专题：冷原子-分子物理

用光晶格模拟狄拉克、外尔和麦克斯韦方程*

朱燕清[1)] 张丹伟[2)†] 朱诗亮[1)2)‡]

1) (南京大学物理学院, 固体微结构国家实验室, 南京 210093)

2) (华南师范大学物理与电信工程学院, 广东省量子调控工程与材料重点实验室, 广州 510006)

(2018 年 10 月 30 日收到; 2019 年 1 月 19 日收到修改稿)

相对论性量子力学波动方程, 如狄拉克、外尔和麦克斯韦方程, 是描述微观粒子运动的基石. 最近的实验和理论研究表明, 冷原子系统中几乎所有参数都可精确调控, 因此冷原子系统被认为是实现量子模拟的理想平台, 可以用来研究高能和凝聚态物理中的一些基本问题. 本文介绍了设计原子光晶格哈密顿量的思路和方法, 主要涉及激光辅助跳跃的理论. 基于这些方法, 物理学界提出了利用光晶格体系模拟相对论性量子力学波动方程, 包括狄拉克、外尔和麦克斯韦方程等, 并且预言了一些在基本粒子物理中很难观察到, 但在冷原子体系可能观察到的物理现象. 本文综述了国际上此领域的研究进展.

关键词： 量子模拟, 光晶格, 激光辅助跳跃, 相对论性量子力学方程

PACS： 67.85.–d, 03.75.Ss, 71.10.Fd, 03.75.Lm **DOI:** 10.7498/aps.68.20181929

1 引 言

自上个世纪 80 年代以来, 伴随着超冷原子系统中实验技术的日臻成熟, 例如超冷原子气体制备[1–5]、原子间相互作用的调控[6]、光晶格[7] 和人工规范场的产生[8–10] 等, 科学家对于冷原子系统的操控已取得令人瞩目的成就. 最近的理论和实验研究都证明, 超冷原子体系可用于模拟和研究凝聚态和高能物理中的一些重要模型[11], 特别是可以模拟一些很难实验实现的模型或理论上很难处理的体系或物理现象, 例如量子相变、高温超导、量子磁阻挫、极端条件下的相对论性粒子等. 冷原子量子模拟的突出优点是, 绝大部分相关的物理参数在实验上都能够精确调控, 从而可以人为设计和实现所需要的哈密顿量.

另一方面, 相对论性量子力学波动方程, 如狄拉克、外尔和麦克斯韦方程, 是描述微观相对论性粒子运动的基石. 并且有些很早就预言的现象, 如薛定鄂预言的狄拉克粒子的 Zitterbewegung 振荡等, 一直没有在基本粒子中观察到. 如何在冷原子体系中模拟这些相对论性波动方程, 并且观察到之前不能观察的极端条件的物理现象, 正成为冷原子量子模拟的一个重要研究方向. 相对论性波动方程中, 哈密顿量是动量的一次方, 而描写冷原子的原始哈密顿量一般是动量的二次方. 如何消除动量的二次方, 突出一次方的效应, 是此类量子模拟的关键. 在现有的理论中, 有两种方式可以做到此点: 1) 基于诱导规范势的方法, 利用激光对有内部能级结构的原子产生几何相位, 可以实现自旋相关的等效规范势 $\boldsymbol{A}$, 从而可实现类似 $\boldsymbol{p}^2/2m+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}$ 的哈密顿量, 其中 $\boldsymbol{p}^2/2m$ 为原子的动能项. 在超冷原子中, 原子动量可以很小, 上述哈密顿量中, 在某些情况下第一项远小于第二项, 从而得到相对论性

* 国家重点研发计划 (批准号: 2016YFA0301803)、国家自然科学基金 (批准号: 11604103, 91636218, 11474153) 和广东省自然科学基金 (批准号: 2016A030313436).

† 通信作者. E-mail: zdanwei@126.com

‡ 通信作者. E-mail: slzhu@nju.edu.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

方程需要的线性色散关系[12]. 2) 由于晶格中的某些对称性, 在动量空间中, 一些点附近是线性色散关系, 从而描写具有这些准动量的粒子需要相对论性方程. 类比凝聚态系统中电子在固体周期势场和外加电磁场中的运动[13], 将冷原子放置在由激光形成的光晶格中, 辅以适当的激光调制以实现人工规范场, 如激光辅助跳跃[14,15]、周期调制光晶格[16]等技术, 可以实现有线性色散关系的格点哈密顿量. 这两个方式都可以用于模拟相对论性粒子及其物理效应. 本文着重介绍利用光晶格体系实现相对论性量子力学波动方程的研究. 该量子模拟的关键在于设计合适的光晶格和激光调制, 使得超冷原子在能带中某些特定 k 点附近的低能激发满足相应的相对论波动方程. 本文首先概述激光辅助跳跃和光晶格紧束缚哈密顿量的基本理论, 然后分别介绍在光晶格系统中实现狄拉克、外尔和麦克斯韦方程的几个具体方案, 最后是总结和展望.

2 原子哈密顿量的设计

简单起见, 本文主要讨论光晶格中无作用的具有 N 个内态的原子系统, 其哈密顿量可表示为

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{V}_{\rm cou}(\boldsymbol{r}), \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{H}_0=\left[\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})\right]\mathbb{I}_N$, 标势 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ 为原子在光场下感受到的周期势, $\mathbb{I}_N$ 为 $N\times N$ 单位矩阵; 空间依赖的 $\boldsymbol{V}_{\rm cou}(\boldsymbol{r})$ 是作用在原子内态上的 $N\times N$ 矩阵, 表示原子内态间的耦合. 原子的动能主要由原子的温度决定, 可通过激光冷却技术降低. 标势 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ 可通过一系列对冲激光形成驻波场实现周期的光晶格势[17], 而 $\boldsymbol{V}_{\rm cou}(\boldsymbol{r})$ 则可以通过几束拉曼光实现对原子不同内态间的耦合. 由于模拟相对论性粒子波动方程涉及到光晶格中相邻或原位格点不同原子内态间的翻转, 本节首先介绍激光辅助跳跃的理论.

2.1 激光辅助跳跃

激光辅助跳跃的基本思路是: 首先抑制原子在近邻格点的自然跳跃 (如光晶格势阱较深或近邻格点的能量差较大), 然后通过外加拉曼激光耦合近邻格点中的原子来恢复和调控原子跳跃, 进而产生等效规范势和自旋轨道耦合[8,9]. 这里主要介绍文献 [15] 中利用激光辅助跳跃产生规范势的方案. 如图 1 所示, 为实现自旋依赖的光晶格, 可考虑在 x 方向施加波长处于“反魔数”(“anti-magic”) 波段的驻波场, 同时在 y 方向施加处于“魔数”波段的驻波, 处在两个不同内态 $|g\rangle$ 和 $|e\rangle$ 的原子在 xy 平面内感受到的光晶格势为

$$\begin{aligned}V(x,y)&=V_{\rm am}(x)+V_{\rm m}(y)\\&=\pm V_1\cos^2(\pi x/2d_x)+V_0\cos^2(\pi y/d_y).\end{aligned} \tag{2}$$

由于在“反魔数”波段的激光作用下 (如对 Yb 原子 $\lambda_{\rm am}\approx 760\,{\rm nm}$), $|g\rangle$ 和 $|e\rangle$ 原子的极化率 $\alpha(\omega)$ 符号相反, 因此在 x 方向上对应产生的势场 $V_{\rm am}=\pm V_1\cos^2(\pi x/2d_x)$ 也相反 (图 1(a)), 其中 $V_1>0$ 为势阱深度, $d_x=\lambda_{\rm am}/4$ 为 x 方向复合晶格的晶格常数. 在 y 方向上, 因原子在“魔数”波长的激光作用下 (对 Yb 原子 $\lambda_{\rm m}\approx 1.12\,\mu{\rm m}$) 原子极化率相同, 故感受到的势场均为 $V_m=V_0\cos^2(\pi y/d_y)$ $(V_0>0)$, $d_y=\lambda_m/2$ 为沿 y 方向的晶格常数. 处于势阱中的

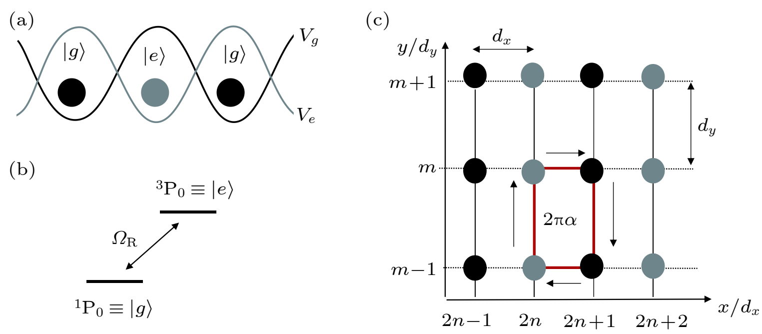

图 1 基于激光辅助跳跃实现人工磁场, 黑 (灰) 色圆分别表示内态为 $|g\rangle$ ($|e\rangle$) 的 Yb 原子 (a) 内态被标记为 $|g\rangle$ 和 $|e\rangle$ 的原子被囚禁在自旋依赖的光晶格势 V_g 和 V_e 中, 其中 $V_g=-V_e$; (b) x 方向上的激光辅助跃迁; (c) 自旋依赖光晶格示意图. y 方向存在自然跳跃, x 方向由一束拉曼光 $\Omega_{\rm R}$ 诱导跳跃

Fig. 1. Realization of artificial magnetic field based on laser-assisted tunneling. Gray and black dots represent the Yb atoms correspond to internal states $|g\rangle$ and $|e\rangle$, respectively: (a) The atoms $|g\rangle$ and $|e\rangle$ are trapped in the state-dependent optical lattice potentials V_g and V_e, where $V_g=-V_e$; (b) laser-assisted tunneling along x direction; (c) sketch of state-dependent optical lattice. Nature tunneling occurs along the y direction, and the tunneling along x direction is induced by a Raman beam $\Omega_{\rm R}$.

原子状态可以用瓦尼尔函数分别表示为$w_g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_g)$和$w_e(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_e)$, 调节$V_0$至合适值, 确保原子可在$y$方向正常跳跃, 同时让$V_1$足够深以抑制$x$方向的自然跳跃, 也就是抑制$|g(e)\rangle_{\boldsymbol{r}_{g(e)}} \leftrightarrow |g(e)\rangle_{\boldsymbol{r}_{g(e)\pm 2d_x}}$的自然跳跃.

激光辅助跳跃正是通过引入额外的拉曼光耦合被囚禁在不同子晶格的原子, 从而诱导水平方向的近邻跳跃. 如图 1(b) 所示, 最简单的情况是引入一束拉曼光用于诱导$|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ ($|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$)的共振跃迁, 其拉比频率为$\varOmega_{\mathrm{R}} = \varOmega \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}$. 此时近邻格点$\boldsymbol{r}_g = (2n, m)$和$\boldsymbol{r}_e = \boldsymbol{r}_g + \boldsymbol{b} = (2n+1, m)$之间产生的$g$-$e$跃迁矩阵元为

$$\begin{aligned} J_{ge} &= \frac{\hbar\varOmega}{2}\int w_e^*(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_e)w_g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_g)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^2\boldsymbol{r} \\ &= \frac{\hbar\varOmega}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_g}\int w_e^*(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{b})w_g(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}. \end{aligned} \tag{3}$$

假设让拉曼光沿yz平面传播, 则有$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_g = 2\pi\alpha m$. 当调节耦合激光与$z$轴的夹角时, $|\alpha|$可取 0–$\lambda_m/2\lambda_0$ (对于 Yb 原子, $\lambda_0 \approx 578\,\mathrm{nm}$, 该比值$\simeq 0.66$)间的任意值. 至此, 如图 1(c) 所示, 构建了一个自旋依赖的光晶格, 当原子沿一个闭合网格“走一圈”时, 会积累一个$2\pi\alpha$的相位, 对应一个等效的磁通(磁场). 可以证明, 在这个光晶格中产生的等效磁通沿x方向交错排列, 通过调制晶格位能和引入一对拉曼光能够进一步产生均匀磁场[15].

2.2 紧束缚哈密顿量

当晶格势阱足够深, 描述光晶格中粒子的有效模型是紧束缚近似下的格点哈密顿量. 此时囚禁在势阱中的原子可由局域的瓦尼尔函数描述. 假设光晶格中原子一直处于布洛赫能带的最低带上, 则原子哈密顿量 (1) 式的二次量子化形式为

$$H_{\mathrm{sec}} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\boldsymbol{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r})H\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{r}), \tag{4}$$

这里的场算符可用瓦尼尔态作为基矢展开,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{r}) = (\psi_1(\boldsymbol{r}), \cdots, \psi_q(\boldsymbol{r}), \cdots, \psi_N(\boldsymbol{r}))^{\mathrm{T}}, \\ &\psi_q(\boldsymbol{r}) = \sum_i c_{i,q}w_q(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i),\ \{c_{i,q}, c_{j,q'}^{\dagger}\}_{\pm} = \delta_{ij}\delta_{qq'}, \end{aligned} \tag{5}$$

其中$\psi_q(\boldsymbol{r})$标记内态为$|q\rangle$的场算符, $c_{i,q}$ ($c_{i,q}^{\dagger}$)表示在第i个格点湮灭 (产生) 一个内态为$|q\rangle$的原子, 且满足费米子 (+) 或玻色子 (−) 的对易关系. 联立 (4) 式和 (5) 式, 可得原子在光晶格中的格点哈密顿量

$$H_{\mathrm{tb}} = \sum_{\langle i,j\rangle}\sum_{q,q'}c_{i,q}^{\dagger}[J_{ij}]_{qq'}c_{j,q'} + \sum_i\sum_{q,q'}c_{i,q}^{\dagger}[J_{ii}]_{qq'}c_{i,q'}, \tag{6}$$

其中$\langle i,j\rangle$表示对最近邻格点求和, $[J_{ij}]_{qq'}$表示最近邻格点i和j间原子自旋$|q\rangle$和$|q'\rangle$的跃迁矩阵元

$$[J_{ij}]_{qq'} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}w_q^*(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)Hw_{q'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j), \tag{7}$$

可以看出,该项实质上有两部分构成, 即$q = q'$时, 得到自旋无关的最近邻跳跃能$[J_{ij}]_{qq}$ (即自然跳跃), 该部分由H_0项贡献; 当$q \neq q'$时, 得到自旋翻转的跳跃$[J_{ij}]_{qq'}$, 即通过激光与原子耦合场$\boldsymbol{V}_{\mathrm{cou}}(\boldsymbol{r})$实现. 同理, (6) 式中的第二项表示的是原位格点自旋翻转的情况, 即$[J_{ii}]_{qq'}$为 (7) 中$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_j$的跃迁矩阵元. 下面论述在合适条件下, (6) 式的低能有效近似即是相对论性哈密顿量.

3 六角光晶格和交错磁通光晶格中狄拉克方程的实现

1928 年, 英国物理学家狄拉克提出了著名的狄拉克方程, 即描述自旋1/2粒子的相对论波动方程, 其形式为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t) = \left[c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \boldsymbol{\beta}mc^2\right]\psi(\boldsymbol{r},t), \tag{8}$$

其中$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$为狄拉克矩阵, c为光速, 而m为粒子静止质量. 自从人们发现石墨烯中的准粒子即是狄拉克费米子以来, 研究狄拉克费米子成为凝聚态物理中的一大热点. 在光晶格系统中模拟和研究相对论性粒子自然也成为了量子模拟的一个热门课题. 对于二维系统的狄拉克方程, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$为泡利矩阵, 哈密顿量可表示为

$$H_{\mathrm{D}} = v_x\sigma_x p_x + v_y\sigma_y p_y + \varDelta_g\sigma_z, \tag{9}$$

其中$v_{x,y}$和$\varDelta_g$分别表示等效光速和等效静止能量.

这里首先回顾一下由 Zhu 等[18]最早在二维蜂巢光晶格中模拟狄拉克方程的理论方案. 考虑将单分量费米原子 (如^{40}K, ^{6}Li 等) 囚禁在蜂巢光晶格中, 该晶格可由三束驻波激光照射原子团形成, 其势场为

$$V_{\mathrm{HOL}}(x,y) = \sum_{j=1,2,3}V_j^0\sin^2\left[k_{\mathrm{L}}(x\cos\theta_j + y\sin\theta_j)\right], \tag{10}$$

其中$\theta_1 = \pi/3$, $\theta_2 = 2\pi/3$, $\theta_3 = 0$, k_{L}为激光的波

矢. 通过调节不同方向的激光强度可以很容易地调节势垒V_j^0的值, 当$V_1^0=V_2^0=V_3^0$时形成标准的六角晶格, 当$V_1^0\neq V_2^0\neq V_3^0$时则形成各向异性的六角晶格. 六角晶格中一个元胞含有A和B两个子格, 该系统的紧束缚哈密顿量写为

$$H=\sum_{\langle i,j\rangle}t_{ij}(a_i^{\dagger}b_j+\mathrm{h.c.}),\qquad(11)$$

这里的$\langle i,j\rangle$同样表示最近邻子格, a_i和b_j分别表示子格子A和B的费米算符. t_{ij}表示最近邻子格间的跳跃, 三个不同方向的跳跃分别记为t_1, t_2, t_3. 简单起见, 令$t_1=t_2=t$, $t_3=\eta t$, 这里的$\eta>0$作为可调的各向异性参数. 在倒空间或动量空间中, 该系统仍是蜂巢型结构, 第一布里渊区包含两个不等价的点$\boldsymbol{K}$和$\boldsymbol{K}'$. 可取$\boldsymbol{K}=2\pi/a(1/\sqrt{3},1)$, $\boldsymbol{K}'=-\boldsymbol{K}$, 对应晶格常数$a=2\pi/(\sqrt{3}k_{\mathrm{L}})$. 对(11)式的哈密顿量做傅里叶变换到倒空间, 采取的变换形式为$a_i^{\dagger}=1/\sqrt{N}\sum_{\boldsymbol{k}}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}_i)a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}$, $b_j^{\dagger}=1/\sqrt{N}\sum_{\boldsymbol{k}}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_j)b_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}$, 其中$\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{B}_j)$表示格点中子格A(B)的位置, N表示格点的个数. 对角化倒空间哈密顿量得到本征能谱

$$E_{\boldsymbol{k}}=\pm t\sqrt{2+\eta^2+2\cos(k_y a)+4\eta\cos(\sqrt{3}k_x a/2)\cos(k_y a/2)},\qquad(12)$$

其中$\pm$表示能谱的两支. 当$0<\eta<2$时, 能隙闭合, 系统呈金属态; 当$\eta>2$时, 能隙打开且$\Delta_g=|t|(\eta-2)$, 系统呈绝缘态. 当系统处于1/2填充时, $\boldsymbol{k}$在原能隙闭合点$\boldsymbol{K}=(k_x^0,k_y^0)$展开为$\boldsymbol{k}=(k_x^0+q_x,k_y^0+q_y)$. 此时的能谱对应展开到二阶, 可得

$$E_q=\pm\sqrt{\Delta_g^2+v_x^2q_x^2+v_y^2q_y^2},\qquad(13)$$

当$0<\eta<2$时, $\Delta_g=0$, $v_x=\sqrt{3}\eta ta/2$, $v_y=ta\times\sqrt{1-\eta^2/4}$; $\eta>2$时, 则$\Delta_g=|t|(\eta-2)$, $v_x=ta\times\sqrt{3\eta/2}$, $v_y=ta\sqrt{\eta/2-1}$. 当$q_{x,y}\lesssim 1/2a$时, 得到的E_q是一个好的近似, 也称为长波近似. 该能谱对应的有效哈密顿量为

$$H_{\mathrm{D}}=\tau_z v_x\sigma_x q_x+v_y\sigma_y q_y+\Delta_g\sigma_z,\qquad(14)$$

其中$\tau_z=\pm1$标记两个不等价的狄拉克点. 这时狄拉克点附近的准粒子激发即满足二维狄拉克方程$i\hbar\partial_t\psi=H_{\mathrm{D}}\psi$.

Zhang等[19]提出另一个实现狄拉克方程的理论方案: 在自旋依赖的正方光晶格中, 通过两束拉曼光耦合两分量的费米原子, 以形成一个交错π磁通的晶格, 此时系统的有效哈密顿量也是二维狄拉克哈密顿量. 考虑处于自旋依赖呈棋盘状的正方晶格中的二分量费米气, 如图2(a)所示. 该晶格在实验上可通过叠加存在偏振夹角的两束线偏振激光产生, 其中两个子格(A和B)间的距离以及势阱的深度都可通过调节激光的强度和夹角大小很好地控制[20,21]. 标记所需原子的两个内态为$|A\rangle$和$|B\rangle$, 实验上若选择^{40}K, 则$|A\rangle=|4^2\mathrm{S}_{1/2},\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\rangle$, $|B\rangle=|4^2\mathrm{S}_{1/2},\frac{7}{2},\frac{3}{2}\rangle$; 若选择^{6}Li, 则$|A\rangle=|2^2\mathrm{S}_{1/2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle$, $|B\rangle=|2^2\mathrm{S}_{1/2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle$. 该晶格中, 要实现最近邻的跳跃改变内态需要用到激光辅助跳跃. 如图2(b)所示, 考虑使用两束拉比频率为$\varOmega_{\mathrm{A}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{A}}\cdot\boldsymbol{r}}$和$\varOmega_{\mathrm{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{B}}\cdot\boldsymbol{r}}$的拉曼光以及利用一个瞬间的激发态$|e\rangle$来耦合$|A\rangle$和$|B\rangle$ (图2(b)). 对^{40}K和^{6}Li原子而言, 该激发态可选择$|4^2\mathrm{P}_{1/2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$和$|2^2\mathrm{P}_{1/2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$, 而两束拉曼跃迁的激光偏振为$\sigma^+$和$\sigma^-$[21].

调节拉曼光参数至合适值, 便可形成图2(a)中的π磁通的晶格. 该系统对应的紧束缚哈密顿量为

$$H_0=\sum_{\langle i,j\rangle}t_{ij}(a_i^{\dagger}b_j+\mathrm{h.c.})+\varDelta\sum_i(a_i^{\dagger}a_i-b_i^{\dagger}b_i),\qquad(15)$$

其中$a_i^{\dagger}(b_i^{\dagger})$是对应子格A(B)的产生$|A\rangle(|B\rangle)$算符. 最近邻跳跃系数$t_{ij}=\int w_A^*(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)\varOmega_{\mathrm{eff}}w_B(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}$, 而$\varOmega_{\mathrm{eff}}=\varOmega_{\mathrm{A}}^*\varOmega_{\mathrm{B}}$, 空间坐标$\boldsymbol{r}=(x,y)$, $w_{A,B}$为最低布洛赫能带的瓦尼尔函数, $2\varDelta$为两个子格子间占据能的差值. 对于合适的激光, 激光辅助跳跃可产生$t_{ij}=t_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}A_{ij}}$, $t_0>0$为跳跃的大小, 由$\varOmega_{A,B}$及最近邻子格子间的瓦尼尔交叠积分决定, A_{ij}相位在

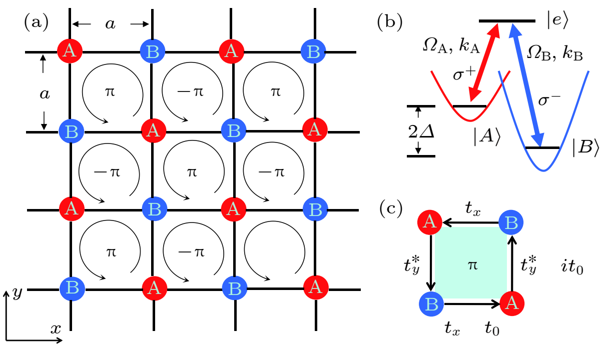

图2 (a)交错磁通光晶格; (b)双光子拉曼过程; (c)等效π磁通

Fig. 2. (a) Staggered flux optical lattice; (b) two-photon Raman process; (c) effective π flux.

激光辅助跳跃过程中由$\boldsymbol{k}_A$和$\boldsymbol{k}_B$诱导. 对于图 2(a) 中形成的π通量, 即每个方块的通量$\sum_{\circlearrowleft} A_{ij} = \pm\pi$. 有一种实际的方案[15–22] 可产生 B 到 A 的跳跃系数$t_x = t_0$, $t_y = -\mathrm{i}t_0$, 如图 2(c) 所示. 当然实验上对玻色子系统也有其他类似的方案[23,24,25].

同样, (15) 式中的哈密顿量在动量空间可写作$H_0 = \sum_{\boldsymbol{k}} c_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}\mathcal{H}(\boldsymbol{k})c_{\boldsymbol{k}}$, 其中$c_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} = (a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}, b_{\boldsymbol{k}}^{\dagger})$, $\mathcal{H}(\boldsymbol{k}) = -2t_0 \times [\cos(k_x a)\sigma_x + \cos(k_y a)\sigma_y] + \Delta\sigma_z$, a为晶格常数. 令$f_{\boldsymbol{k}} = -2t_0[\cos(k_x a) - \mathrm{i}\cos(k_y a)]$, 此时的能谱为$E_{\boldsymbol{k}} = \pm\sqrt{|f_{\boldsymbol{k}}|^2 + \Delta^2}$, 能隙在$\boldsymbol{K}_{\pm} = \pm\dfrac{\pi}{2a}(1,1)$关闭. 同理, 在这两个狄拉克点附近展开的有效哈密顿量为

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{q}) = \tau_z v_{\mathrm{F}}(\sigma_x q_x + \sigma_y q_y) + \Delta\sigma_z, \tag{16}$$

其中$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{K}_{\pm}$, $\tau_z = \pm 1$表示标记不等价的谷$\boldsymbol{K}_{\pm}$, 费米速度$v_{\mathrm{F}} = 2t_0 a$.

2012 年, 苏黎世联邦理工学院的 Tarruell 等[26] 报道了在蜂巢光晶格中使用超冷原子实现具有可调节性质的狄拉克点的实验, 他们利用三束回归反射的激光作用在^{40}K 原子团上, 通过调节激光间的相对强度实现了与蜂巢晶格拓扑等价的砖墙晶格. 狄拉克费米子的探测则通过测量狄拉克点附近的能带色散来实现, 能带结构可以通过布洛赫-朗道-齐纳震荡的技术[26–28] 进行探测. 实验中通过改变激光之间的失谐量, 可在 AB 子格间产生能量差Δ并导致在狄拉克点打开能隙, 而从最低能带隧穿到上一能带的概率随着Δ的变化而改变. 当$\Delta = 0$时, 即能隙在狄拉克点闭合, 隧穿的概率最大, 对应上能带的原子布局数最大. 随着$|\Delta|$从 0 开始变大, 对应的隧穿率变小, 标志着系统从存在无质量狄拉克粒子到有质量狄拉克粒子的过程. 此外, 当$\Delta = 0$时, 布里渊区中狄拉克点的位置以及相关线性色散的斜率可通过调节激光强度来改变. 如文献 [18] 所述, 调节激光间的相对强度, 可使得布里渊区中两个拓扑不等价的狄拉克点位置发生移动, 当这两个狄拉克点在布里渊区的角落相遇时会相互融合然后湮灭, 能隙打开. 依据这一原理, 就可将发生拓扑相变的临界线描绘出来. 而对于狄拉克点对应非零的贝里相$\pm\pi$, 则可以通过原子干涉仪进行探测[29].

三维的狄拉克方程所需的狄拉克矩阵为四个, 故不再是泡利矩阵, 而是4×4的矩阵, 此时的狄拉克哈密顿量在外尔表象下写作

$$H_{\mathrm{D}} = \begin{pmatrix} c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & mc^2 \\ mc^2 & -c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

当$m = 0$时, 该哈密顿量可用于描述三维拓扑绝缘体和普通绝缘体发生拓扑相变时的状态, 可用于描述狄拉克半金属. 狄拉克半金属拥有四重简并的狄拉克点, 类似三维推广的石墨烯[30]. 在固体材料发现狄拉克半金属之前, 已经有人提出了几种在三维光晶格中模拟无质量和有质量狄拉克费米子的方案[31–35]. 通过选取适当的参数值, 线心立方光晶格中的冷费米子可表现出具有可调质量的类三维狄拉克粒子的行为[33]. 此外, 通过在立方光晶格中施加人工阻挫的磁场可以实现无质量的狄拉克费米子[34], 其质量项可通过布拉格脉冲耦合冷原子而产生. 也有人提出, 无质量和有质量的三维相对论费米子也可以用拉曼辅助跳跃在三维光晶格中的超冷费米子原子进行模拟[31,32,35].

4 三维光晶格中外尔方程的实现

无质量的狄拉克方程 (8) 式在外尔表象下可写成

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi_{\pm}}{\partial t} = H_{\pm}\psi_{\pm},\ H_{\pm} = \pm c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}, \tag{18}$$

其中$\psi_{\pm}$是二分量波矢, 描述具有不同螺旋度 (手性) 的外尔费米子. 根据螺旋度的定义$\hat{h} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$可知, 当粒子自旋与动量平行 (反平行) 时$h = +1$ ($h = -1$), 故无质量狄拉克方程实质上可分解为两个螺旋度相反的外尔方程的叠加. 外尔费米子作为预言中的无质量的基本粒子, 在高能物理领域至今仍未被实验发现. 而在凝聚态体系的某些三维晶格的动量空间中, 低能有效哈密顿量由外尔方程描述, 这些系统被称为外尔半金属. 外尔半金属中外尔准费米子激发的发现进一步掀起了在凝聚态系统研究和寻找相对论量子力学描写的准粒子的研究热潮.

冷原子光晶格系统中实现外尔半金属的理论方案已有许多, 如在二维光晶格中引入自旋轨道耦合, 再加一个人工维度可以实现外尔半金属[36]; 通过在两个人工维度中堆垛一维双势阱晶格的拓扑相, 或者是直接将二维的具有交错磁通棋盘结构或蜂巢光晶格堆垛成三维的晶格[37–40], 都可以实现外尔半金属[37]. 在这些方案中, 自旋自由度可选择用两个原子内态或者两个子格子, 对应所需要实现的跳跃项需用到人工自旋轨道耦合和人工磁场. 文

献 [41] 给出了通过堆垛 Hofstadter-Harper 系统成为一个立方晶格以实现拓扑外尔半金属相的方案. 图 3 中展示的是沿 x 和 z 方向存在激光辅助跳跃的三维晶格示意图. 为实现这样的跳跃, 应先通过在每个格点引入足够大线性倾斜 $\varDelta$ 以抑制这两个方向的自然跳跃 (t_x, t_z) $(t_{x,z} \ll \varDelta \ll E_{\rm gap})$, 该线性倾斜可以通过在 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}$ 方向引入线性的势场 (如重力场、磁场等) 产生. 正如在 2.1 节中介绍的方法, 引入两束远失谐频率和动量分别相差 $\delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \varDelta/\hbar$ 和 $\delta\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2$ 的拉曼光可重新诱导这两个方向发生共振跳跃[15,16]. 该三维晶格对应的有效哈密顿量为

$$\begin{aligned} H_{\rm 3D} = -\sum_{m,n,l}&(K_x {\rm e}^{-{\rm i}\varPhi_{m,n,l}} a^{\dagger}_{m+1,n,l} a_{m,n,l} \\ &+ t_y a^{\dagger}_{m,n+1,l} a_{m,n,l} \\ &+ K_z {\rm e}^{-{\rm i}\varPhi_{m,n,l}} a^{\dagger}_{m,n,l+1} a_{m,n,l} + {\rm h.c.}), \end{aligned} \tag{19}$$

其中 $a^{\dagger}_{m,n,l}$ $(a_{m,n,l})$ 表示在格点 (m,n,l) 的产生 (湮灭) 算符, $\varPhi_{m,n,l} = \delta\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_{m,n,l} = m\varPhi_x + n\varPhi_y + l\varPhi_z$. 随后选取合适的激光方向使得 $(\varPhi_x, \varPhi_y, \varPhi_z) = \pi(1,1,2)$, 即 $\varPhi_{m,n,l} = (m+n)\pi$, 如图 3(b) 所示. 一方面可以将该三维晶格看作是由图 3(c) 和图 3(d) 所示的两种不同类型的二维晶格 (平行于 xz 平面) 沿 y 方向的交替叠加, 此时两平面间沿 y 方向的跳跃是常规的. 从另一个角度来看, 该三维系统可

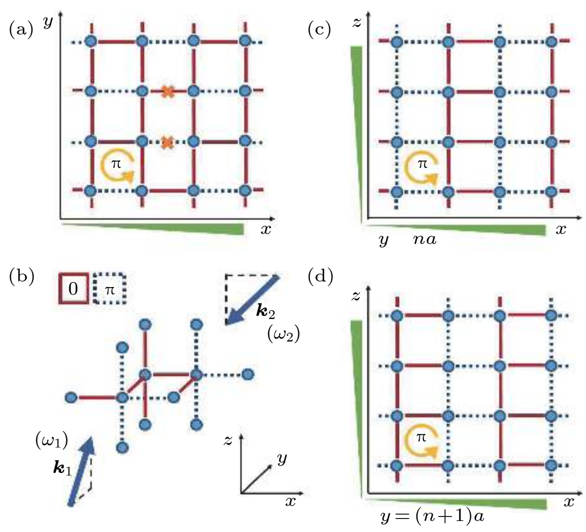

图 3 实现外尔半金属的三维立方晶格示意图. 合理设计 x 和 z 方向跳跃, 在动量空间会出现外尔点. 虚线和实线分别表示获得相位 π 和 0[41]

Fig. 3. Schematic diagram of a three-dimensional cubic lattice of a Weyl semimetal. The Weyl points will be created in the momentum space if the tunneling along x and z directions are well-designed . The dashed and solid lines indicate the phase π and 0, respectively.

视为图 3(a) 中磁通为 $\alpha = 1/2$ 的 Hofstader-Harper 二维晶格在 z 方向的堆叠. 此时沿 z 方向的跳跃会携带相位 0 或 π, 分别对应 $m+n$ 为偶数或奇数的情况. 该系统是空间反演对称破缺的, 对应布洛赫哈密顿量为

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{k}) = -2(t_y\cos k_y\sigma_x + K_x\sin k_x\sigma_y - K_z\cos k_z\sigma_z), \tag{20}$$

对应两个带的能谱

$$E_{\boldsymbol{k}} = \pm 2\sqrt{K_x^2\cos^2 k_x + t_y^2\cos^2 k_y + K_z^2\cos^2 k_z}.$$

两个能带在第一布里渊区内的四个外尔点 $(k_x, k_y, k_z) = (0, \pm\pi/2, \pm\pi/2)$ 接触在一起, 能隙闭合. 同理, 在外尔点 $\boldsymbol{k}_{\rm W}$ 附近的色散是线性的, 可由各向异性的外尔哈密顿量 $H_{\rm W}(\boldsymbol{q}) = \sum_{i,j} q_i\nu_{ij}\sigma_j$ 描述 $(\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_{\rm W})$. 这里的 $[\nu_{ij}]$ 是 3×3 的矩阵, 对应矩阵元 $\nu_{xy} = -2K_x a$, $\nu_{yx} = \pm 2t_y a$, $\nu_{zz} = \pm 2K_z a$, 其他为零. 系统所具有的的拓扑特性由外尔点的手性决定, 即 $\kappa = {\rm sign}({\rm det}[\nu_{ij}])$. 为与 (18) 式一致, 可对 $H_{\rm W}$ 做幺正变换: ${\rm e}^{{\rm i}\sigma_z\frac{\pi}{4}} H_{\rm W}(\boldsymbol{q}) {\rm e}^{-{\rm i}\sigma_z\frac{\pi}{4}} = v_x q_x\sigma_x + v_y q_y\sigma_y + v_z q_z\sigma_z$, 此时 $v_x = \nu_{xy}$, $v_y = -\nu_{yx}$, $v_z = \nu_{zz}$.

除了使用与测量二维狄拉克点类似的方法可以探测三维的外尔点之外, 另一种观测外尔点的方法是布拉格光谱法: 采用额外的一对拉曼光耦合外尔哈密顿量, 将下能带的原子激发至上能带用以探测能带结构. 该方案将揭示具有非常高分辨率的外尔点的存在, 因为它不会改变内部原子态, 因此对塞曼位移并不敏感. 获得外尔半金属相后, 可进一步研究其独特的拓扑表面态, 即连接两个手性相反的外尔点的费米弧. 外加与一对手性相反的外尔点平行的人工电磁场, 系统因手征反常将会出现负磁阻效应, 其对应的输运性质也是一个热门的研究课题[39]. 此外, 在标准的线性色散的外尔哈密顿量上增加某一方向的线性项 $q_j\sigma_0$, 可获得第二类的外尔点, 在费米能级附近的激发同时包含电子和空穴型的激发[42–44]. 文献 [42] 中提出的方案可实现一类和二类的外尔半金属以及两者间的 Lifshitz 型拓扑相变.

5 光晶格中麦克斯韦方程的实现

介质中无源无流的麦克斯韦方程可写为

$$\begin{aligned} &\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0, \\ &\nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}, \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

这里电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 满足关系 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\varepsilon_{\rm r}\boldsymbol{E}$, 磁场 $\boldsymbol{B}$ 与磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 满足关系 $\boldsymbol{B}=\mu_0\mu_{\rm r}\boldsymbol{H}$. 其中 ε_0 (μ_0) 为真空介电常数 (磁导率), $\varepsilon_{\rm r}$ 和 $\mu_{\rm r}$ 分别为相对介电常数和相对磁导率. 在各向异性的介质中 $\varepsilon_{\rm r}$ 和 $\mu_{\rm r}$ 不再是数而是矩阵. 简单起见, 假设它们都是对角的, (21) 式是相对论性方程, 但并非量子力学方程. 定义光子波函数为 $\varPhi=\tilde{\boldsymbol{E}}+{\rm i}\tilde{\boldsymbol{H}}$, 其中 $\tilde{E}_\alpha=\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_\alpha}E_\alpha$, $\tilde{H}_\alpha=\sqrt{\mu_0\mu_\alpha}H_\alpha$, 光速 $c=\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, $\varepsilon_\alpha(\mu_\alpha)$ 为 $\varepsilon_{\rm r}(\mu_{\rm r})$ 的对角元. 代入 (21) 式, 可得到麦克斯韦方程的薛定谔形式[45], 即

$$
{\rm i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varPhi=H_{\rm M}\varPhi, \tag{22}
$$

其中 $H_{\rm M}$ 为单光子的哈密顿量, 表示为

$$
H_{\rm M}=v_x\hat{S}_x\hat{p}_x+v_y\hat{S}_y\hat{p}_y+v_z\hat{S}_z\hat{p}_z, \tag{23}
$$

其中 $v_\alpha=c/\sqrt{\varepsilon_\beta\mu_\gamma}$, $\hat{p}_\alpha=-{\rm i}\hbar\partial_\alpha$, $\hat{S}$ 为自旋 1 矩阵[45], 对应矩阵元 $\left(\hat{S}_\beta\right)_{\alpha\gamma}={\rm i}\xi_{\alpha\beta\gamma}$ $(\alpha,\beta,\gamma=x,y,z)$, $\xi_{\alpha\beta\gamma}$ 为列维-齐维塔张量. 当 $\varepsilon_{\rm r}=\mu_{\rm r}=1$ 时, $H_{\rm M}=c\hat{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}$ 回到真空各向同性的情况.

麦克斯韦型哈密顿量 $H_{\rm M}$ 本是用于描述无质量光子的行为, 但一些晶格系统中的准粒子激发也可由 $H_{\rm M}$ 描述. 与高能物理中粒子由庞加莱群描述不同, 晶体中的准粒子受到的仅是某些庞加莱子群 (空间群) 的约束, 因此在晶格系统中寻找赝自旋为 1 的费米子激发是可能的. 换句话说, 光晶格中也可实现 $H_{\rm M}$, 从而模拟麦克斯韦方程. 由该哈密顿量描述的费米子激发, Zhu 等[45] 称其为麦克斯韦费米子. 在光晶格中实现麦克斯韦费米子有两种方案: 1) 选择无相互作用费米子的三个内态 $|s\rangle=|\uparrow\rangle,|0\rangle,|\downarrow\rangle$ 作为赝自旋 1 的自旋态, 此时晶格的形状可以是最简单的正方形或立方体结构; 2) 选用晶格中三个子格子作为赝自旋态, 此时所需的激光束较少.

下面简要介绍文献 [45] 中的第一种方案. 首先考虑实现的二维晶格哈密顿量为

$$
\begin{aligned}
\hat{H}_{\rm 2D}&=t\sum_{\boldsymbol{r}}\left[\hat{H}_{\boldsymbol{rx}}+\hat{H}_{\boldsymbol{ry}}+\left(\varGamma_0\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{r},0}\hat{a}_{\boldsymbol{r},\uparrow}+{\rm h.c.}\right)\right],\\
\hat{H}_{\boldsymbol{rx}}&=-\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x},0}(\hat{a}_{\boldsymbol{r},\downarrow}+{\rm i}\hat{a}_{\boldsymbol{r},\uparrow})\\
&\quad+\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{x},0}(\hat{a}_{\boldsymbol{r},\downarrow}-{\rm i}\hat{a}_{\boldsymbol{r},\uparrow})+{\rm h.c.},\\
\hat{H}_{\boldsymbol{ry}}&=\ \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{y},\uparrow}(\hat{a}_{\boldsymbol{r},\downarrow}+{\rm i}\hat{a}_{\boldsymbol{r},0})\\
&\quad-\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{y},\uparrow}(\hat{a}_{\boldsymbol{r},\downarrow}-{\rm i}\hat{a}_{\boldsymbol{r},0})+{\rm h.c.},
\end{aligned} \tag{24}
$$

$\hat{H}_{\boldsymbol{rx}}$ 和 $\hat{H}_{\boldsymbol{ry}}$ 分别表示沿 x 和 y 方向的自旋翻转, 对应跳跃系数为 t. $\hat{a}_{i,s}$ 为格点 $\boldsymbol{r}$ 的 $|s\rangle$ 态的湮灭算符, $\varGamma_0=2iM$ 项为原位的自旋翻转, M 为可调参数. 考虑处于二维倾斜正方光晶格中的无相互作用原子, 选择三个原子内态来标记自旋. 原格点位置的自旋翻转项 $\Gamma_0\hat{a}^\dagger_{\mathbf{r},0}\hat{a}_{\mathbf{r},\uparrow}$ 可以很容易地通过引入射频场或拉曼光束耦合 $|0\rangle$ 和 $|\uparrow\rangle$ 产生. 主要困难在于实现沿 x 和 y 方向的自旋翻转 $\hat{H}_{\mathbf{rx}}$ 和 $\hat{H}_{\mathbf{ry}}$. 为此, 定义叠加态

$$
\begin{aligned}
&|1_x\rangle=(|\downarrow\rangle-{\rm i}|\uparrow\rangle)/\sqrt{2},\ \ |2_x\rangle=(|\downarrow\rangle+{\rm i}|\uparrow\rangle)/\sqrt{2},\\
&|1_y\rangle=(|\downarrow\rangle-{\rm i}|0\rangle)/\sqrt{2},\ \ |2_y\rangle=(|\downarrow\rangle+{\rm i}|0\rangle)/\sqrt{2},
\end{aligned} \tag{25}
$$

两个跳跃项可表示为

$$
\begin{aligned}
T_x=T_{+x}+T_{-x}&=\overset{\times}{\curvearrowleft}|1_x\rangle\overset{\sqrt{2}}{\curvearrowright}|0\rangle\\
&\quad+|0\rangle\overset{-\sqrt{2}}{\curvearrowleft}|2_x\rangle\overset{\times}{\curvearrowright}+{\rm h.c.},\\
T_y=T_{+y}+T_{-y}&=\overset{\times}{\curvearrowleft}|1_y\rangle\overset{-\sqrt{2}}{\curvearrowright}|\uparrow\rangle\\
&\quad+|\uparrow\rangle\overset{\sqrt{2}}{\curvearrowleft}|2_y\rangle\overset{\times}{\curvearrowright}+{\rm h.c.},
\end{aligned} \tag{26}
$$

其中 $\overset{\times}{\curvearrowright}$ 意味着该方向的跳跃被禁止. 跳跃项 T_{+x} 和 T_{+y} 可选择合适的激光频率和偏振通过激光辅助跳跃实现. 首先, 通过在两个方向引入均匀能量梯度对晶格进行倾斜, 从而打破宇称 (左右) 对称, 这可以通过重力场或者交流或直流的斯塔克位移的梯度来产生. 在不同方向上, 每个位置需要不同的能量梯度 $\varDelta_{x,y}$, 如 $\varDelta_x=1.5\varDelta_y$. 由于存在大的势能倾斜, 自然跳跃将会被抑制, 要恢复跳跃项需应用到双光子拉曼耦合, 这就要求设计合适的激光束及其结构[45]. 该系统对应动量空间的哈密顿量为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(\boldsymbol{k})&=2t\sin k_x\hat{S}_x+2t\sin k_y\hat{S}_y\\
&\quad+2t(M-\cos k_x-\cos k_y)\hat{S}_z,
\end{aligned} \tag{27}
$$

这里已令 $a=\hbar\equiv1$. 对应能谱为 $E=0$, $\pm2t\sqrt{\sin^2k_x+\sin^2k_y+(M-\cos k_x-\cos k_y)^2}$. 该系统存在丰富的相图: $|M|>0$ 时, 系统为平庸的绝缘体; $0<|M|<2$ 时, 系统为非平庸的陈绝缘体, 对应陈数 $|C|=2$; 当 $|M|=2$ 时, 系统处于拓扑金属态, 对应 Berry 相位 $|\gamma|=2\pi$; $M=0$ 时为平庸的金属相. 同理, $M=2$ 时能隙关闭, 存在一个简并点 $\boldsymbol{K}_M=(0,0)$, Zhu 等称其为麦克斯韦点. 将哈密顿量在该点附近展开, 可得到二维麦克斯韦哈密顿量

$$
\mathcal{H}(\boldsymbol{q})=v_xq_x\hat{S}_x+v_yq_y\hat{S}_y, \tag{28}
$$

其中 $v_x=v_y=2t$, $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}-\boldsymbol{K}_M$. 类似可以得到 $M=-2$ 或 $M=0$ 时的麦克斯韦哈密顿量. 值得注

意的是, 系统处于非平庸的陈绝缘体相时 (Zhu 等称其为麦克斯韦绝缘体), 存在两个边界态, 其有效哈密顿量由一维麦克斯韦哈密顿量 $\mathcal{H}_{\rm edge} = v_y k_y \hat{S}_y$ 描述, 对应粒子螺旋度 $(h = \langle {\rm sign}(k_y)\hat{S}_y \rangle)$ 守恒为 $+1$ $(0 < M < 2)$ 或 -1 $(-2 < M < 0)$, 分别与右旋和左旋圆偏振光子态对应.

该模型同样可以推广到三维, 此时哈密顿量为

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\rm 3D} = &\ \hat{H}_{\rm 2D} + t\sum_{\boldsymbol{r}} \hat{H}_{\boldsymbol{rz}},\\ \hat{H}_{\boldsymbol{rz}} = &\ -{\rm i}(\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{z},0}\hat{a}_{\boldsymbol{r},\uparrow} + \hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{r},0}\hat{a}_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{z},\uparrow}) + {\rm h.c.},\end{aligned} \quad (29)$$

类似的方法可以实现 $\hat{H}_{\boldsymbol{rz}}$, 该项在动量空间贡献为 $-2t\cos k_z \hat{S}_z$. 此时的系统类似于推广的外尔半金属相, $1 < M < 3$具有两个麦克斯韦点, 两个点携带拓扑荷相反, 为 $C = \pm 2$. 如 $M = 2$时, $\boldsymbol{K}_{M_{\pm}} = (0, 0, \pm\pi/2)$, 两点附近的低能有效哈密顿量为三维麦克斯韦哈密顿量

$$\mathcal{H}_{M_{\pm}}(\boldsymbol{q}) = v_x q_x \hat{S}_x + v_y q_y \hat{S}_y \pm v_z q_z \hat{S}_z, \quad (30)$$

其中等效光速 $v_x = v_y = v_z = 2t$. 类比外尔半金属, 此三维的麦克斯韦金属相同样存在费米弧, 因麦克斯韦点的陈数为 ± 2, 故在每个表面上存在两条费米弧, 但因存在零能体态, 因而只能在零能附近看见费米弧. 在冷原子系统中实现麦克斯韦准粒子需要克服很多困难, 但最近在超导比特的参数空间中, 三维麦克斯韦哈密顿量 $\hat{H}_M$ 已经被实验模拟[46].

6 总结与展望

本文介绍了利用光晶格实现相对论性量子力学波动方程的几个具体方案, 并讨论了相应的独特性质和所用到的相关测量方法. 这套方法和思路可以用于实现和研究更高自旋的相对论性波动方程[47,48], 以及最近引起广泛研究兴趣的可用于拓扑量子计算的阿贝尔或非阿贝尔任意子, 如马约纳拉 (Majorana) 费米子、斐波纳吉 (Fibonacci) 任意子、仲费米子 (parafermions) 等[49–53]. 此外, 赝自旋 1 的拓扑麦克斯韦费米子有非常丰富的物理性质, 值得更进一步研究. 类似于狄拉克和外尔费米子, 可以讨论麦克斯韦粒子的克莱因隧穿效应[54,55] 和 Zitterbewegung 振荡[56] 动力学, 以及非常规的输运特性[57] 等. 例如, 在狄拉克和外尔费米子的 Zitterbewegung 效应中存在一个振荡频率, 但在麦克斯韦费米子的 Zitterbewegung 振荡中有两种不同的振荡频率[58]. 此外可将二维模型推广到时间反演的体系, 用于模拟光的量子自旋霍尔效应[59]. 光晶格中的超冷原子因具有高度可控性[60], 目前已经成为了模拟凝聚态系统的一个强有力的工具和平台, 并且已经取得了一些值得庆贺的成绩, 如 Su-Schrieffer-Heeger[61], Bose-Hubbard[62,63], Haldane[64], Hofstadter-Harper[24,25,65] 模型等, 这些模型在凝聚态系统中难以实现, 但已经在冷原子光晶格系统中被实验实现[11]. 未来, 冷原子光晶格系统将继续用于模拟和研究量子多体系统、拓扑量子物质、高能、天体、甚至是量子信息等领域的问题[66,67]. 由于具有独特而有趣的物理性质, 超冷原子物理必将在各个领域的研究和实现上大放异彩.

参考文献

[1] Chu S 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 685
[2] Cohen-Tannoudji C N 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 707
[3] Phillips W D 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 721
[4] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E, Cornell E A 1995 *Science* **269** 198
[5] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R, van Druten N J, Durfee D S, Kurn D M, Ketterle W 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969
[6] Chin C, Grimm R, Julienne P, Tiesinga E 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 1225
[7] Jessen P, Deutsch I 1996 *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **37** 95
[8] Dalibard J, Gerbier F, Juzeliūnas G, Öhberg P 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1523
[9] Goldman N, Juzeliūnas G, Öhberg P, Spielman I B 2014 *Rep. Prog. Phys.* **77** 126401
[10] Zhai H 2015 *Rep. Prog. Phys.* **78** 026001
[11] Zhang D W, Zhu Y Q, Zhao Y X, Hui Y, Zhu S L 2018 arXiv: 1810.09228
[12] Zhu S L, Zhang D W, Wang Z D 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 210403
[13] Lewenstein M, Sanpera A, Ahufinger V, Damski B, Sen A, Sen U 2007 *Adv. Phys.* **56** 243
[14] Jaksch D, Zoller P 2003 *New J. Phys.* **5** 56
[15] Gerbier F, Dalibard J 2010 *New J. Phys.* **12** 033007
[16] Struck J, Olschlager C, Weinberg M, et al. 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 225304
[17] Grimm R, Weidemüller M 2000 *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **42** 95
[18] Zhu S L, Wang B, Duan L M 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 260402
[19] Zhang D W, Shan C J, Mei F, Yang M, Wang R Q, Zhu S L 2014 *Phys. Rev. A* **89** 015601
[20] Mandel O, Greiner M, Widera A, Rom T, Hansch T W, Bloch I 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 010407
[21] Lee P J, Anderlini M, Brown B L, Sebby-Strabley J, Phillips W D, Porto J V 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 020402
[22] Mazza L, Bermudez A, Goldman N, Rizzi M, Martin-Delgado M A, Lewenstein M 2012 *New J. Phys.* **14** 015007
[23] Aidelsburger M, Atala M, Nascimbène M, Trotzky S, Chen Y A, Bloch I 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 255301

[24] Aidelsburger M, Atala M, Lohse M, Barreiro J T, Paredes B, Bloch I 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 185301
[25] Miyake H, Siviloglou G A, Kennedy C J, Burton W C, Ketterle W 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 185302
[26] Tarruell L, Greif D, Uehlinger T, Jotzu G, Esslinger T 2012 *Nature* **483** 302
[27] Lim L K, Fuchs J N, Montambaux G 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 175303
[28] Uehlinger T, Greif D, Jotzu G, Tarruell L, Esslinger T, Wang L, Troyer M 2013 *Eur. Phys. J. Special Topics* **217** 121
[29] Duca L, Li T, Reitter M, Bloch I, Schleier-Smith M, Schneider U 2015 *Science* **347** 288
[30] Armitage N P, Mele E J, Vishwanath A 2018 *Rev. Mod. Phys.* **90** 015001
[31] Bermudez A, Mazza L, Rizzi M, Goldman N, Lewenstein M, Martin-Delgado M A 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 190404
[32] Mazza L, Bermudez A, Goldman N, Rizzi M, Martin-Delgado M A, Lewenstein M 2012 *New J. Phys.* **14** 015007
[33] Yang M, Zhu S L 2010 *Phys. Rev. A* **82** 064102
[34] Lepori L, Mussardo G, Trombettoni A 2010 *Europhys. Lett.* **92** 50003
[35] Wilson K, New Phenomena in Subnuclear Physics, Plenum, New York, 1977.
[36] Zhang D W, Mei F, Xue Z Y, Zhu S L, Wang Z D 2015 *Phys. Rev. A* **92** 013612
[37] Ganeshan S, Sarma S D 2015 *Phys. Rev. B* **91** 125438
[38] Jiang J H 2012 *Phys. Rev. A* **85** 033640
[39] He W Y, Zhang S, Law K T 2016 *Phys. Rev. A* **94** 013606
[40] Hou J M, Chen W 2016 *Sci. Rep.* **6** 33512
[41] Dubček T, Kennedy C J, Lu L, Ketterle W, Soljačić M, Buljan H 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 225301
[42] Xu Y, Duan L M 2016 *Phys. Rev. A* **94** 053619
[43] Shastri K, Yang Z, Zhang B 2017 *Phys. Rev. B* **95** 014306
[44] Kong X, He J, Liang Y, Kou S 2017 *Phys. Rev. A* **95** 33629
[45] Zhu Y Q, Zhang D W, Yan H, Xing D Y, Zhu S L 2017 *Phys. Rev. A* **96** 033634
[46] Tan X, Zhang D W, Liu Q, Xue G, Yu H F, Zhu Y Q, Yan H, Zhu S L, Yu Y 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 130503
[47] Liang L, Yu Y 2016 *Phys. Rev. B* **93** 045113
[48] Lan Z, Goldman N, Bermudez A, Lu W, Öhberg P 2011 *Phys. Rev. B* **84** 165115
[49] Kitaev A, Laumann C 2009 arXiv: 0904.2771
[50] Trebst S, Troyer M, Wang Z, Ludwig A W W 2008 *Prog. Theor. Phys. Supp.* **176** 384
[51] Nayak C, Simon S H, Stern A, Freedman M, Sarma S D 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 1083
[52] Read N, Rezayi E 1999 *Phys. Rev. B* **59** 8084
[53] Liu S, Shan C J, Zhang Z M, Xue Z Y 2014 *Quantum Inf. Process.* **13** 1813
[54] Vaishnav J Y, Clark C W 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 153002
[55] Zhang D W, Xue Z Y, Yan H, Wang Z D, Zhu S L 2012 *Phys. Rev. A* **85** 013628
[56] Li Z, Wang H Q, Zhang D W, Zhu S L, Xing D Y 2016 *Phys. Rev. A* **94** 043617
[57] Xu Y, Duan L M 2017 *Phys. Rev. B* **96** 155301
[58] Shen X, Zhu Y Q, Li Z (In preparation)
[59] Bliokh K Y, Smirnova D, Nori F 2015 *Science* **348** 1448
[60] Qiu Y, He J, Wang Y H, Wang J, Zhang T C, Wang J M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6227 (in Chinese) [邱英, 何军, 王彦华, 王婧, 张天才, 王军民 2008 物理学报 **57** 6227]
[61] Atala M, Aidelsburger M, Barreiro J T, Abanin D, Kitagawa T, Demler E, Bloch I 2013 *Nat. Phys.* **9** 795
[62] Fisher M P A, Weichwan P B, Grinstein G, Fisher D S 1989 *Phys. Rev. B* **40** 546
[63] Jaksch D, Bruder C, Cirac J I, Zoller P 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 3108
[64] Jotzu G, Messer M, Desbuquois R, Lebrat M, Uehlinger T, Greif D, Esslinger T 2014 *Nature* **515** 237
[65] Aidelsburger M, Lohse M, Schweizer C, Atala M, Barreiro J T, Nascimbène S, Cooper N R, Bloch I, Goldman N 2015 *Nat. Phys.* **11** 162
[66] Yang Y, Chen S, Li X B 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 237101 (in Chinese) [杨圆, 陈帅, 李小兵 2018 物理学报 **67** 237101]
[67] Fan H 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 120301 (in Chinese) [范桁 2018 物理学报 **67** 120301]

SPECIAL TOPIC—Cold atoms and molecules

Simulating Dirac, Weyl and Maxwell equations with cold atoms in optical lattices*

Zhu Yan-Qing[1)] Zhang Dan-Wei[2)†] Zhu Shi-Liang[1)2)‡]

1) (*National Laboratory of Solid State Microstructures, School of Physics, Nanjing University, Nanjing* 210093, *China*)

2) (*Guangdong Provincial Key Laboratory of Quantum Engineering and Quantum Materials, School of Physics and Telecommunication Engineering, South China Normal University, Guangzhou* 510006, *China*)

(Received 30 October 2018; revised manuscript received 19 January 2019)

Abstract

Relativistic wave equations, such as Dirac, Weyl or Maxwell equations, are fundamental equations which we use to describe the dynamics of the microscopic particles. On the other hand, recent experimental and theoretical studies have shown that almost all parameters in cold atomic systems are precisely tunable, so the cold atom systems are considered as an ideal platform to perform quantum simulations. It can be used to study some topics in high energy and condensed matter physics. In this article, we will first introduce the ideas and methods for engineering the Hamiltonian of atoms, mainly related to the theories of laser-assisted tunneling. Based on these methods, one can simulate the equations of motion of relativistic particles and observe some interesting behaviors which are hard to be observed in other systems. The article reviews these recent advances.

Keywords: quantum simulations, optical lattices, laser-assisted tunneling, relativistic wave equations

PACS: 67.85.–d, 03.75.Ss, 71.10.Fd, 03.75.Lm **DOI:** 10.7498/aps.68.20181929

* Project supported by the National Key Research and Development Program of China (Grant No. 2016YFA0301803), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11604103, 91636218, 11474153), and the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. 2016A030313436).

† Corresponding author. E-mail: zdanwei@126.com

‡ Corresponding author. E-mail: slzhu@nju.edu.cn