

# 基于 Hardy-type 佯谬的混合态高概率 量子非局域关联检验\*

刘晋 缪波 贾欣燕 樊代和<sup>†</sup>

(西南交通大学物理科学与技术学院, 成都 610031)

(2019 年 7 月 22 日收到; 2019 年 8 月 19 日收到修改稿)

量子非局域关联是量子力学预言的重要现象, 同时也是量子理论区别于经典理论的重要特征之一. 因此, 对量子非局域关联的高成功概率检验有着重要意义. 本文提出了一种基于 Hardy-type 佯谬的、可用于针对纯态和混合态进行高成功概率量子非局域关联检验的逻辑, 并对其适用性进行了证明. 研究发现, 利用本文提出的检验逻辑对量子纯态进行量子非局域关联检验, 成功检验概率将随着量子纯态的纠缠度增加而出现先增大后减小的现象, 最大的成功检验概率超过 39%. 进一步利用提出的检验逻辑, 以 Werner 态这种量子混合态为例, 进行了针对混合态的量子非局域关联的高概率检验研究. 研究发现, 随着混合态的纯度增加, 成功进行量子非局域关联检验的概率也将增加. 最后给出了针对 Werner 态这种量子混合态进行高成功概率量子非局域关联检验的条件和范围.

**关键词:** 量子非局域关联, Hardy-type 佯谬, 量子混合态**PACS:** 03.65.Ud, 42.50.Dv, 03.67.Mn**DOI:** 10.7498/aps.68.20191125

## 1 引言

1935 年, Einstein, Podolsky 和 Rosen 三人<sup>[1]</sup>提出了著名的关于量子力学完备性的讨论, 即 EPR 佯谬. 他们认为量子力学是一套不完备的理论, 即量子力学预言存在着量子非局域关联的现象. 因此, 量子非局域关联被认为是量子力学最典型也是最重要的特征之一, 同时也是量子力学区别于经典物理的重要现象之一. 同时, 量子非局域关联还对量子信息进程的实现具有重要意义, 因此对量子非局域关联的检验不论从理论还是实验研究显得至关重要.

目前对于量子非局域关联的检验常用的有两类方案: 一是通过对 Bell 不等式的违背来检验量子非局域关联, 另外一类则是无不等式的检验方案

来检验量子非局域关联. 1964 年, Bell<sup>[2]</sup>提出一个满足局域隐变量而在量子力学中是违背的不等式来说明没有任何的局域实在论能重复量子力学的预测, 从而验证了量子非局域关联的存在. 1969 年, Clauser, Horne, Shimony 和 Holt 四人<sup>[3]</sup>在 Bell 不等式的基础上, 提出了两比特的更加便于实验验证量子非局域关联的 CHSH-Bell 不等式, 并且在实验上得到了验证<sup>[4]</sup>. 1990 年, Greeberger, Horne, Zeilinger<sup>[5]</sup>提出的 GHZ 佯谬是关于量子非局域关联的无不等式证明, 然而其只适用于大于等于三粒子的系统. 1993 年, 为了证明两粒子系统的量子非局域关联, Hardy<sup>[6]</sup>提出了两粒子情况下的佯谬, 该证明表面仅只有一阶梯子的情况下, 可以获得违反局域隐变量理论的最大概率约为 9%. 基于 Hardy 佯谬, 通过对两比特纠缠态的联合测量, 即可在无统计不等式的情况下验证量子非局

\* 计算物理国防科技重点实验室项目 (批准号: 6142 A05180401) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: [dlfan@swjtu.edu.cn](mailto:dlfan@swjtu.edu.cn)

域关联, 因此 Hardy 佯谬也被认为是“Bell 定理的最佳的版本”<sup>[7]</sup>. 尽管利用 Hardy 佯谬检验量子非局域关联的概率非常低, 但是足以证明量子非局域关联的存在. 之后学者将 Hardy 佯谬推广到  $K$  阶梯子的量子非局域关联的证明, 当  $K \rightarrow \infty$  时, 最大概率可达到 50%<sup>[8]</sup>. 后来, 通过许多量子态, 例如通过利用光子对的偏振纠缠态<sup>[9–11]</sup>, 轨道角动量纠缠态<sup>[12,13]</sup> 以及能量-时间纠缠态<sup>[14]</sup>, 实验结果均证明了量子非局域关联现象的存在, 违背了经典理论的预测. 后来, 学者们又将 Hardy 佯谬推广到了多粒子<sup>[15,16]</sup> 和多维<sup>[17]</sup> 的系统中, 并且成功地检验了量子非局域关联现象. 然而, 值得关注的是, 到目前为止, 上述提到的大多数关于量子非局域关联检验的研究, 均是以量子纯态作为为研究对象的.

从实验角度而言, 由于受到各种实验不完美因素的限制, 实验制备的量子态往往是一个量子混合态. 因此, 利用量子混合态来进行量子非局域关联的检验就具有重要的现实意义. 目前, 针对量子混合态进行的量子非局域关联检验的研究中, 文献<sup>[18]</sup> 将原始量子非局域关联检验的相关证明推广到一类特殊的混合态, 给出了一个满足混合态量子非局域关联检验的必要条件. 文献<sup>[19]</sup> 将原始的量子非局域关联的严格证明进行改进和推广, 将一些典型的混合态进行了量子非局域关联的相关研究, 改进了文献<sup>[18]</sup> 中的结果, 但是其不利于进行实验的验证. 尽管文献<sup>[20]</sup> 提出了一种基于混合态的量子非局域关联检验更优的条件, 但是成功检验概率较小, 不利于进行实际的实验检验.

本文研究了一种适用于量子混合态<sup>[21,22]</sup> 进行 Hardy-type 佯谬的逻辑, 这种逻辑可以以较高的成功概率来进行针对量子混合态的量子非局域关联检验. 首先, 本文介绍了提出的可适用于量子混合态的高概率 Hardy-type 佯谬逻辑, 并证明了其正确性; 其次, 证明了提出的检验逻辑也能适用于纯态的量子非局域关联检验的情况; 最后, 本文以 Werner 态<sup>[23]</sup> 这种量子混合态为例, 进一步研究了进行量子非局域关联检验的条件等.

## 2 适用于量子混合态的 Hardy-type 佯谬高概率检验逻辑

受文献<sup>[24]</sup> 启发, 我们以两比特态的量子态为基础, 首先给出可用于混合态的高概率 Hardy-

type 佯谬检验逻辑. 考虑由自发参量下转换所产生的信号光 (s) 和闲置光 (i), 选取相应的测量基对信号闲置光子进行偏振联合测量. 用  $P(\alpha_s, \beta_i)$  表示测得 s 光子的偏振在  $\alpha_s$  方向和 i 光子的偏振在  $\beta_i$  方向的联合测量概率. 由于 s 光子与 i 光子的偏振测量概率可看作两个独立的事件, 因此可以得到:  $P(\alpha_{ms}, \beta_{ni}) = P(\alpha_{ms})P(\beta_{ni})$ , [ $m, n = 1, 2$ ]. 定义  $\alpha_{ms}^\perp = \alpha_{ms} + \pi/2$  和  $\beta_{ni}^\perp = \beta_{ni} + \pi/2$ , 则有:

$$P(\alpha_{ms}) + P(\alpha_{ms}^\perp) = 1, \quad (1a)$$

$$P(\beta_{ni}) + P(\beta_{ni}^\perp) = 1. \quad (1b)$$

在经典局域关联下, 考虑能够通过测量基  $\{\alpha_{1s}^\perp, \beta_{1i}^\perp\}$  的光子. 即

$$H = P(\alpha_{1s}^\perp, \beta_{1i}^\perp) \neq 0. \quad (2)$$

假设通过选取合适的测量基  $\{\alpha_{ms}, \beta_{ni}\}$ , 可使 (3)–(5) 式同时满足:

$$\begin{aligned} H_1 &= P(\alpha_{1s}, \beta_{1i}) + P(\alpha_{2s}, \beta_{2i}^\perp) \\ &= P(\alpha_{1s})P(\beta_{1i}) + P(\alpha_{2s})P(\beta_{2i}^\perp) = 1, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} H_2 &= P(\alpha_{1s}^\perp, \beta_{2i}^\perp) + P(\alpha_{2s}, \beta_{1i}) \\ &= P(\alpha_{1s}^\perp)P(\beta_{2i}^\perp) + P(\alpha_{2s})P(\beta_{1i}) = 1, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} H_3 &= P(\alpha_{1s}, \beta_{2i}) + P(\alpha_{2s}^\perp, \beta_{2i}) + P(\alpha_{2s}, \beta_{1i}^\perp) \\ &= P(\alpha_{1s})P(\beta_{2i}) + P(\alpha_{2s}^\perp)P(\beta_{2i}) \\ &\quad + P(\alpha_{2s})P(\beta_{1i}^\perp) = 1. \end{aligned} \quad (5)$$

在满足 (2) 式的情况下, 受 (3)–(5) 式条件的约束, 可以证明能够得出如下两个结论.

$$1) \ 0 < P(\alpha_{ms}) < 1, \ 0 < P(\alpha_{ms}^\perp) < 1, \ 0 < P(\beta_{ni}) < 1, \ 0 < P(\beta_{ni}^\perp) < 1.$$

**证明** 由 (2) 式可知, s 光子的偏振与 i 光子的偏振必定不在  $\alpha_{1s}$  和  $\beta_{1i}$  方向, 即  $P(\alpha_{1s}) \neq 1$  与  $P(\beta_{1i}) \neq 1$ . 若  $P(\alpha_{1s}^\perp, \beta_{1i}^\perp) = 1$ , 则代入 (3) 式后可得到  $P(\alpha_{2s}, \beta_{2i}^\perp) = 1$ , 此结果不能满足 (5) 式. 因此可以得出  $0 < P(\alpha_{1s}^\perp, \beta_{1i}^\perp) < 1$ . 若 s 光子偏振在  $\alpha_{1s}^\perp$  方向, 即  $P(\alpha_{1s}^\perp) = 1$ , 那么根据 (3) 式有  $P(\alpha_{2s}, \beta_{2i}^\perp) = 1$ , 则此结果不能满足 (5) 式, 因此 s 光子偏振必定不在  $\alpha_{1s}^\perp$  方向, 即  $P(\alpha_{1s}^\perp) \neq 1$ . 若 i 光子偏振在  $\beta_{1i}^\perp$  方向, 即  $P(\beta_{1i}^\perp) = 1$ , 根据 (3) 式有  $P(\alpha_{2s}, \beta_{2i}^\perp) = 1$ , 则此结果不能满足 (5) 式, 所以 i 光子偏振必定不在  $\beta_{1i}^\perp$  方向, 即  $P(\beta_{1i}^\perp) \neq 1$ . 根据以上分析, 可得  $0 < P(\alpha_{1s}) < 1, \ 0 < P(\alpha_{1s}^\perp) < 1;$

$$0 < P(\beta_{1i}) < 1, 0 < P(\beta_{2i}^\perp) < 1.$$

由于上面已经得出  $0 < P(\alpha_{1s}, \beta_{1i}) < 1$ , 则根据 (3) 式可以得出  $0 < P(\alpha_{2s}, \beta_{2i}^\perp) < 1$ , 因此 s 光子的偏振与 i 光子的偏振必定不在  $\alpha_{2s}^\perp$  和  $\beta_{2i}$  方向上, 即  $P(\alpha_{2s}^\perp) \neq 1$  与  $P(\beta_{2i}) \neq 1$ . 若 s 光子偏振在  $\alpha_{2s}$  方向, 即  $P(\alpha_{2s}) = 1$ , 根据 (5) 式可得到  $P(\alpha_{1s}, \beta_{2i}) = 1$ , 则不能满足 (3) 式, 因此 s 光子偏振不在  $\alpha_{2s}$  方向, 即  $P(\alpha_{2s}) \neq 1$ . 若 i 光子偏振在  $\beta_{2i}^\perp$  方向上, 即  $P(\beta_{2i}^\perp) = 1$ , 根据 (5) 式有  $P(\alpha_{2s}^\perp, \beta_{1i}^\perp) = 1$ , 则不能满足 (3) 式, 因此 i 光子的偏振不能在  $\beta_{2i}^\perp$  方向上, 即  $P(\beta_{2i}^\perp) \neq 1$ . 因此可以得出:  $0 < P(\alpha_{2s}) < 1, 0 < P(\alpha_{2s}^\perp) < 1; 0 < P(\beta_{2i}) < 1, 0 < P(\beta_{2i}^\perp) < 1$ .

通过如上的分析, 可以汇总得出如下的结论:

$$0 < P(\alpha_{ms}) < 1, \quad 0 < P(\alpha_{ms}^\perp) < 1, \quad (6)$$

$$0 < P(\beta_{ni}) < 1, \quad 0 < P(\beta_{ni}^\perp) < 1. \quad (7)$$

2) 在满足 (2) 式的情况下, 经典局域关联将导致  $H_3 < 1$ .

**证明** 定义 (8)—(10) 式为:

$$H_4 = P(\alpha_{1s}^\perp) P(\beta_{1i}) + P(\alpha_{2s}^\perp) P(\beta_{2i}^\perp), \quad (8)$$

$$H_5 = P(\beta_{2i}) + P(\alpha_{2s}^\perp) P(\beta_{1i}^\perp), \quad (9)$$

$$H_6 = P(\alpha_{1s}^\perp) P(\beta_{2i}) + P(\alpha_{2s}) P(\beta_{1i}^\perp). \quad (10)$$

由 (3) 式与 (1a) 式以及 (8) 式相结合可得  $P(\beta_{1i}) + P(\beta_{2i}^\perp) = 1 + H_4 > 1$ , 进一步与 (1b) 和 (7) 式相比较可得到

$$P(\beta_{1i}^\perp) < P(\beta_{2i}^\perp) < 1. \quad (11)$$

对于 (11) 式, 由于  $0 < P(\alpha_{2s}^\perp) < 1$ , 因此可以得出  $P(\alpha_{2s}^\perp) P(\beta_{1i}^\perp) < P(\beta_{2i}^\perp)$ , 当 (11) 式前两项同时加上  $P(\beta_{2i})$  后, 则有

$$H_5 < P(\beta_{2i}^\perp) + P(\beta_{2i}) = 1. \quad (12)$$

通过 (4), (1b), (10) 式结合可得出  $P(\alpha_{1s}^\perp) + P(\alpha_{2s}) = 1 + H_6 > 1$ , 该式进一步与 (1a), (6) 式相比较可得

$$P(\alpha_{1s}) < P(\alpha_{2s}) < 1. \quad (13)$$

对于 (13) 式, 前两项同时加上  $P(\alpha_{2s}^\perp)$  之后, 再同时乘以  $P(\beta_{2i})$ , 然后加上  $P(\alpha_{2s}^\perp) P(\beta_{1i}^\perp)$ , 与 (12) 式结合可得  $H_3 < H_5 < 1$ .

从以上证明得到的两个结论中可以看出, 在经典局域关联下, 如果选取的测量基能够同时满足 (3)—(5) 式, 则 (2) 式必定不能成立, 即

$$H = P(\alpha_{1s}^\perp, \beta_{1i}^\perp) = 0. \quad (14)$$

然而, 在量子力学非局域关联理论中可以证明, 在选取的测量基能够同时满足 (3)—(5) 式时, 却可以得到  $H = P(\alpha_{1s}^\perp, \beta_{1i}^\perp) \neq 0$  的结论. 因此, 通过检验概率  $H$  值是否大于 0, 就可以检验量子非局域关联是否存在. 并且  $H$  值越大, 则对于量子非局域关联检验的概率越高, 量子非局域关联现象越明显.

### 3 基于 Hardy-type 佯谬的高概率量子非局域关联检验

下面首先来证明上述提出的高概率 Hardy-type 佯谬检验逻辑, 针对量子纯态中也是适用的. 对于两比特偏振纠缠纯态, 其波函数可表示为

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} (r|H\rangle_s |H\rangle_i + |V\rangle_s |V\rangle_i), \quad (15)$$

其中,  $|H\rangle$  表示水平偏振态,  $|V\rangle$  表示垂直偏振态,  $r (0 \leq r \leq 1)$  值的大小决定了 (15) 式所示的量子纯态的纠缠度. 例如, 当  $r = 1$  时, (15) 式为最大纠缠态.

当使用如下所示的通用测量基  $|\phi\rangle_M$ ,

$$|\phi\rangle_M = \cos \alpha_s \cos \beta_i |H_s H_i\rangle + \cos \alpha_s \sin \beta_i |H_s V_i\rangle + \sin \alpha_s \cos \beta_i |V_s H_i\rangle + \sin \alpha_s \sin \beta_i |V_s V_i\rangle, \quad (16)$$

作用于 (15) 式, 则可以计算得出相应的联合测量概率为

$$P(\alpha_{ms}, \beta_{ni}) = \langle \phi | \psi \rangle \langle \psi | \phi \rangle_M = \frac{(r \cos \alpha_{ms} \cos \beta_{ni} + \sin \alpha_{ms} \sin \beta_{ni})^2}{1+r^2}. \quad (17)$$

此时, 利用 Mathematica 程序, 可以计算得出在满足 (3)—(5) 式的条件下 (即  $H_1 = H_2 = H_3 = 1$ ),  $H = P(\alpha_{1s}^\perp, \beta_{1i}^\perp)$  可以获得的最大概率值  $H_{\max}$ . 图 1 显示了  $H_{\max}$  随  $r$  的变化关系.

从图 1 中可以看出, 对于如 (15) 式所示的量子纯态, 量子非局域关联的成功检验概率会随着  $r$  值的增大先增大后减小. 特别地, 当  $r = 0.773066$  时, 可获得最大的  $H_{\max}$  值, 即量子非局域关联检验的最大概率为  $P_{\max}(\alpha_{1s}^\perp, \beta_{1i}^\perp) = 0.391179$ . 此时对应的测量基分别为:  $\alpha_{1s} = 0.722166, \alpha_{2s} = 1.50353, \beta_{1i} = 1.11185, \beta_{2i} = 0.305655$ . 该结果与文献 [24] 利用纯态进行的量子非局域关联检验得到的结果

一致,证明了提出的关于 Hardy-type 佯谬检验量子非局域关联的有效性. 与原始的 Hardy 佯谬检验方案成功概率约 9% 相比<sup>[6]</sup>,利用本文提出的逻辑,可将量子非局域关联检验的成功概率提高到约 39.1%,因此本文提出的基于 Hardy-type 佯谬逻辑,可极大地提高进行量子非局域关联检验的成功概率. 值得注意的是,当  $r < 0.378525$  或  $r > 0.778883$  时,由于 (3)—(5) 式无法被同时满足,因此对这些范围内的量子纯态,无法用本文提出的逻辑进行量子非局域关联的检验.

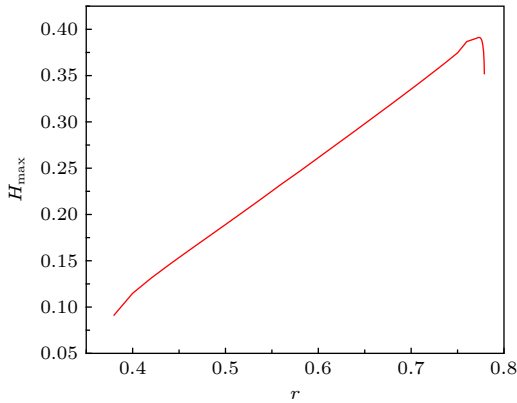


图 1  $H_{\max}$  随  $r$  的变化

Fig. 1. Relationship between  $H_{\max}$  and  $r$ .

进一步重点研究关于混合态的高概率量子非局域关联检验. 具体而言,以 Werner 态这种量子混合态为例,利用本文提出的 Hardy-type 佯谬检验逻辑,分析量子混合态的量子非局域关联检验情况.

对于量子混合纠缠态 Werner 态,其密度矩阵可写为<sup>[23]</sup>

$$\hat{\rho} = t|\psi\rangle\langle\psi| + \frac{1-t}{4}\mathbf{I}, \quad (18)$$

其可认为是如 (15) 式所表示的非最大纠缠纯态 $|\psi\rangle$ 混合了一定的白噪声 ( $0 \leq t < 1$ ) 所得到. 其中  $\mathbf{I}$  表示单位矩阵. 本文通过  $\text{Tr}(\rho^2)$  的值来判定该混合态的混合程度, 即当  $\text{Tr}(\rho^2) = 1$  对应纯态,  $\text{Tr}(\rho^2) < 1$  则是对应混合态.  $\text{Tr}(\rho^2)$  的值越高, Werner 态越接近于量子纯态.

对于如 (18) 所描述的量子混合态, 当用如 (16) 式所示的通用测量基进行联合概率测量, 可计算得到如下式所示的联合测量概率:

$$P(\alpha_{ms}, \beta_{ni}) = \text{M}\langle\phi|\hat{\rho}|\phi\rangle_{\text{M}} = t \frac{(r \cos \alpha_{ms} \cos \beta_{ni} + \sin \alpha_{ms} \sin \beta_{ni})^2}{1+r^2} + \frac{1-t}{4}. \quad (19)$$

同理,利用 (19) 式,可以计算得出在满足 (3)—(5) 式的条件下 (即  $H_1 = H_2 = H_3 = 1$ ),  $H = P(\alpha_{1s}, \beta_{1i}^{\perp})$  可以获得的最大概率值  $H_{\max}$ . 特别地,在  $r = 0.773066$  (此情况下, Werner 态中所含纯态部分 (即当  $t = 1$  时的情况) 可获得最大概率的量子非局域关联检验) 和  $r = 0.599997$  (此情况下,下文可证明所对应的 Werner 态,满足量子非局域关联的检验的条件范围是最大的) 两种情况下,如 (18) 式所示的量子混合态,基于本文提出的 Hardy-type 佯谬的量子非局域关联检验成功概率以及  $\text{Tr}(\rho^2)$  随参数  $t$  的变化关系如图 2 所示.

从图 2 中可以看出,利用本文提出的 Hardy-type 佯谬逻辑,不论  $r$  值处于哪种情况,随着  $t$  参数值的增大 (即混合态越来越接近纯态),检验量子非局域关联的成功概率都将越增大. 从图 2(a) 中

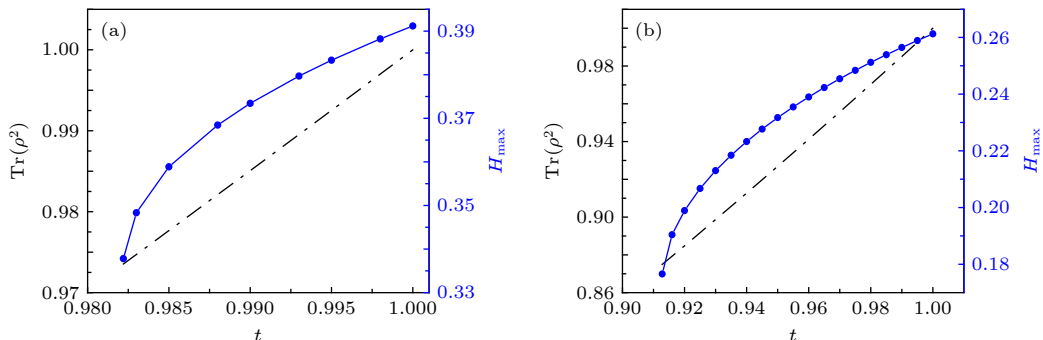


图 2  $\text{Tr}(\rho^2)$  以及  $H_{\max}$  随  $t$  参数的变化关系 (a)  $r = 0.773066$  的情况; (b)  $r = 0.599997$  的情况; 其中蓝色实线表示  $H_{\max}$  随  $t$  的变化关系, 对应于右边纵坐标; 黑色点化线表示  $\text{Tr}(\rho^2)$  随  $t$  的变化关系, 对应于左边纵坐标

Fig. 2. Relationship between  $\text{Tr}(\rho^2)$  and  $H_{\max}$  with  $t$ . The blue solid line means  $H_{\max}$  vs.  $t$ , using the right longitudinal coordinates. The black dot dash line means  $\text{Tr}(\rho^2)$  vs.  $t$  using the left longitudinal coordinates. Fig.2 (a) is the situation of  $r = 0.773066$  and Fig.2 (b) is the situation of  $r = 0.599997$ .

可以看出: 当  $r = 0.773066$  时, 用 (18) 式所示的混合纠缠态进行量子非局域关联检验, 仅当满足  $t \geq 0.982327$  (此时  $\text{Tr}(\rho^2) \geq 0.973725$ ) 时, 该混合态才能利用本文提出的检验逻辑进行量子非局域关联检验, 但成功检验的概率较大, 为  $H_{\max} = 0.33782$ , 且随着  $t$  的增大而非线性增大. 特别地, 当  $t = 1$  (即纯态) 时,  $H_{\max} = 0.391179$ , 该结果与文献 [24] 利用纯态检验得到的结果一致. 从图 2(b) 中可以看出: 当  $r = 0.599997$  时, 用 (18) 式所示的混合纠缠态进行量子非局域关联检验, 当满足  $t \geq 0.912649$  ( $\text{Tr}(\rho^2) \geq 0.874696$ ) 时, 该混合态就能利用本文提出的检验逻辑进行量子非局域关联检验, 但成功检验的概率为  $H_{\max} = 0.172799$ , 且随着  $t$  的增大而非线性增大. 特别地, 当  $t = 1$  (即纯态) 时,  $H_{\max} = 0.261343$ . 与图 2(a) 所示的情况相比, 尽管图 2(b) 中所用的参数可用于成功检验量子非局域关联的范围更大, 但其缺点是成功检验的概率要稍低一些. 但不论如何, 利用本文提出的 Hardy-type 佯谬检验逻辑, 都能以较大的成功概率检验量子非局域关联.

值得注意的是, 利用本文提出的 Hardy-type 佯谬检验逻辑, 针对如 (18) 式所示的混合态, 尽管可以以较高的成功概率进行量子非局域关联的检验, 但是, 从上面的分析也可以看出, 只有满足一定条件 (即混合态的纯度必须要大于某一个值, 以及  $r$  的取值必须在某一范围) 的混合态才能 (即能找到一定的测量基可使得条件  $H_1 = H_2 = H_3 = 1$  能够被同时满足) 进行量子非局域关联的检验. 因此, 图 3 给出了利用本文提出的 Hardy-type 佯谬检验逻辑, 可对如 (18) 式所示的混合态成功进行量子非局域关联检验的范围.

从图 3 中可以看出, 对 (18) 式所示的混合态而言, 仅当在满足条件:  $0.378525 \leq r \leq 0.778883$  时, 该混合态才能利用本文提出的 Hardy-type 佯谬检验逻辑成功地进行量子非局域关联检验. 而且, 对于某一固定的  $r$  值, (18) 式所示混合态的纯度也必须进一步满足一定条件 (即存在  $t$  参数的最小值  $t_{\min}$ ), 才能成功地进行量子非局域关联检验. 例如, 当  $r = 0.599997$  时, (18) 式所示的混合态具有最大的条件范围进行量子非局域关联的检验. 即只要混合态的纯度满足条件  $t \geq 0.912649$  (此时对应的  $\text{Tr}(\rho^2) \geq 0.874696$ ), 就能成功地进行量子非局域关联检验.

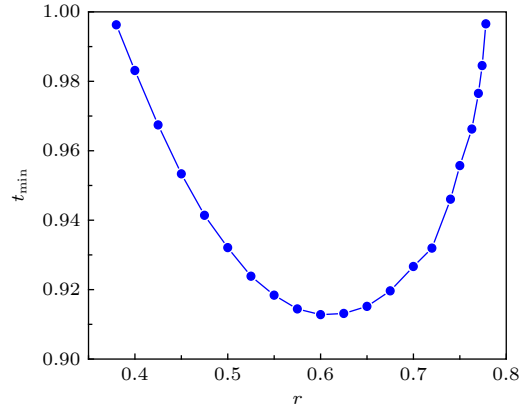


图 3  $t_{\min}$  随  $r$  的变化

Fig. 3. Relationship between  $t_{\min}$  and  $r$ .

## 4 结 论

提出了一种适用于任意两比特纠缠混合态的 Hardy-Type 佯谬检验逻辑, 该逻辑可以较高的概率成功地检验量子非局域关联. 首先, 利用偏振联合概率测量的方法, 证明了该检验逻辑的适用性. 在此基础上, 以两比特偏振纠缠纯态为例, 证明了该检验逻辑也能适用于量子纯态的情形. 结果表明, 对纠缠纯态而言, 该检验逻辑可获得的成功检验概率随着  $r$  的增加将出现先增大后减小的情形, 最大成功检验概率可从传统的约 0.09 提高到约  $P_{\max} = 0.391179$ . 其次, 本文以 Werner 态这种混合态为例, 从理论上分析了当 Werner 态中的参数  $r$  和  $t$  改变时, 该混合态进行量子非局域关联检验的情形. 研究表明, 对于固定  $r$  值的混合态, 纯度越高 (即  $\text{Tr}(\rho^2)$  越接近 1), 则其成功检验量子非局域关联的概率越大. 最后, 本文也研究了针对 Werner 混合态的成功检验量子非局域关联的  $t$  参数范围. 结果表明, 当  $r = 0.599997$  时, 可用于量子非局域关联检验的混合态的范围最大, 即只需  $t > 0.912649$  即可. 由于本文提出的检验逻辑针对量子混合态, 可以较大的成功概率检验量子非局域关联, 因此该方法更加有利于实验的验证.

## 参考文献

- [1] Einstein A, Podolsky B, Rosen N 1935 *Phys. Rev.* **47** 777
- [2] Bell J S 1964 *Physics* **1** 195
- [3] Clauser J F, Horne M A, Shimony A, Holt R A 1969 *Phys. Rev. Lett.* **23** 880
- [4] Aspect A, Grangier P, Roger G 1981 *Phys. Rev. Lett.* **47** 460
- [5] Greberger D M, Horne M A, Shimony A, Zeilinger A 1990 *Am. J. Phys.* **58** 1131
- [6] Hardy L 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1665

- [7] Mermin N 1995 *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **755** 616
- [8] Boschi D, Branca S, de Martini F, Hardy L 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 2755
- [9] Torgerson J R, Branning D, Monken C H, Mandel L 1995 *Phys. Lett. A* **204** 323
- [10] Fedrizzi A, Almeida M P, Broome M A, White A G, Barbieri M 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 200402
- [11] White A G, James D F V, Eberhard P H, Kwiat P G 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 3103
- [12] Chen L, Romero J 2012 *Opt. Express* **20** 21687
- [13] Chen L X, Zhang W H, Wu Z W, Wang J K, Fickler R, Karimi E 2017 *Phys. Rev. A* **96** 022115
- [14] Vallone G, Gianani I, Inostroza E B, Saavedra C, Lima G, Cabello A, Mataloni P 2011 *Phys. Rev. A* **83** 042105
- [15] Cereceda J L 2004 *Phys. Lett. A* **327** 433
- [16] Jiang S H, Xu Z P, Su H Y, Pati A K, Chen J L 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 050403
- [17] Chen J L, Cabello A, Xu Z P, Su H Y, Wu C, Kwek L C 2013 *Phys. Rev. A* **88** 062116
- [18] Ghirardi G, Marinatto L 2006 *Phys. Rev. A* **73** 032102
- [19] Ghirardi G, Marinatto L 2006 *Phys. Rev. A* **74** 062107
- [20] Fan D H, Dai M C, Guo W J, Wei L F 2017 *Chin. Phys. B* **26** 040302
- [21] Fan H Y, Lou S Y, Pan X Y, Da C 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 190302 (in Chinese) [范洪义, 楼森岳, 潘孝胤, 笄诚 2014 物理学报 **63** 190302]
- [22] Shi M J, Du J F, Zhu D P, Ruan T N 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1912 (in Chinese) [石名俊, 杜江峰, 朱栋培, 阮图南 2000 物理学报 **49** 1912]
- [23] Werner R F 1989 *Phys. Rev. A* **40** 4277
- [24] Yang M, Meng H X, Zhou J, Xu Z P, Xiao Y, Sun K, Chen J L, Xu J S, Li C F, Guo G C 2019 *Phys. Rev. A* **99** 032103

## Testing quantum nonlocality with high probability using quantum mixed state based on hardy-type paradox<sup>\*</sup>

Liu Jin    Miao Bo    Jia Xin-Yan    Fan Dai-He<sup>†</sup>

(School of Physical Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

( Received 22 July 2019; revised manuscript received 19 August 2019 )

### Abstract

Quantum nonlocality is an important phenomenon predicted by quantum mechanics. It is also one of the most important characteristics that quantum theory is different from classical theory. Therefore, it is of great significance to test the quantum nonlocality with higher successful probability. In this paper, a testing logic based on Hardy-type paradox is proposed and its applicability is proved. Such a logic can be used to test the quantum nonlocality for both the quantum mixed state and the quantum pure state with a high successful probability. It is found that, for quantum pure states, the probability of successfully testing the quantum nonlocality first increases and then decreases with the increase of entanglement degree of quantum states. The maximum successful probability of the testing the quantum pure state is over 39%. Furthermore, taking the Werner-like state, a quantum mixed state for example, the high successful probability of testing the quantum nonlocality is investigated by using the proposed logic. It is found that with the increase of the purity of the quantum mixed state, the successful probability of testing the quantum nonlocal correlation will increase. Finally, the conditions and the range of testing quantum nonlocality with high successful probability for Werner states are given. It is found that for  $r = 0.599997$ , the Werner-like quantum mixed state has a maximum range (i.e.  $\text{Tr}(\rho^2) \geq 0.874696$ ) of successfully testing the quantum nonlocality.

**Keywords:** quantum nonlocality, Hardy-type paradox, quantum mixed state

**PACS:** 03.65.Ud, 42.50.Dv, 03.67.Mn

**DOI:** 10.7498/aps.68.20191125

<sup>\*</sup> Project is supported by the Key Laboratory Project of Computational Physics of National Defense Science and Technology of China (Grant No. 6142 A05180401).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: dhfan@swjtu.edu.cn