

专题：非线性物理

## 弹性管中的怪波\*

陈智敏 段文山†

(西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

(2019年8月30日收到; 2019年9月23日收到修改稿)

利用约化摄动法, 推导了流体在弹性管中的非线性薛定谔方程 (NLSE). 由非线性薛定谔方程的解来近似地描述出真实的怪波, 继而研究怪波解中各个参数对怪波系统振幅、波速的影响. 最后将这一模型应用到人体血管中, 研究怪波在人体动脉血管中传播对人体健康的影响.

**关键词:** 约化摄动法, 非线性薛定谔方程, 怪波解, 动脉血管

**PACS:** 47.10.A-, 47.27.ed, 47.27.nf

**DOI:** 10.7498/aps.69.20191308

## 1 引言

近年来人们对怪波做了大量的研究<sup>[1-6]</sup>. 怪波首先是在海洋上被发现的, 当时在海洋上人们发现一阵突如其来的奇高无比的水墙, 却又在一瞬间消失得无影无踪<sup>[7-9]</sup>, 似乎是“来无影, 去无踪”, 人们就将此现象称为怪波. 由此可知, 在海洋上由怪波产生的浪涛并不像由台风和地震所造成的浪涛那样, 可以提前几个小时或几天预测. 所以怪波对海上船只、军舰等会造成极大的损害<sup>[8]</sup>. 因此, 科学家们对这个现象进行了大量的观测和研究. 1964年, 英国科学家 Draper 给出了怪波的定义<sup>[10]</sup>. 然而, 怪波的各种奇特的性质还未被人们所熟知<sup>[11,12]</sup>, 所以直至现在, 对于怪波的研究也都没有中断过. 后来, 人们发现怪波不仅存在于海洋上, 在许多其他领域中也都相继发现了怪波, 例如: 在等离子体物理学<sup>[13, 14]</sup>、气象学<sup>[15]</sup>、流体力学<sup>[16]</sup>、玻色-爱因斯坦凝聚<sup>[17]</sup>、毛细波<sup>[18]</sup>等领域. 不过由于观测环境的困难和危险, 无法充分理解怪波现象, 人们只好寻求其他方法. 例如: 通过非线性薛定谔方程的一种

解: Peregrine rogue wave<sup>[19]</sup>, 可以近似地描述怪波. 这一解的形式最早由 Peregrine<sup>[19]</sup> 提出. 可以借助对 Peregrine rogue wave 解的研究来了解怪波特性, 从而防止怪波产生高能振幅等危害. 深水下怪波现象对海上的船只威胁最大<sup>[9]</sup>, 由于观测深水下怪波现象具有很大的困难, 人们就试图通过各种方法来描述出在深水下的怪波情况, 但目前还未成功.

流体在弹性管内的流动问题<sup>[20, 21]</sup>一直被人们所关注, 故对于充满流体的弹性管中各种波的传播研究一直是个热门课题. 在充满流体的弹性管波的相关研究有许多<sup>[22-25]</sup>, 但是在此系统中是否会出现怪波还没有任何研究. 本文首次对充满流体的弹性管中的怪波进行了研究. 大家知道, 血液在人体或者动物血管中的流动可以用充满流体的弹性管来近似研究. 因此研究充满流体的弹性管中的怪波问题有很重要的实际意义. 找到能描述血液在血管中流动情况的解, 就可以探究人体血管中哪些参量对血液流动有着重要的影响, 再对其加以控制就可以更深入地了解血液在血管中的流动特性. 这一研究可能对医学有一定的参考意义.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11965019) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [duanws@126.com](mailto:duanws@126.com)

## 2 怪波的理论模型与怪波解

本文研究限制在无限长圆柱管内的不可压缩的流体, 圆柱管的壁是由一根均匀弹性管组成的. 控制流体运动的动力学方程是质量守恒和动量守恒方程<sup>[26]</sup>:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(Au)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2)$$

其中  $A$  是圆柱体的横截面面积,  $u$  是流体的速度,  $p$  是流体压强,  $\rho_0$  是流体的密度. 第三个方程为管道横截面面积与压力的方程<sup>[27-30]</sup>:

$$\frac{2\pi a}{\rho_w} p = \frac{E}{\rho_w a^2} (A - A_0) + \frac{\partial^2(A - A_0)}{\partial t^2}, \quad (3)$$

其中  $\rho_w$  是弹性管壁的密度,  $h$  和  $E$  是弹性管的厚度和杨氏模量,  $a$  是弹性管中液体平衡时管的半径,  $A_0 = \pi a^2$ ,  $\left(\frac{E}{\rho_w a^2}\right)^{1/2}$  是弹性管道径向振动的固有频率. 定义  $A = \pi a^2 A'$ ,  $p = p_0 p'$ ,  $t = T t'$ ,  $x = L x'$ ,  $u = \left(\frac{T}{t}\right) u'$ , 其中  $p_0 = \frac{Eh}{2a}$ ,  $T^2 = \frac{\rho_w a^2}{E}$ ,  $L^2 = \frac{\rho_w a h}{2\rho_0}$ . 代入 (1) 式—(3) 式中, 得到无量纲方程:

$$\frac{\partial A'}{\partial t'} + \frac{\partial(A' u')}{\partial x'} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'}, \quad (5)$$

$$p' = A' - 1 + \frac{\partial^2 A'}{\partial t'^2}, \quad (6)$$

上述复杂的非线性方程组可以通过约化摄动法化为比较简单的且可精确求解的非线性演化方程. 本文由上述方程组推导出了非线性薛定谔方程<sup>[26]</sup>. 假设:  $\xi = \varepsilon(x' - Vt')$ ,  $\tau = \varepsilon^2 t'$ , 其中  $\varepsilon$  是个小量,  $V$  为波的群速度. 将  $A'$ ,  $u'$  和  $p'$  作摄动展开:

$$A' = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{l=-1}^n A^{(n,1)}(\xi, \tau) e^{il(kx' - \omega t')},$$

$$u' = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{l=-1}^n u^{(n,1)}(\xi, \tau) e^{il(kx' - \omega t')},$$

$$p' = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{l=-1}^n p^{(n,1)}(\xi, \tau) e^{il(kx' - \omega t')},$$

将展开式代入 (4) 式—(6) 式中, 并化简得:

$$\omega^2 = \frac{k^2}{1+k^2}, \quad V = \frac{k}{\omega} \left( \frac{1}{(1+k^2)^2} \right) \text{ 以及非线性薛定谔方程:}$$

$$iA'_\tau{}^{(1,1)} + PA'_\xi\xi{}^{(1,1)} + QA'^{(1,1)}|A'^{(1,1)}|^2 = 0, \quad (7)$$

其中

$$P = \frac{3\omega}{2(1+k^2)^2},$$

$$Q = \frac{\omega}{2(1+k^2)} \left[ -\frac{3}{2k^2} + 2 - \frac{1}{V^2 - 1} \left( 4 + \frac{1}{1+k^2} + \frac{4}{(1+k^2)^2} \right) \right],$$

$$A'^{(1,1)} = \frac{A' - 1}{\varepsilon e^{i(k\frac{x}{L} - \omega\frac{t}{T})}}.$$

我们知道非线性薛定谔方程有很多解, 其中有一种是怪波解<sup>[31]</sup>, 其解的形式如下:

$$A'^{(1,1)} = \varepsilon \sqrt{\frac{2P}{Q}} \left[ 1 - \frac{4(1 + 4iP\varepsilon^2 t')}{1 + 4\varepsilon^2(x' - Vt')^2 + 8P\varepsilon^4 t'^2} \right] e^{2iP\varepsilon^2 t'}, \quad (8)$$

代入由上面摄动方法展开的式子可得到管的横截面  $A'$  的解, 其解的形式如下:

$$A' = 1 + \varepsilon \sqrt{\frac{2P}{Q}} \left[ 1 - \frac{4(1 + 4iP\varepsilon^2 t')}{1 + 4\varepsilon^2(x' - Vt')^2 + 8P\varepsilon^4 t'^2} \right] \times e^{i(kx' - \omega t')} e^{2iP\varepsilon^2 t'}, \quad (9)$$

其中  $A' = \frac{A}{\pi a^2}$ ,  $t' = \frac{t}{a} \sqrt{\frac{E}{\rho_w}}$ ,  $x' = x \sqrt{\frac{2\rho_0}{\rho_w a h}}$ ,

$$\sqrt{\frac{2P}{Q}} = \frac{12k^2(3 + 3k^2 + k^4)}{(1+k^2)(9 + 39k^2 + 35k^4 + 12k^6)}.$$

## 3 弹性管模型系统及人体血管参数对怪波的影响

我们知道怪波具有一些奇特的性质, 例如: 它的包络振幅可以在短时间内达到最大值, 并可在短时间内也会达到零, 这就是怪波似乎“来无影, 去无踪”的原因. 图 1 为实验室坐标下的怪波在不同时间点上所在的各个位置的等高图, 它表明怪波从某一位置突然出现然后又突然消失. 从图中怪波出现的时间和位置可以推测即将出现怪波的时间和位置, 这对预防由怪波引起的危害有一定的帮助.

下面分析动物血管中怪波传播的性质. 将文献 [32,33] 中兔胸主动脉实验得到的兔胸主动脉的半径、血管壁厚度、血管壁的杨氏模量等参数值代入怪波解中画图. 兔胸主动脉血管的半径  $a = 2.58 \text{ mm}$ , 血管壁厚度  $h = 0.25 \text{ mm}$ , 血管壁的杨氏模量  $E =$

936.5 kpa. 图 2 为不同时刻的怪波在血管中纵向传播的图形, 图中表明在血管中的不同位置, 怪波振幅是不同的, 并且怪波在兔子的主动脉血管中的传播速度大约为  $5.8 \text{ m/s}$ .

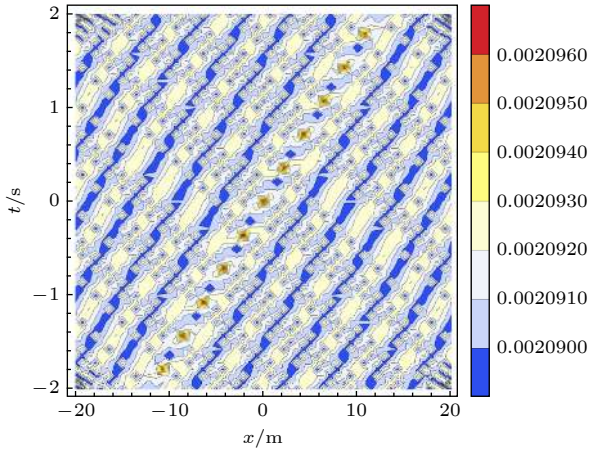


图 1 怪波振幅的密度图

Fig. 1. The contour graph of a rogue wave solution image.

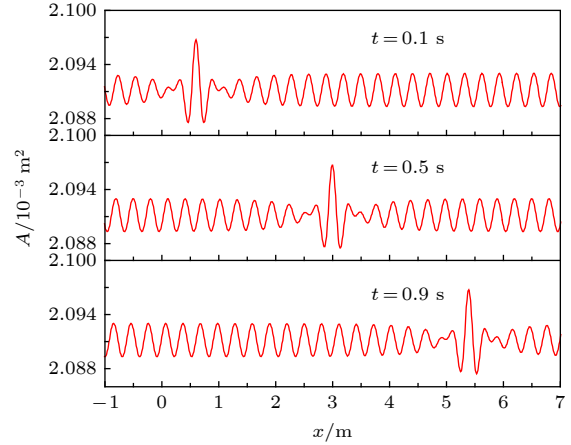


图 2 不同时刻的怪波图像

Fig. 2. The above picture shows the rouge wave for  $t = 0.1 \text{ s}$ ,  $t = 0.5 \text{ s}$  and  $t = 0.9 \text{ s}$ .

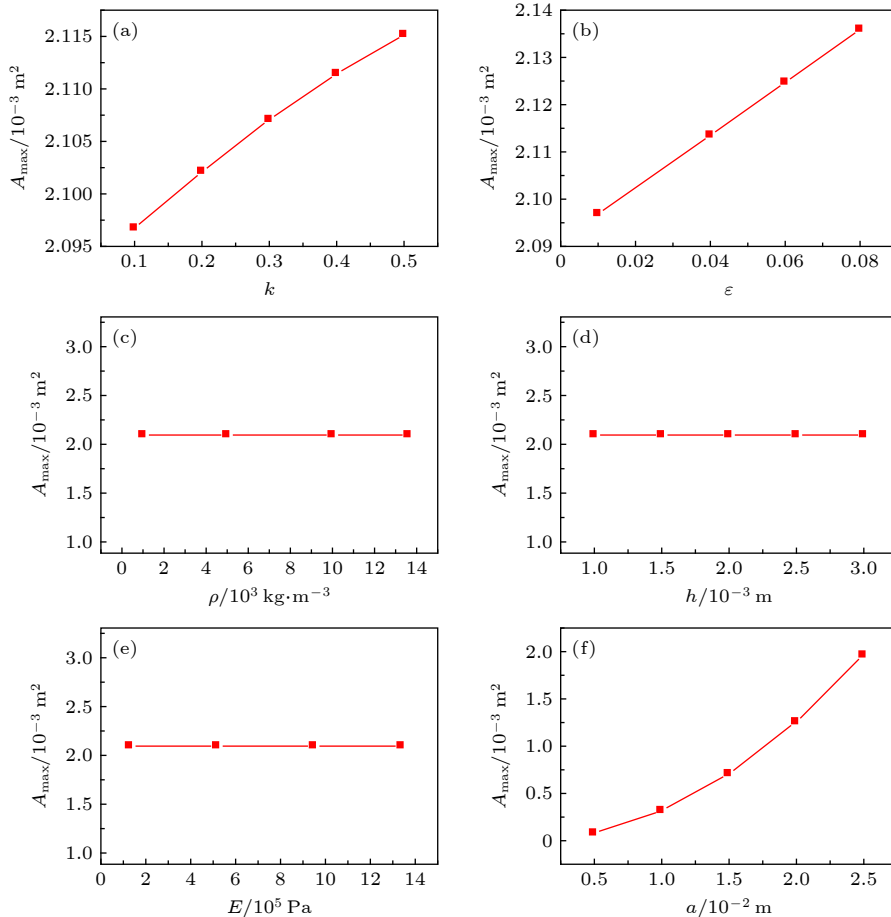


图 3 人体血管参数对怪波振幅的影响 (a) 波数  $k$ ; (b) 小参数  $\epsilon$ ; (c) 厚度  $h$ ; (d) 液体密度  $\rho$ ; (e) 杨氏模量  $E$ ; (f) 半径  $a$ .  
Fig. 3. The effect of human vascular parameters on the amplitude of rouge waves: (a)  $k$ ; (b)  $\epsilon$ ; (c)  $h$ ; (d)  $\rho$ ; (e)  $E$ ; (f)  $a$ .

怪波振幅越大,产生的能量就越高,就越容易产生危害.接下来研究人体血管中血管壁厚度、杨氏模量、血管半径等各个参数对怪波振幅的影响.主要研究人体主动脉血管的怪波性质,在H. Otel所著的《普朗特流体力学基础》一书中生物流体力学给出了人体中各个部位血管脉的性质,其中主动脉血管的厚度与半径为最大,其厚度  $h = 2 \times 10^{-3}$  m,半径  $a = 1.25 \times 10^{-2}$  m.图3(a)是波数  $k$ 与怪波振幅的关系图,图中表明怪波振幅随着  $k$ 的增大而增大,即怪波的波长越小,怪波的振幅就越大.我们知道人在紧张或受到惊吓的时候,血管会出现膨胀现象,我们猜测是在人紧张或受到惊吓的时候,血管中的怪波的波长会突然变小而引起的.在图3(b)中表明了小参数  $\varepsilon$ 对怪波振幅的影响,可以看出,怪波的振幅随着  $\varepsilon$ 的增大而增大.图3(c)中取人体不同位置血管壁的厚度的变化对

怪波振幅的影响,得出结果是管壁厚度对怪波振幅没有影响.图3(d)中参考水、血液、酒精、海水、水银等液体的密度对怪波振幅的影响,结果得出液体密度的改变对怪波振幅没有影响.图3(e)中表明管壁的杨氏模量改变,怪波的振幅依然还是不变的.图3(f)研究血管道半径  $a$ 与怪波振幅的关系,结果表明血管道半径增大,怪波振幅也随之增大.

结果表明,如果人体血液流动中出现怪波现象,当怪波为短波时怪波的振幅越大,对血管的危害就会越重.并且血管壁半径也对怪波的影响较大,血管越粗的部位,产生的怪波振幅越大,即在血管较粗的部位更应该注意防范由怪波产生的危害.这一发现为医学上人体血液流动问题提供了一定的参考.

图4给出了血管壁的管壁厚度、杨氏模量、血管半径等各个参数与怪波波速的关系.图4(a)为

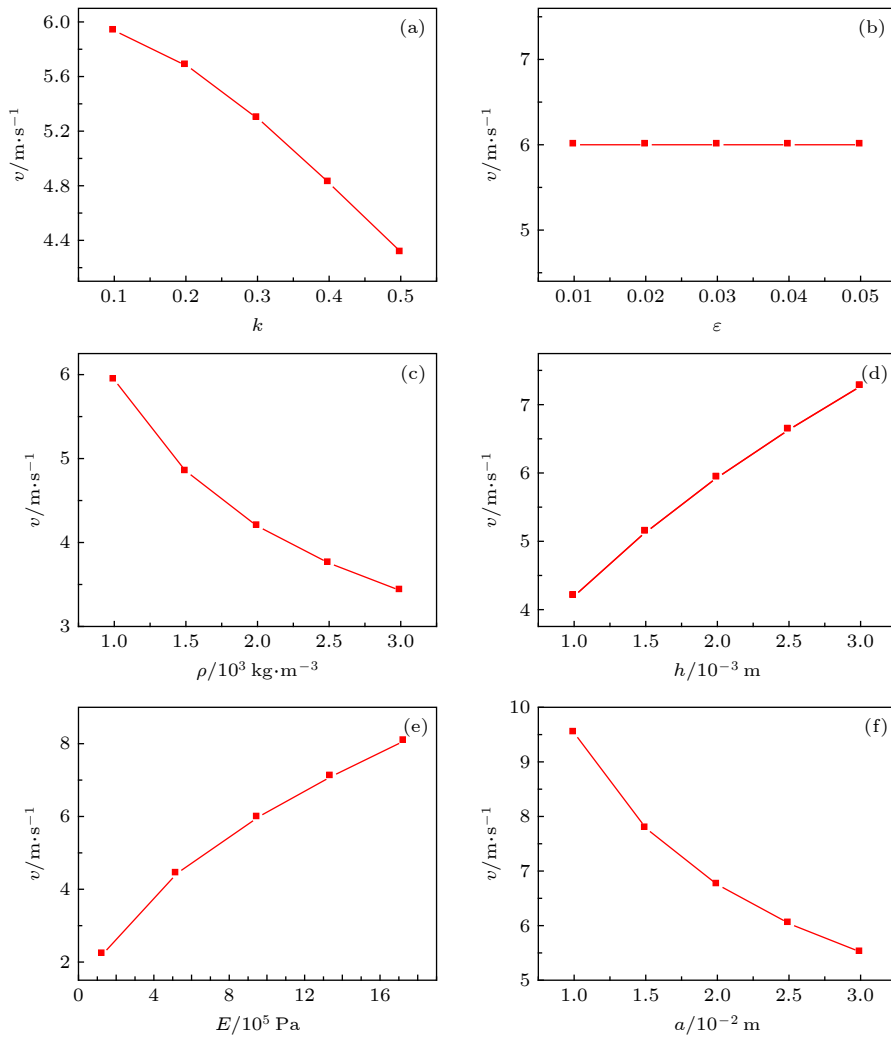


图4 人体血管参数对怪波波速的影响 (a) 波数  $k$ ; (b) 小参数  $\varepsilon$ ; (c) 厚度  $h$ ; (d) 液体密度  $\rho$ ; (e) 杨氏模量  $E$ ; (f) 半径  $a$  值

Fig. 4. The effect of elastic tube parameters on the velocity of rouge waves: (a)  $k$ ; (b)  $\varepsilon$ ; (c)  $h$ ; (d)  $\rho$ ; (e)  $E$ ; (f)  $a$ .

波数  $k$  与怪波波速的关系, 表明怪波波速随着  $k$  的增大而减小. 即怪波的波长越短, 怪波的传播速度越慢. 图 4(b) 给出了  $\varepsilon$  与怪波波速的关系, 可以看出  $\varepsilon$  对怪波波速没有显著影响. 图 4(c) 为液体的密度  $\rho$  与怪波波速的关系, 可以看出随着液体密度  $\rho$  的增大, 怪波的波速在减小. 这表明密度大的液体中的怪波传播速度慢. 图 4(d) 是管壁厚度  $h$  与怪波波速的关系图, 随着管壁厚度  $h$  的增大, 怪波的波速也增大. 这表明在人体中血管壁越厚的部位, 怪波的传播速度越快. 图 4(e) 给出了杨氏模量与怪波波速的关系, 随着管壁的杨氏模量的增大, 怪波波速也随之增大. 表明在人体血管中刚性较强的部位的怪波波速较快. 图 4(f) 是管的半径与怪波波速的关系, 怪波波速随着血管半径的增大而减小. 可以看出, 在人体血管越粗的部位, 怪波的波速也就越小.

我们知道, 人体心脏附近位置的血管半径较大且血管壁较厚, 这样容易导致心脏附近出现的怪波可能有较大的振幅和较大的传播速度. 这一结论对医学研究可能会有一定的参考意义.

## 4 结 论

利用约化摄动法, 依据不可压缩液体在弹性管中流动的非线性薛定谔方程, 我们用非线性薛定谔方程的解描述出真实的怪波解. 通过怪波解的理论结果, 分析了怪波的许多特性, 这对怪波的研究是一个重要的补充. 将这一理论模型应用到人体和动物中血管中的血液流动问题, 给出了怪波在动脉血管中的传播特性, 给出了怪波对血液在动脉血管中各个位置的影响, 这也对现代医学上提供了一些帮助. 但这一方法仅适用于当管道的横截面面积改变量远远小于管道的横截面面积, 放在人体血管中也是如此, 如果不满足这一条件, 对于计算和模拟的结果就会有所偏差.

## 参考文献

- [1] Zhen P F, Jia M 2018 *Chin. Phys. B* **27** 120201
- [2] Zhang X, Yong C 2018 *Nonlinear Dyn.* **93** 1
- [3] Li S Q, Yang G Y, Li I 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 10 (in Chinese) [李淑青, 杨光晔, 李禄 2014 物理学报 **63** 10]
- [4] Xin W, Chong L, Lei W 2017 *J. Math. Anal. Appl.* **449** 1534
- [5] Dewey J F, Ryan P D 2017 *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **114** E10639
- [6] Onorato M, Residori S, Bortolozzo U, Montina A, Arecchi F T 2013 *Phys. Rep.* **528** 47
- [7] Yeom D I, Eggleton, Benjamin J 2007 *Nature* **450** 53
- [8] Akhmediev N, Ankiewicz A, Taki M 2009 *Phys. Lett. A* **373** 675
- [9] Garrett C, Gemmrich J, Baschek B 2009 *Phys. Today* **15** 3210
- [10] Draper L 1967 *Mar. Geol.* **5** 133
- [11] Akhmediev N, Soto-Crespo J, Ankiewicz A 2009 *Phys. Rev. A* **80** 82
- [12] Kibler B, Chabchoub A, Gelash A, Akhmediev N, Zakharov V 2015 *Phys. Rev. A* **5** 041026
- [13] Bailung H, Sharma S K, Nakamura Y 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 255005
- [14] Moslem W M, Sabry R, El-Labany S K, Shukla P K 2011 *Phys. Rev. E* **84** 066402
- [15] Stenflo L, Marklund M 2009 *J. Plasma Phys.* **76** 293
- [16] Efimov V B, Ganshin A N, Kolmakov G V, McClintock P V E, Mezhev-Deglin L P 2010 *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **185** 181
- [17] Bludov Y V, Konotop V V, Akhmediev N 2010 *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **185** 169
- [18] Schneider T M, Gibson J F, Burke J 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 104501
- [19] Peregrine D H 1983 *Anziam J.* **25** 16
- [20] Mohany A, Sadek O, Hassan M 2018 *J. Fluid Struct.* **79** 171
- [21] Shen H J, Wen J H, Yu D L, Wen X S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8357 (in Chinese) [沈惠杰, 温激鸿, 郁殿龙, 温熙森 2009 物理学报 **58** 8357]
- [22] Demiray H 1996 *B Math. Biol.* **58** 939
- [23] Demiray H 2002 *Appl. Math. Comput.* **133** 29
- [24] Demiray H 2008 *Int. J. Nonlinear Mech.* **43** 241
- [25] Antar N 2002 *Int. J. Eng. Sci.* **40** 1179
- [26] Duan W S, Wang B R, Wei R J 1997 *Phys. Lett. A* **224** 154
- [27] Lamb G L 1981 *Adv. Math.* **32** 215
- [28] Sigeo Y 1987 *J. Phys. Soc. Jpn.* **56** 506
- [29] Paquerot J F, Remoissenet M 1994 *Phys. Lett A* **194** 77
- [30] Duan W S, Wang B R, Wei R J 1996 *J. Phys. Soc. Jpn.* **65** 945
- [31] Hammani K, Kibler B, Finot C, Akhmediev N, Dudley J M 2011 *Opt. Lett.* **36** 112
- [32] Liu Z R, Xu G, Chen Y, Teng Z Z, Qin K R 2003 *Adv. Appl. Math. Mech.* **24** 205 (in Chinese) [柳兆荣, 徐刚, 陈泳, 滕忠照, 覃开蓉 2003 应用数学和力学 **24** 205]
- [33] Chuong C J, Fung Y C 1986 *J. Biomech. Eng.* **108** 189

SPECIAL TOPIC—Nonlinear physics

## Rogue waves in fluid-filled elastic tube<sup>\*</sup>

Chen Zhi-Min    Duan Wen-Shan<sup>†</sup>

(*College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China*)

( Received 30 August 2019; revised manuscript received 23 September 2019 )

### Abstract

By the reductive perturbation method, we investigate the Rogue waves in a fluid-filled elastic tube. Based on a nonlinear Schrodinger equation obtained from a fluid-filled elastic tube, the rouge wave solution in the fluid-filled elastic tube is discussed. The characteristics of a single rouge wave are studied for this system. Then, the effects of the system parameters, such as the wave number  $k$ , the parameters  $\epsilon$ , the density of the fluid, the thickness of the elastic tube, the Yang's modulus of the elastic tube, and the radius of the elastic tube on the rouge wave are also investigated. Finally, the model is applied to the blood vessels of both animal and the human to ascertain the effects of the rouge wave in different arteries and vessels. The results of the present study may have potential applications in medical science.

**Keywords:** reductive perturbation method, nonlinear Schrodinger equation, rouge wave, blood vessel

**PACS:** 47.10.A-, 47.27.ed, 47.27.nf

**DOI:** [10.7498/aps.69.20191308](https://doi.org/10.7498/aps.69.20191308)

---

<sup>\*</sup> Project Supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11965019).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [duanws@126.com](mailto:duanws@126.com)