).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [djzhang@staff.shu.edu.cn](mailto:djzhang@staff.shu.edu.cn)