专题：非线性物理

Boussinesq 方程的 Lax 对、Bäcklund 变换、对称群变换和 Riccati 展开相容性*

刘萍[1)†] 徐恒睿[2)] 杨建荣[3)]

1) (电子科技大学中山学院电子信息学院, 中山 528402)

2) (电子科技大学物理学院, 成都 610054)

3) (上饶师范学院物理与电子信息学院, 上饶 334001)

(2019 年 9 月 2 日收到; 2019 年 12 月 9 日收到修改稿)

Boussinesq 方程是流体力学等领域一个非常重要的方程. 本文推导了 Boussinesq 方程的 Lax 对. 借助于截断 Painlevé展开, 得到了 Boussinesq 方程的自 Bäcklund 变换, 以及 Boussinesq 方程和 Schwarzian 形式的 Boussinesq 方程之间的 Bäcklund 变换. 探讨了 Boussinesq 方程的非局域对称, 研究了 Boussinesq 方程的单参数群变换和单参数子群不变解. 运用 Riccati 展开法研究了 Boussinesq 方程, 证明 Boussinesq 方程具有 Riccati 展开相容性, 得到了 Boussinesq 方程的孤立波-椭圆余弦波解.

关键词： Boussinesq 方程, lax 对, Bäcklund 变换, Riccati 展开

PACS： 02.30.Ik, 02.30.Jr **DOI:** 10.7498/aps.69.20191316

1 引 言

一般来讲, Boussinesq 方程可写为

$$u_{tt}+\alpha u_{xx}+\beta(u^2)_{xx}+\gamma u_{xxxx}=0, \tag{1}$$

其中, 下角标 x 和 t 表示偏微分. Boussinesq 方程可以用于描绘浅水波、等离子体、非线性晶格等众多物理现象[1–5].

由于该方程应用广泛, 一些特殊形式的或者修正的 Boussinesq 方程被推导出来研究. 例如, “坏” Boussinesq 方程 (也叫不适定 Boussinesq 方程) 的形式为

$$u_{tt}-u_{xx}-(u^2)_{xx}-u_{xxxx}=0. \tag{2}$$

这个方程是在 1872 年由 Boussinesq[1] 提出来用于描绘浅水波问题的. Benny 和 Luke[6] 发现这个 Boussinesq 方程非线性弱散色现象的一般近似. “好”Boussinesq 方程的形式为

$$u_{tt}-u_{xx}-(u^2)_{xx}+u_{xxxx}=0. \tag{3}$$

这个方程是作为描绘弦的非线性振动模型提出来的, 也可以用于描绘非线性介质材料中的电磁波[7]. 一种修正的 Boussinesq 方程的形式为

$$u_{tt}-u_{xx}-(u^2)_{xx}-u_{xxtt}=0. \tag{4}$$

这个方程也经常被称为“改进的”Boussinesq 方程[8], 它由流体力学推导而来, 也可以用于描绘波在磁场中的传播, 并取代“坏”Boussinesq 方程.

很多不同形式的 Boussinesq 方程, 是方程 (1) 的特殊形式. 本文旨在研究 Boussinesq 方程 (1) 的可积性、对称性和严格解. 在下文中, 如果没有特殊说明, Boussinesq 方程指的是方程 (1). 论文结构如下: 在第 2 节中, 从一个简化的 Boussinesq 方程的 Lax 对, 推导出 Boussinesq 方程 (1) 的一组 Lax 对; 在第 3 节, 对 Boussinesq 方程 (1) 进行截

* 国家自然科学基金 (批准号: 11775047, 11865013) 和中山市科技计划项目 (批准号: 2017B1016) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: liuping49@126.com

© 2020 中国物理学会 Chinese Physical Society

断的 Painlevé展开，得到 Boussinesq 方程的 Bäcklund 变换; 第 4 节研究了 Boussinesq 方程的单参数群变换; 第 5 节讨论了 Boussinesq 方程的全点李对称性相似解; 第 6 节应用 CRE (consistent Riccati expansion, CRE) 方法证明了 Boussinesq 方程的 CRE 相容性. Boussinesq 方程孤立波-周期波在第 7 节进行了讨论; 第 8 节是本文的结论和讨论.

2 Boussinesq 方程的 Lax 对

当 $\alpha=0,\beta=1,\gamma=1/3$ 时, 方程 (1) 退化成

$$v_{\tau\tau}+(v^2)_{\chi\chi}+\frac{1}{3}v_{\chi\chi\chi\chi}=0, \tag{5}$$

为了将方程 (1) 和方程 (5) 的变量进行区分, 我们将方程 (1) 中的变量 $\{u,x,t\}$ 对应地写成方程 (5) 中的 $\{v,\chi,\tau\}$. Weiss[9] 通过研究方程 (5) 的 painlevé性质, 推出了方程 (5) 的一组 Lax 对, 其形式如下

$$\psi_{\chi\chi\chi}=-\frac{3}{2}v\psi_\chi-\frac{3}{4}\psi v_\chi-\frac{3}{4}\psi\int v_\tau\,\mathrm{d}\chi+\lambda\psi, \tag{6a}$$

$$\psi_\tau=\psi_{\chi\chi}+v\psi. \tag{6b}$$

方程 (1) 和方程 (5) 之间存在标度变换

$$\begin{aligned}
u(x,t)&=\left(\frac{3\gamma}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{3}}v(\chi,\tau)-\frac{\alpha}{2\beta},\\
\chi&=\pm\frac{\beta^{\left(\frac{1}{6}\right)}3^{\left(\frac{2}{3}\right)}x}{3\gamma^{\frac{1}{3}}},\\
\tau&=\pm\frac{3^{\left(\frac{5}{6}\right)}\beta^{\left(\frac{1}{3}\right)}t}{3\gamma^{\left(\frac{1}{6}\right)}}.
\end{aligned} \tag{7}$$

结合方程 (5) 的 Lax 对 (6) 式以及标度变换, 可以得到方程 (1) 的 Lax 对.

定理 1 (Lax 对定理)

Boussinesq 方程 (1) 具有如下形式 Lax 对:

$$\begin{aligned}
\phi_{xxx}=&-\frac{\sqrt{3\gamma}\beta\phi}{12\gamma^2}\int u_t\,\mathrm{d}x-\frac{(2u\beta+\alpha)}{4\gamma}\phi_x\\
&-\frac{\phi\beta}{4\gamma}u_x\pm\frac{\phi\lambda\sqrt{\beta}}{3\gamma},
\end{aligned} \tag{8a}$$

$$\phi_t=\sqrt{3\gamma}\phi_{xx}+\frac{\sqrt{3}\phi(2\beta u+\alpha)}{6\sqrt{\gamma}}, \tag{8b}$$

这里的 λ 代表谱函数, φ 表示 $\{x,t\}$ 的任意函数.

3 与截断 Painlevé展开相关联的 Bäcklund 变换

截断 Painlevé展开法, 是分析非线性系统最有效的方法之一[10–12]. 对 Boussinesq 方程 (1), 可将 u 展开成

$$u=u_0+\frac{u_1}{f}+\frac{u_2}{f^2}, \tag{9}$$

这里的 u_0,u_1,u_2 和 f 都是 $\{x,t\}$ 的函数, f 是奇异流函数. 将 (9) 式代入到方程 (1) 中, 所得到的多项式中, f 的所有不同阶次的系数都应该为零. 由 f^{-6} 的系数为零, 可得到

$$u_2=-\frac{6\gamma {f_x}^2}{\beta}. \tag{10}$$

由 f^{-5} 的系数为零, 可得

$$u_1=\frac{6\gamma f_{xx}}{\beta}. \tag{11}$$

由 f^{-4} 的系数, 容易得到

$$u_0=\frac{3}{2}\frac{\gamma {f_{xx}}^2}{\beta {f_x}^2}-\frac{2\gamma f_{xxx}}{\beta f_x}-\frac{1}{2}\frac{{f_t}^2}{\beta {f_x}^2}-\frac{\alpha}{2\beta}. \tag{12}$$

将 (10) 式–(12) 式代入到 f^{-3} 的系数中, 得

$$\gamma\left(\frac{f_{xxx}}{f_x}-\frac{3}{2}\frac{{f_{xx}}^2}{{f_x}^2}\right)_x+\left(\frac{f_t}{f_x}\right)_t+\frac{f_t}{f_x}\left(\frac{f_t}{f_x}\right)_x=0, \tag{13}$$

方程 (13) 在 Möbious 变换下, 保持形式不变, 因此被称为 Schwarzian 形式的 Boussinesq 方程[9].

将 (9) 式—(13) 式代到方程 (1) 中, 比较所得方程中 f^0 的系数, 可发现 u_0 也是 Boussinesq 方程的一个解, 这表示 $u=u_0$ 是 Boussinesq 方程的一个自 Bäcklund 变换. 而且, 对以上截断 Painlevé展开进行总结, 可得到一个非自 Bäcklund 变换.

定理 2 (Bäcklund 变换定理)

如果 f 是 Schwarzian 形式的 Boussinesq 方程 (13) 的解, 那么

$$u=u_0=\frac{3}{2}\frac{\gamma {f_{xx}}^2}{\beta {f_x}^2}-\frac{2\gamma f_{xxx}}{\beta f_x}-\frac{1}{2}\frac{{f_t}^2}{\beta {f_x}^2}-\frac{\alpha}{2\beta} \tag{14}$$

也是 Boussinesq 方程 (1) 的解.

定理 3 (Bäcklund 变换定理)

如果 f 是 Schwarzian 形式的 Boussinesq 方程 (13) 的解, 那么

$$u = u_0 + \frac{u_1}{f} + \frac{u_2}{f^2} = \frac{3}{2}\frac{\gamma f_{xx}{}^2}{\beta f_x{}^2} - \frac{2\gamma f_{xxx}}{\beta f_x} - \frac{1}{2}\frac{f_t{}^2}{\beta f_x{}^2} - \frac{\alpha}{2\beta} + \frac{6\gamma f_{xx}}{f\beta} - \frac{6\gamma f_x{}^2}{\beta f^2} \tag{15}$$

也是 Boussinesq 方程 (1) 的解.

4 单参数群变换

将 $\frac{6\gamma f_{xx}}{\beta}$ 代入 Boussinesq 方程 (1) 的对称决定性方程, 可发现 $\frac{6\gamma f_{xx}}{\beta}$ 是 Boussinesq 方程 (1) 的一个非局域对称. 为了将传统的点李对称和非局域对称结合在一起, 我们需要建立一个包含 Boussinesq 方程、Schwarzian 形式的 Boussinesq 方程以及这两个方程的变换关系式的拓展系统, 其形式如下:

$$u_{tt} + \alpha u_{xx} + \beta(u^2)_{xx} + \gamma u_{xxxx} = 0, \tag{16a}$$

$$\gamma\left(\frac{f_{xxx}}{f_x} - \frac{3}{2}\frac{f_{xx}{}^2}{f_x{}^2}\right)_x + \left(\frac{f_t}{f_x}\right)_t + \frac{f_t}{f_x}\left(\frac{f_t}{f_x}\right)_x = 0, \tag{16b}$$

$$u = \frac{3}{2}\frac{\gamma f_{xx}{}^2}{\beta f_x{}^2} - \frac{2\gamma f_{xxx}}{\beta f_x} - \frac{1}{2}\frac{f_t{}^2}{\beta f_x{}^2} - \frac{\alpha}{2\beta}, \tag{16c}$$

$$f_x = g, \tag{16d}$$

$$f_{xx} = h. \tag{16e}$$

Boussinesq 方程的对称 σ^u 也相应地拓展为满足下式的四分量对称 $\{\sigma^u, \sigma^f, \sigma^g, \sigma^h\}$,

$$\sigma = \begin{pmatrix}\sigma^u\\ \sigma^f\\ \sigma^g\\ \sigma^h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{6\gamma f_{xx}}{\beta}\\ -f^2\\ -2ff_x\\ -2f_x{}^2 - 2ff_{xx}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{6\gamma h}{\beta}\\ -f^2\\ -2fg\\ -2g^2 - 2fh\end{pmatrix}. \tag{17}$$

对方程 (16), 我们也可以研究它的全点李对称. 基于这个目的, 四分量对称 $\{\sigma^u, \sigma^f, \sigma^g, \sigma^h\}$ 应该满足 Boussinesq 方程的线性化的非线性系统. 按照点李对称的方法, 经过计算可得总的对称矢量为

$$\underline{V} = C_1\underline{V_1} + C_2\underline{V_2} + C_3\underline{V_3} + C_4\underline{V_4} + C_5\underline{V_5} + C_6\underline{V_6}, \tag{18}$$

各个对称矢量为:

$$\begin{aligned}
&\underline{V_1} = \frac{x}{2}\partial_x + t\partial_t - u\partial_u - \frac{\alpha}{2\beta}\partial_u - \frac{g}{2}\partial_g - h\,\partial_h,\\
&\underline{V_2} = \partial_x, \quad \underline{V_3} = \partial_t,\\
&\underline{V_4} = -h\partial_u + \frac{\beta f^2}{6\gamma}\partial_f + \frac{g\beta f}{3\gamma}\partial_g + \frac{\beta(fh + g^2)}{3\gamma}\partial_h,\\
&\underline{V_5} = -f\partial_f - g\partial_g - h\partial_h, \quad \underline{V_6} = -\partial_f.
\end{aligned} \tag{19}$$

其中, $\underline{V_1}$, $\underline{V_5}$ 表示标度变换, $\underline{V_2}$ 表示空间平移不变性, $\underline{V_3}$ 代表时间平移不变性, $\underline{V_4}$ 与非局域对称关联, 而 $\underline{V_6}$ 则表示相平移不变性.

由对称矢量 (19) 式, 可得到六个单参数不变子群:

$$g_\varepsilon(\underline{V_1}) : \{x, t, u, f, g, h\} \longrightarrow \left\{x\,\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{2}}, t\,\mathrm{e}^{\varepsilon}, \mathrm{e}^{-\varepsilon}u + \frac{\alpha}{2\beta}(\mathrm{e}^{-\varepsilon} - 1), f, g\,\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}}, h\,\mathrm{e}^{-\varepsilon}\right\}, \tag{20a}$$

$$g_\varepsilon(\underline{V_2}) : \{x, t, u, f, g, h\} \longrightarrow \{x + \varepsilon,\ t,\ u,\ f,\ g,\ h\}, \tag{20b}$$

$$g_\varepsilon(\underline{V_3}) : \{x, t, u, f, g, h\} \longrightarrow \{x,\ t + \varepsilon,\ u,\ f,\ g,\ h\}, \tag{20c}$$

$$g_\varepsilon(\underline{V_4}) : \{x, t, u, f, g, h\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x,\ t,\ u - \frac{6\gamma\varepsilon^2\beta g^2}{(\varepsilon\beta f - 6\gamma)^2} + \frac{6\gamma\varepsilon h}{\varepsilon\beta f - 6\gamma},\ \frac{6\gamma f}{6\gamma - \varepsilon\beta f},\\ \frac{36 g\gamma^2}{(\varepsilon\beta f - 6\gamma)^2},\ \frac{36\gamma^2(-2g^2\varepsilon\beta + fh\varepsilon\beta - 6h\gamma)}{(\varepsilon\beta f - 6\gamma)^3}\end{array}\right\}, \tag{20d}$$

$$g_\varepsilon(\underline{V_5}) : \{x, t, u, f, g, h\} \longrightarrow \{x,\ t,\ u,\ \mathrm{e}^{(-\varepsilon)}f,\ \mathrm{e}^{(-\varepsilon)}g,\ \mathrm{e}^{(-\varepsilon)}h\}, \tag{20e}$$

$$g_\varepsilon(\underline{V_6}) : \{x, t, u, f, g, h\} \longrightarrow \{x,\ t,\ u,\ f - \varepsilon,\ g,\ h\}. \tag{20f}$$

从以上六个单参数不变子群, 可到到下列 Bäcklund 变换定理.

定理 4 (单参数群变换)

如果 $\{u(x,t), f(x,t), g(x,t), h(x,t)\}$ 是拓展的 Boussinesq 系统 (16) 的一组解, 则下列函数也是拓展的 Boussinesq 系统 (16) 的一组解,

$$\left\{\begin{array}{ll}\overline{u}_1=\mathrm{e}^{-\varepsilon}\,u(x\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}},t\mathrm{e}^{-\varepsilon})+\dfrac{\alpha}{2\,\beta}(\mathrm{e}^{-\varepsilon}-1), & \overline{f}_1=f(x\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}},t\mathrm{e}^{-\varepsilon}),\\ \overline{g}_1=g(x\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}},t\mathrm{e}^{-\varepsilon})\,\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}}, & \overline{h}_1=h(x\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{2}},t\mathrm{e}^{-\varepsilon})\,\mathrm{e}^{-\varepsilon}\end{array}\right\}, \tag{21a}$$

$$\{\overline{u}_2=u(x-\varepsilon,t),\quad \overline{f}_2=f(x-\varepsilon,t),\quad \overline{g}_2=g(x-\varepsilon,t),\quad \overline{h}_2=h(x-\varepsilon,t)\}, \tag{21b}$$

$$\{\overline{u}_3=u(x,t-\varepsilon),\ \overline{f}_3=f(x,t-\varepsilon),\quad \overline{g}_3=g(x,t-\varepsilon),\quad \overline{h}_3=h(x,t-\varepsilon)\}, \tag{21c}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{u}_4=u(x,t)-\dfrac{6\,\gamma\,\varepsilon^2\,\beta\,g(x,t)^2}{(\varepsilon\,\beta\,f(x,t)-6\,\gamma)^2}+\dfrac{6\,\gamma\,\varepsilon\,h(x,t)}{\varepsilon\,\beta\,f(x,t)-6\,\gamma},\ \overline{f}_4=\dfrac{6\,\gamma\,f(x,t)}{6\,\gamma-\varepsilon\,\beta\,f(x,t)},\\ \overline{g}_4=\dfrac{36\gamma^2 g(x,t)}{(\varepsilon\beta f(x,t)-6\gamma)^2},\ \overline{h}_4=\dfrac{36\gamma^2(\varepsilon\beta f(x,t)h(x,t)-2\varepsilon\beta g(x,t)^2-6\gamma h(x,t))}{(\varepsilon\,\beta\,f(x,t)-6\,\gamma)^3}\end{array}\right\}, \tag{21d}$$

$$\{\overline{u}_5=u(x,t),\quad \overline{f}_5=\mathrm{e}^{(-\varepsilon)}f(x,t),\quad \overline{g}_5=\mathrm{e}^{(-\varepsilon)}\,g(x,t),\quad \overline{h}_5=\mathrm{e}^{(-\varepsilon)}h(x,t)\}, \tag{21e}$$

$$\{\overline{u}_6=u(x,t),\quad \overline{f}_6=f(x,t)-\varepsilon,\quad \overline{g}_6=g(x,t),\qquad \overline{h}_6=h(x,t)\}. \tag{21f}$$

5 全点李对称相似解

对称性理论是求解偏微分方程的一种有效系统的方法[13–19]. 从对称矢量 (19) 式, 不仅可以得到单参数不变子群和群不变解, 而且可以得到Boussinesq的相似解和约化方程. 将约化方程的严格解和相似解相结合, 则可以得到所研究系统的严格解. 可得到下列四组非平庸情况.

情况 1 $C_1\neq 0, C_4\neq 0$.

在种情这况, 群不变量可写为

$$\xi=\frac{C_3+C_1\,t}{C_1\,(2\,C_2+C_1\,x)^2}. \tag{22}$$

相似解的形式为

$$\begin{aligned}u=&\frac{U(\xi)}{(2\,C_2+C_1\,x)^2}-\frac{(4\,C_2+C_1\,x)\,\alpha\,C_1\,x}{2\,\beta(2\,C_2+C_1\,x)^2}\\&-\frac{6\,\gamma\,C_4\,H(\xi)\,\mathrm{e}^{(-2\,F(\xi)\,C_1)}}{(2\,C_2+C_1\,x)^2\,\delta}\\&\times\tanh\left[\frac{\delta\ln(2\,C_2+C_1\,x)+\delta F(\xi)\,C_1}{3\,\gamma\,C_1}\right]\\&+\frac{6\,\beta\,\gamma\,{C_4}^2\,G(\xi)^2\,\mathrm{e}^{(-2\,F(\xi)\,C_1)}}{\delta^2\,(2\,C_2+C_1\,x)^2}\\&\times\mathrm{sech}\left[\frac{\delta\ln(2\,C_2+C_1\,x)+\delta F(\xi)\,C_1}{3\,\gamma\,C_1}\right]^2,\end{aligned} \tag{23a}$$

$$f=\frac{3\,\gamma\,C_5}{C_4\,\beta}-\frac{\delta}{C_4\,\beta}\tanh\left[\frac{\delta\ln(2\,C_2+C_1\,x)+\delta F(\xi)\,C_1}{3\,\gamma\,C_1}\right], \tag{23b}$$

$$\begin{aligned}g=&\frac{G(\xi)\,\mathrm{e}^{(-F(\xi)\,C_1)}}{(2\,C_2+C_1\,x)}\\&\times\mathrm{sech}\left[\frac{\delta\ln(2\,C_2+C_1\,x)+\delta F(\xi)\,C_1}{3\,\gamma\,C_1}\right]^2,\end{aligned} \tag{23c}$$

$$\begin{aligned}h=&\frac{H(\xi)\,\mathrm{e}^{(-2\,F(\xi)\,C_1)}}{(2\,C_2+C_1\,x)^2}\\&\times\mathrm{sech}\left[\frac{\delta\ln(2\,C_2+C_1\,x)+\delta F(\xi)\,C_1}{3\,\gamma\,C_1}\right]^2\\&+\frac{2\,\beta\,C_4\,G(\xi)^2\,\mathrm{e}^{(-2\,F(\xi)\,C_1)}}{(2\,C_2+C_1\,x)^2\,\delta}\\&\times\frac{\sinh\left[\dfrac{\delta\ln(2\,C_2+C_1\,x)+\delta F(\xi)\,C_1}{3\,\gamma\,C_1}\right]}{\cosh\left[\dfrac{\delta\ln(2\,C_2+C_1\,x)+\delta F(\xi)\,C_1}{3\,\gamma\,C_1}\right]^3},\end{aligned} \tag{23d}$$

其中 $\delta=\sqrt{6\,\gamma\,\beta\,C_4\,C_6+9\,\gamma^2\,{C_5}^2}$, 约化函数 $\{U(\xi), F(\xi), G(\xi), H(\xi)\}$需要满足相应的约化方程. 这种情况的约化方程非常长, 这里省略不写.

情况 2 $C_1\neq 0, C_4=0$.

$\{\sigma^u,\sigma^f,\sigma^g,\sigma^h\}$ 包含C_4, 而C_4 是与非局域对称相关联的, 那么如果令 $C_4=0$, 则相似解会变得更加简化. 这样, 相似解为:

$$u=-\frac{4\,x\,\alpha\,C_1\,C_2+x^2\,\alpha\,{C_1}^2-2\,U(\xi)\,\beta}{2\,\beta\,(2\,C_2+C_1\,x)^2}, \tag{24a}$$

$$f=(2\,C_2+C_1\,x)^{\left(-\frac{2\,C_5}{C_1}\right)}\,F(\xi)-\frac{C_6}{C_5}, \tag{24b}$$

$$g=(2\,C_2+C_1\,x)^{\left(-1-\frac{2\,C_5}{C_1}\right)}\,G(\xi), \tag{24c}$$

$$h=(2\,C_2+C_1\,x)^{\left(-2-\frac{2\,C_5}{C_1}\right)}\,H(\xi)\,. \tag{24d}$$

与情况一相比, 时间和空间的对称性都没有改变, 因此这种情况的群不变量与情况一相同, 仍为

$$\xi=\frac{C_3+C_1\,t}{C_1\,(2\,C_2+C_1\,x)^2}\,. \tag{25}$$

将 (24b) 式代入 (16d) 式和 (16e) 式, 则变量 f 和 g 变成:

$$g=-2\,(2\,C_2+C_1\,x)^{\left(-1-\frac{2\,C_5}{C_1}\right)}\,(C_1F_\xi\,\xi+C_5F), \tag{26}$$

$$\begin{aligned}h=&\,2\,(2\,C_2+C_1\,x)^{\left(-2-\frac{2\,C_5}{C_1}\right)}(2{C_1}^2F_{\xi\xi}\xi^2+3{C_1}^2F_\xi\,\xi\\&+C_1C_5F+4\,C_1F_\xi C_5\xi+2\,{C_5}^2F),\end{aligned} \tag{27}$$

将 (24b) 式代到 (16c) 式, 可以得到用和 F 表示的 u 的表达式, 将 (24b) 代入到 (16b) 式, 可以得到 F 满足的约束方程. 由于这两个式子都很长, 此处省略不写.

情况 3 $C_1=0, C_2\neq 0, C_4\neq 0$.

(18) 式和 (19) 式说明空间 x 和时间 t 的对称受到 C_1 的影响. 当 $C_1=0$ 时, 群不变量 ξ 将比情况一和情况二的群不变量简单. 此时, 群不变量变为

$$\xi=\frac{C_2t-C_3x}{C_2}, \tag{28}$$

相似解为:

$$u=U(\xi)+\frac{3\,\gamma\,C_4\mathrm{e}^{\frac{\delta\,F(\xi)}{3\,C_2\,\gamma}}H(\xi)}{\delta\left[\mathrm{e}^{\frac{\delta\,(x+F(\xi))}{3\,C_2\,\gamma}}+1\right]}-\frac{24\,\beta\,\gamma\,{C_4}^2G(\xi)^2}{\delta^2\left[\mathrm{e}^{\frac{\delta\,(x+F(\xi))}{3\,C_2\,\gamma}}+1\right]^2}, \tag{29a}$$

$$f=-\frac{\delta}{\beta\,C_4}\tanh\left[\frac{\delta\,(x+F(\xi))}{6\,\gamma\,C_2}\right]+\frac{3\,\gamma\,C_5}{\beta\,C_4}, \tag{29b}$$

$$g=-\frac{2\,G(\xi)}{\cosh\left[\frac{\delta\,(x+F(\xi))}{3\,C_2\,\gamma}\right]+1}, \tag{29c}$$

$$h=\frac{\mathrm{e}^{\frac{\delta\,(2\,F(\xi)+x)}{3\,C_2\,\gamma}}H(\xi)}{\left[\mathrm{e}^{\frac{\delta\,(x+F(\xi))}{3\,C_2\,\gamma}}+1\right]^2}-\frac{16\,\beta\,C_4\,G(\xi)^2\,\mathrm{e}^{\frac{\delta\,(x+F(\xi))}{3\,C_2\,\gamma}}}{\delta\left[\mathrm{e}^{\frac{\delta\,(x+F(\xi))}{3\,C_2\,\gamma}}+1\right]^3}. \tag{29d}$$

其中 $F(\xi)$ 满足

$$\begin{aligned}&27{C_2}^2\,{C_3}^5\gamma^2{F_{\xi\xi}}^3+4F_{\xi\xi}{C_3}^4\,C_2\delta^2\,{F_\xi}^3\\&+(-6{C_3}^3{C_2}^2\delta^2F_{\xi\xi}+9\,{C_3}^5\,F_{\xi\xi\xi\xi}\,{C_2}^2\,\gamma^2)\,{F_\xi}^2\\&+\{[2\,{C_2}^3\,(2\,\delta^2\,{C_3}^2-9\,\gamma\,{C_2}^4)\\&-36\,{C_2}^2\,{C_3}^5\,\gamma^2\,F_{\xi\xi\xi}]\,F_{\xi\xi}-18\,{C_2}^3\,{C_3}^4\,F_{\xi\xi\xi\xi}\,\gamma^2\}\,F_\xi\\&-{C_3}^5F_{\xi\xi}\,\delta^2\,{F_\xi}^4\\&+\left[36\gamma^2{C_3}^4{C_2}^3F_{\xi\xi\xi}+\frac{{C_2}^4\,(9\,\gamma{C_2}^4-\delta^2{C_3}^2)}{C_3}\right]\\&\times F_{\xi\xi}+9\gamma^2{C_2}^4F_{\xi\xi\xi\xi}{C_3}^3=0.\end{aligned} \tag{30}$$

将 (29b) 式代到 (16c) 式, 可得到关于 Boussinesq 方程的下列 Bäcklund 变换.

定理 5 (Bäcklund 变换定理).

如果 F 满足 (30) 式, 则 Boussinesq 方程的解为

$$\begin{aligned}u=&-\frac{1}{6}\,\frac{(C_2-F_\xi\,C_3)^2\,\delta^2}{\beta\,\gamma\,{C_2}^4}\tanh\left[\frac{\delta\,(x+F)}{6\,C_2\,\gamma}\right]^2\\&+\frac{\delta\,{C_3}^2\,F_{\xi\xi}}{{C_2}^3\,\beta}\tanh\left[\frac{\delta\,(x+F)}{6\,C_2\,\gamma}\right]\\&-\frac{1}{18\gamma\beta{C_2}^4(C_2-F_\xi\,C_3)^2}\{3\,{C_2}^2\,(3\,\gamma\,{C_2}^4\\&+3\,{C_2}^2\,\alpha\,\gamma\,{C_3}^2-4\,\delta^2\,{C_3}^2)\,{F_\xi}^2\\&+[36\,F_{\xi\xi\xi}\,{C_3}^4\,{C_2}^2\,\gamma^2-2\,{C_2}^3\,C_3\,(9\,{C_2}^2\,\alpha\,\gamma\\&-4\,\delta^2)]\,F_\xi-27\gamma^2{F_{\xi\xi}}^2\,{C_3}^4\,{C_2}^2\\&-2\delta^2{F_\xi}^4{C_3}^4-36F_{\xi\xi\xi}{C_3}^3{C_2}^3\,\gamma^2\\&+{C_2}^4\,(9\alpha\gamma{C_2}^2-2\delta^2)+8\,\delta^2\,C_2\,{F_\xi}^3\,{C_3}^3\}.\end{aligned} \tag{31}$$

情况 4 $C_1=0, C_2\neq 0, C_4=0$.

这种情况下, 拓展系统 (16) 的相似解为:

$$u=U(\xi), \tag{32a}$$

$$f=\mathrm{e}^{\left(-\frac{C_5\,x}{C_2}\right)}\,F(\xi)-\frac{C_6}{C_5}, \tag{32b}$$

$$g=G(\xi)\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{C_5\,x}{C_2}\right)}, \tag{32c}$$

$$h=H(\xi)\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{C_5\,x}{C_2}\right)}, \tag{32d}$$

这里, 群不变量 ξ 为

$$\xi=\frac{C_2t-C_3x}{C_2}. \tag{33}$$

将 (32b) 式代入到 (16b) 式, 可得到 $F(\xi)$ 满足的约束方程. 将 (32b) 式代入到 (16c) 式, 则得到下列

定理.

定理 6 (Bäcklund 变换定理).

如果 $F(\xi)$满足 (32b) 式, 则 Boussinesq 方程的解可以写为

$$\begin{aligned} u = & -\frac{1}{2}\frac{1}{(F_\xi C_3 + F C_5)^2 {C_2}^2 \beta}\{[4\gamma F_{\xi\xi\xi}{C_3}^4 \\ & + 2C_3C_5F(2{C_5}^2\gamma + \alpha {C_2}^2)]F_\xi - 3\gamma {F_{\xi\xi}}^2{C_3}^4 \\ & + {C_2}^2(\alpha {C_3}^2 + {C_2}^2){F_\xi}^2 + 6\gamma F F_{\xi\xi}{C_3}^2{C_5}^2 \\ & + 4\gamma F_{\xi\xi\xi}{C_3}^3 F C_5 + {C_5}^2F^2({C_5}^2\gamma + \alpha {C_2}^2)\}. \end{aligned} \tag{34}$$

6 Boussinesq 方程的 CRE 相容性

本节将通过 CRE (consistent Riccati expansion, CRE) 方法来讨论 Boussinesq 方程的严格解[20]. Riccati 方程的形式为

$$R_w = a_0 + a_1R(w) + a_2R(w)^2, \tag{35}$$

这里的 a_0, a_1和 a_2是任意常数. Riccati 方程的严格解可写为

$$R(w) = -\frac{\sqrt{\theta}}{2a_2}\tanh\left(\frac{\sqrt{\theta}w}{2}\right) + \frac{a_1}{2a_2}, \tag{36}$$

其中,

$$\theta \equiv {a_1}^2 - 4a_0a_2. \tag{37}$$

对于一个偏微分系统

$$\begin{aligned} & P(x,t,v) = 0, \quad P = \{P_1, P_2, ..., P_m\}, \\ & x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}, \quad v = \{v_1, v_2, ..., v_m\}, \end{aligned} \tag{38}$$

我们可假设它可以展开为

$$v_i = \sum_{j=0}^{J_i} v_{i,j}R^j(w), \tag{39}$$

这里的 $R(w)$是 Riccati 方程的严格解. 将 (39) 式代入到 (38) 式, 并令 $R^i(w)$的系数为零, 可得:

$$P_{j,i}(x,t,v_{l,k},w) = 0. \tag{40}$$

如果系统 (40) 是自洽的, 则展开式 (39) 式是 "CRE", 且非线性系统 (38) 是"CRE"相容系统[20].

为了得到孤立波-周期波碰撞解, 可应用 CRE 方法. CRE 方法可被用于证明一个系统是 CRE 相容系统, 并可用于寻求非线性系统的碰撞波解. 对 Boussinesq 方程, u 可展开成截断展开的形式:

$$u = u_3 + u_4R(w) + u_5R(w)^2, \tag{41}$$

这里, u_3, u_4, u_5和 w都是 x和 t的函数, $R(w)$是 Riccati 方程的一个解.

将 (35) 式和 (41) 式代入到方程 (1) 中, 并令 $R(w)$所有阶次的系数为零, 可得

$$\begin{aligned} u_3 = & -\frac{\gamma({a_1}^2 + 8a_2a_0){w_x}^2}{2\beta} - \frac{\alpha + 6\gamma w_{xx}a_1}{2\beta} \\ & - \frac{2\gamma w_{xxx}}{w_x\beta} - \frac{{w_t}^2 - 3\gamma {w_{xx}}^2}{2\beta {w_x}^2}, \end{aligned} \tag{42a}$$

$$u_4 = -\frac{6a_2\gamma({w_x}^2a_1 + w_{xx})}{\beta}, \tag{42b}$$

$$u_5 = -\frac{6\gamma {w_x}^2{a_2}^2}{\beta}, \tag{42c}$$

这里 w 满足

$$\begin{aligned} & {w_t}^2w_{xx} - \gamma(4a_2a_0 - {a_1}^2)w_{xx}{w_x}^4 - (\gamma w_{xxxx} + w_{tt}){w_x}^2 \\ & + 4\gamma w_xw_{xx}w_{xxx} - 3\gamma {w_{xx}}^3 = 0. \end{aligned} \tag{43}$$

通过 CRE 和 CRE 相容性的定义, Boussinesq 方程显然是一个 CRE 相容系统. 基于以上讨论, 可得到如下定理:

定理 7 (CRE 相容性定理)

Boussinesq 方程是一个 CRE 相容系统. 如果 w 是相容性条件 (43) 式的一个解, 则下列形式的 u 也是 Boussinesq 方程的一个解.

$$\begin{aligned} u = & u_3 + u_4R(w) + u_5R(w)^2 \\ = & -\frac{\gamma({a_1}^2 + 8a_2a_0){w_x}^2}{2\beta} - \frac{\alpha + 6\gamma w_{xx}a_1}{2\beta} \\ & - \frac{2\gamma w_{xxx}}{w_x\beta} - \frac{{w_t}^2 - 3\gamma {w_{xx}}^2}{2\beta {w_x}^2} \\ & - \frac{6a_2\gamma({w_x}^2a_1 + w_{xx})}{\beta}R(w) \\ & - \frac{6\gamma {w_x}^2{a_2}^2}{\beta}R(w)^2, \end{aligned} \tag{44}$$

这里的 $R(w)$和 θ 分别满足 (36) 式和 (37) 式.

7 孤立波-周期波碰撞解

从 Boussinesq 方程的 CRE 性质, 可进一步研究 Boussinesq 方程的严格解. 将 (36) 式代入到 (44) 式中可得

$$
\begin{aligned}
u = & -\frac{3}{2}\frac{{w_x}^2\gamma\,\theta}{\beta}\tanh\left(\frac{w\sqrt{\theta}}{2}\right)^2 \\
& + \frac{3\gamma\,w_{xx}\,\sqrt{\theta}}{\beta}\tanh\left(\frac{w\sqrt{\theta}}{2}\right) - \frac{\alpha}{2\beta} \\
& - \frac{\gamma\,(4\,a_2\,a_0 - {a_1}^2)\,{w_x}^2}{\beta} - \frac{2\gamma\,w_{xxx}}{w_x\,\beta} \\
& - \frac{1}{2}\frac{{w_t}^2 - 3\gamma\,{w_{xx}}^2}{\beta\,{w_x}^2}.
\end{aligned} \tag{45}
$$

从 (45) 式可看到, 如果我们想知道 u 的具体形式, 那么需要先知道 w 的表达式. 如果 w 具有如下形式:

$$
w = k_1\,x + \omega_1\,t + a_3\,E_\pi(\mathrm{sn}(k_2\,x + \omega_2\,t,\,m),\,n,\,m), \tag{46}
$$

这里 $k_1, k_2, \omega_1, \omega_2, a_3, n$ 和 m 是常数, E_π是第三类不完全椭圆积分. 将 (46) 式代入到 (43) 式中, 并令 $\mathrm{sn}(k_2\,x + \omega_2\,t,\,m)$的所有不同阶次的系数为零, 可发现参数应该满足:

$$
\begin{cases}
a_0 = \dfrac{n\,{a_1}^2\,{a_3}^2 - 4\,m^2 + 4\,m^2\,n - 4\,n^2 + 4\,n}{4\,{a_3}^2\,a_2\,n}, \\[2ex]
\gamma = \dfrac{3\,[{k_1}^2\,a_4\,n^2 - k_1\,{a_4}^2\,(1+m^2)\,n + m^2\,{a_4}^3]\,k_1\,{\omega_2}^2\,n\,{a_3}^2}{{k_2}^2\,[{k_1}^2\,(k_1 + 3\,a_4)\,n^2 - 2\,k_1\,a_4\,(k_1 + a_4)\,(1+m^2)\,n + m^2\,(a_4 + 3\,k_1)\,{a_4}^2]^2}, \\[2ex]
\omega_1 = -\dfrac{\omega_2 k_1[{k_1}^2(3a_4 - k_1)n^2 - 2k_1a_4(2a_4 - k_1)(1+m^2)n + m^2(5a_4 - 3k_1){a_4}^2]}{k_2[{k_1}^2\,(k_1 + 3a_4)\,n^2 - 2k_1a_4(k_1 + a_4)(1+m^2)\,n + m^2(a_4 + 3\,k_1)\,{a_4}^2]},
\end{cases} \tag{47}
$$

或

$$
\begin{cases}
\omega_1 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_2\,k_1}{k_2}, \\[2ex]
\gamma = -\dfrac{3}{16}\dfrac{{\omega_2}^2\,{a_3}^2\,(3\,a_4 - 2\,k_1\,n)}{{k_2}^2\,a_4\,(k_1\,n - a_4)^2}, \\[2ex]
m = \pm\dfrac{\sqrt{(2\,k_1\,n - 3\,a_4)\,a_4\,k_1\,n\,(k_1\,n - 2\,a_4)}}{a_4\,(3\,a_4 - 2\,k_1\,n)}, \\[2ex]
a_0 = \dfrac{1}{4}\dfrac{{a_1}^2}{a_2} - \dfrac{(n-1)\,({k_1}^2\,n + 2\,k_1\,n\,a_3\,k_2 - {k_1}^2 - 4\,k_1\,a_3\,k_2 - 3\,{a_3}^2\,{k_2}^2)}{a_2\,(2\,k_1\,n - 3\,a_4)\,{a_3}^2\,a_4},
\end{cases} \tag{48}
$$

这里$a_4 = k_1 + a_3\,k_2$.

将 (46) 式代入到 (45) 式中, 得:

$$
u = \frac{3}{2}\frac{(a_4 - k_1\,n\,S^2)^2\gamma\theta T^2}{(n\,S^2 - 1)^2\beta} + \frac{6\gamma a_3{k_2}^2nSCD\sqrt{\theta}\,T}{(nS^2 - 1)^2\beta} - \frac{[a_5S^8 + a_6S^6 + a_7S^4 + a_8S^2 + a_9]}{2[(k_1nS^2 - a_4)^2(nS^2 - 1)^2\beta]}, \tag{49}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
& T \equiv \tanh\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\theta}\,[k_1\,x + \omega_1\,t + a_3\,E_\pi(\mathrm{sn}(k_2\,x + \omega_2\,t,\,m),\,n,\,m)]\right\}, \\
& S \equiv \mathrm{sn}(k_2\,x + \omega_2\,t,\,m),\ C \equiv \mathrm{cn}(k_2\,x + \omega_2\,t,\,m),\ D \equiv \mathrm{dn}(k_2\,x + \omega_2\,t,\,m), \\
& a_5 = -n^3(2n\gamma\theta{k_1}^4 - \alpha{k_1}^2n - {\omega_1}^2n + 8\gamma a_3{k_2}^3k_1m^2), \\
& a_6 = 2n^3[8\gamma a_3{k_2}^3k_1(m^2+1) + 4\gamma a_4\theta{k_1}^3 - \alpha{k_1}^2 - \alpha k_1a_4 - 2{\omega_1}^2 - \omega_1a_3\omega_2] - 4n^2m^2a_3\gamma{k_2}^3(a_4 + 3k_1), \\
& a_7 = 24n\gamma a_3{k_2}^3(a_4\,m^2 - n^2k_1) + n^2({\omega_2}^2{a_3}^2 - 4\,\gamma\,{a_3}^2{k_2}^4 - 12\gamma{k_1}^2{a_4}^2{a_1}^2 \\
& \qquad + 6{\omega_1}^2 + 48\gamma a_2{k_1}^2{a_4}^2a_0 + 6\,\omega_1a_3\omega_2 - 4\gamma{a_3}^2{k_2}^4m^2 + 6\alpha k_1a_4 + \alpha{a_3}^2{k_2}^2), \\
& a_8 = 4\gamma n^2a_3{k_2}^3(k_1 + 3a_4) + 8n\gamma k_1{a_4}^3\theta - 16\,n\gamma a_3{k_2}^3a_4(m^2+1) \\
& \qquad - 2n({a_3}^2{\omega_2}^2 + \alpha k_1a_4 + 2{\omega_1}^2 + 3\omega_1a_3\omega_2 + {a_4}^2\alpha), \\
& a_9 = {a_4}^2\alpha + (a_3\omega_2 + \omega_1)^2 + 8a_3\gamma{k_2}^3na_4 - 2\gamma{a_4}^4\theta,
\end{aligned} \tag{50}
$$

上式中的参数满足 (47) 式或 (48) 式.

图 1 和图展示了满足约束关系 (47) 的解 (49) 式. 图 1 中的自由参数选为$\{n = 0.2,\ m = 0.5,\ a_1 = 1,\ a_3 = 1,\ k_1 = 1,\ k_2 = 1,\ \omega_2 = 1, \alpha = -0.8, \beta = 1\}$, 图 2 中的自由参数选为$\{n = 0.2,\ m = 0.9,\ a_1 = 1,\ a_3 = 1,\ k_1 = 1,\ k_2 = 1,\ \omega_2 = 1, \alpha = -0.8, \beta = 1\}$. 图 1 和图 2 展示了亮孤子和周期波的碰撞行为. 图 3 展示了图 1 和图 2 中 u 的密度函数, 图 3(a) 对应图 1, 图 3(b) 对应图 2. 两种情况的周期波和孤立波的方向是一致的, 而碰撞处的形状则不相同.

图 4 和图 5 展示了满足参数限制 (48) 式的碰撞波解 (49) 式, 里边的周期波在扭结孤立波上运动, 而不是在常数背景上运动. 图 4 中的自由参数选为 $\{n = 0.4,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2.2,\ k_1 = 1,\ k_2 = -0.22,\ \omega_2 = 1, \alpha = -400, \beta = 80\}$, 其中 (48) 式中的 m 选“+”; 图 5 中的自由参数选为$\{n = 0.6,\ a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_3 = 4,\ k_1 = 1,\ k_2 = -0.12,\ \omega_2 = 0.1, \alpha = -14,\ \beta = 6\}$, 其中 (48) 式中的 m 选“–”. 图 6 展示了图 4 和图 5 中 u 的密度函数, 图 6(a) 对应图 4, 图 6(b) 对应图 5. 图 6 清楚地展示了扭结孤立波和周期波的碰撞.

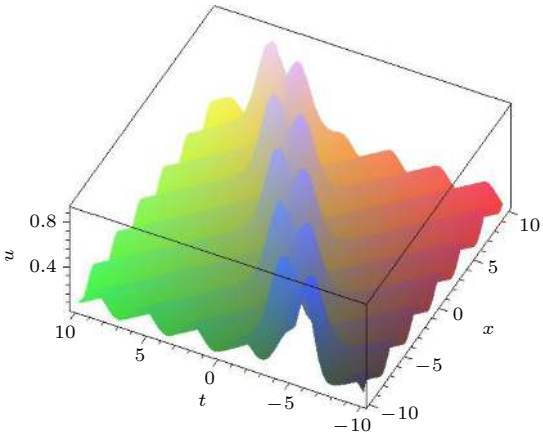

图 1 满足 (47) 式的碰撞波解 (49) 式. 自由参数为$\{n = 0.2,\ m = 0.5,\ a_1 = 1,\ a_3 = 1,\ k_1 = 1,\ k_2 = 1,\ \omega_2 = 1,\ \alpha = -0.8,\ \beta = 1\}$

Fig. 1. The solution (49) with Formula (47). The free parameters are $\{n = 0.2,\ m = 0.5,\ a_1 = 1,\ a_3 = 1,\ k_1 = 1,\ k_2 = 1,\ \omega_2 = 1,\ \alpha = -0.8,\ \beta = 1\}$.

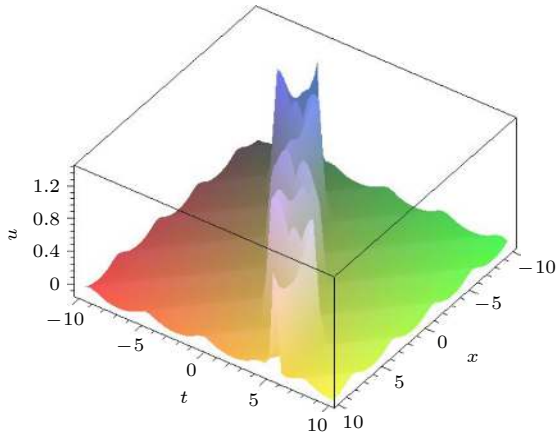

图 2 满足 (47) 式的碰撞波解 (49) 式. 自由参数为 $\{n = 0.2,\ m = 0.9,\ a_1 = 1,\ a_3 = 1,\ k_1 = 1,\ k_2 = 1,\ \omega_2 = 1,\ \alpha = -0.8,\ \beta = 1\}$

Fig. 2. The solution (49) with Formula (47). The free parameters are $\{n = 0.2,\ m = 0.9,\ a_1 = 1,\ a_3 = 1,\ k_1 = 1,\ k_2 = 1,\ \omega_2 = 1,\ \alpha = -0.8,\ \beta = 1\}$.

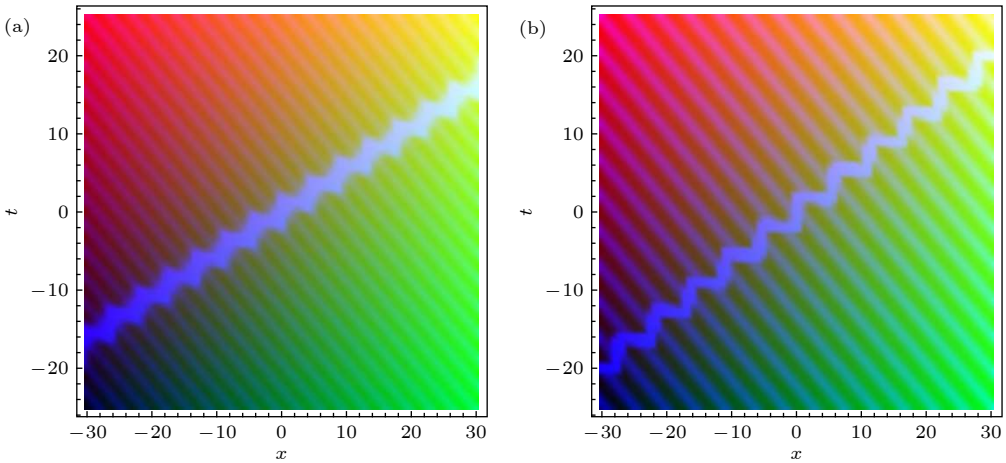

图 3 u 的密度函数图. 图 (a) 的参数与图 1 相同, 图 (b) 的参数与图 2 相同

Fig. 3. The density of u. The parameters of the Fig. (a) are the same as those of Figure 1 and the parameters of the Fig. (b) are the same as those of Figure 2.

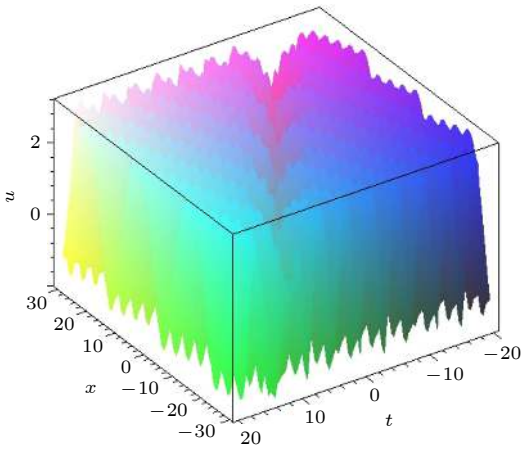

图 4 参数关系满足 (48) 式的碰撞波解 (49) 式的演化图. 自由参数为 $\{n = 0.4,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2.2,\ k_1 = 1,\ k_2 = -0.22,\ \omega_2 = 1,\ \alpha = -400,\ \beta = 80\}$

Fig. 4. The interaction solution (49) with parameter satisfying Formula (48). The free parameters are chosen as $\{n = 0.4,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2.2,\ k_1 = 1,\ k_2 = -0.22,\ \omega_2 = 1,\ \alpha = -400,\ \beta = 80\}$.

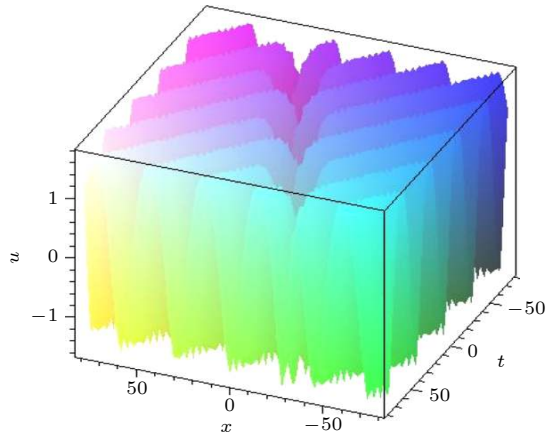

图 5 参数关系满足 (48) 式的碰撞波解 (49) 式. 自由参数为 $\{n = 0.6,\ a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_3 = 4,\ k_1 = 1,\ k_2 = -0.12,\ \omega_2 = 0.1,\ \alpha = -14,\ \beta = 6\}$

Fig. 5. The interaction solution (49) with parameter satisfying Formula (48). The free parameters are selected as $\{n = 0.6,\ a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_3 = 4,\ k_1 = 1,\ k_2 = -0.12,\ \omega_2 = 0.1,\ \alpha = -14,\ \beta = 6\}$.

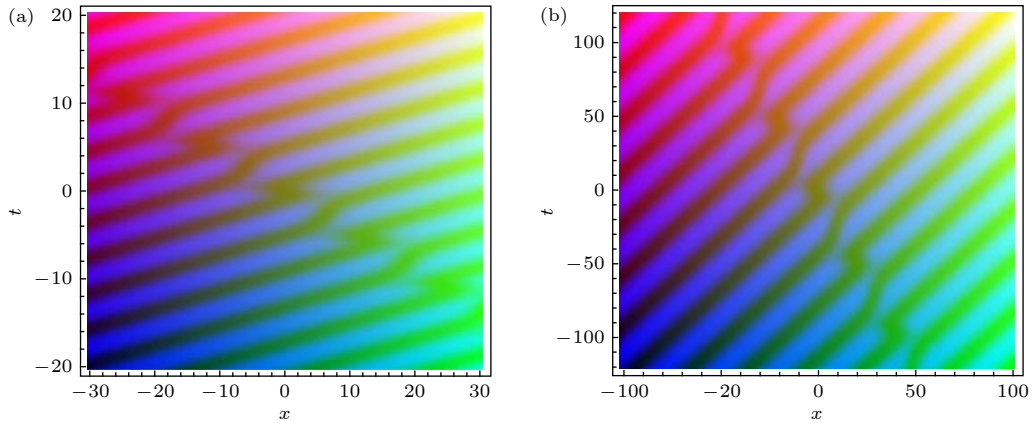

图 6 u 的密度函数图. 图 (a) 对应图 4, 图 (b) 对应图 5

Fig. 6. The density of u. The Fig. (a) is related to Fig. 4 and the Fig. (b) is corresponding to Fig. 5.

8 总结和讨论

本文推导了 Boussinesq 方程的 Lax 对, 说明 Boussinesq 方程是 Lax 可积模型. 运用截断 Painlevé展开法研究了 Boussinesq 方程, 得到了 Boussinesq 方程的自 Bäcklund 变换, 以及 Boussinesq 方程和 Schwarzian 形式的 Boussinesq 方程之间的非自 Bäcklund 变换. 研究了 Boussinesq 方程的全点李对称, 得到了单参数群变换和单参数子群不变解. 运用 CRE 方法研究了 Boussinesq 方程, 证明了 Boussinesq 方程是一个 CRE 相容模型, 得到了 Boussinesq 方程的孤立波-椭圆余弦波碰撞解. Boussinesq 方程广泛地应用于描绘流体动力学、电磁学、等离子体、非线性晶格等物理现象. 它作为一个著名的孤立子方程, 各种各样的激发模式, 以及它在各种物理情景中的应用, 值得不断深入研究.

感谢楼森岳教授和任博博士的宝贵讨论.

参考文献

[1] Boussinesq J 1872 *J. Math. Pures Appl.* **17** 55
[2] Ursell F 1953 *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **49** 685
[3] Daripa P 1998 *J. Comput. Appl. Math.* **100** 161
[4] Guo B, Gao Z, Lin J 2016 *Commun. Theor. Phys.* **64** 589

[5] Liu W 2009 *Z. Naturforschung A* **64** 709
[6] Benny D J, Luke J C 1964 *J. Math. Phys.* **43** 309
[7] Himonas A A, Mantzavinos D 2015 *J. Differ. Equations* **258** 3107
[8] Li S, Zhang W, Bu X 2017 *J. Math. Anal. Appl.* **449** 96
[9] Weiss J 1983 *J. Math. Phys.* **24** 1405
[10] Guo B X, Lin J 2013 *Int. J. Mod. Phys. B* **30** 1640013
[11] Guo B X, Gao Z J, Lin J 2016 *Commun. Theor. Phys.* **66** 589
[12] Liu Y K, Li B 2016 *Chin. J. Phys.* **54** 718
[13] Gao X N, Lou SY, Tang X Y 2013 *J. High Energy Phys.* **5** 029
[14] Olver P J 1993 *Applications of Lie Group to Differential Equations* (2nd ed.) (New York: Springer) pp75–238
[15] Liu P, Zeng B Q, Ren B 2015 *Commun. Theor. Phys.* **63** 413
[16] Liu Y K, Li B 2017 *Chin. Phys. Lett.* **34** 010202
[17] Liu P, Zeng B Q, Deng B B, Yang J R 2015 *AIP Adv.* **5** 087162
[18] Liu P, Wang Y X, Ren B, Li J H 2016 *Commun. Theor. Phys.* **66** 595
[19] Jiao X Y, Jia M, An H L 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 140201 (in Chinese) [焦小玉, 贾曼, 安红利 2019 物理学报 **68** 140201]
[20] Lou S Y 2015 *Stud. Appl. Math.* **134** 372

SPECIAL TOPIC—Nonlinear physics

The Boussinesq equation: Lax pair, Bäcklund transformation, symmetry group transformation and consistent Riccati expansion solvability*

Liu Ping [1)†] Xu Heng-Rui [2)] Yang Jian-Rong [3)]

1) (*School of Electronic and Information Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Zhongshan Institute, Zhongshan* 528402, *China*)

2) (*School of Physics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu* 610054, *China*)

3) (*School of Physics and Electronic Information, Shangrao Normal University, Shangrao* 334001, *China*)

(Received 2 September 2019; revised manuscript received 9 December 2019)

Abstract

The Boussinesq equation is a very important equation in fluid mechanics and some other disciplines. A Lax pair of the Boussinesq equation is proposed. With the help of the truncated Painlevé expansion, auto-Bäcklund transformation of the Boussinesq equation and Bäcklund transformation between the Boussinesq equation and the Schwarzian Boussinesq equation are demonstrated. Nonlocal symmetries of the Boussinesq equation are discussed. One-parameter subgroup invariant solutions and one-parameter group transformations are obtained. The consistent Riccati expansion solvability of the Boussinesq equation is proved and some interaction structures between soliton-cnoidal waves are obtained by consistent Riccati expansion.

Keywords: Boussinesq equation, lax pair, Bäcklund transformation, consistent Riccati expansion

PACS: 02.30.Ik, 02.30.Jr **DOI:** 10.7498/aps.69.20191316

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant Nos. 11775047, 11865013) and the Science and Technology Project of Zhongshan,China(Grant No. 2017B1016).

† Corresponding author. E-mail: liuping49@126.com