

多体系统中相干资源的一般化理论*

刘锋^{1)†} 高冬梅¹⁾ 蔡晓秋²⁾³⁾

1) (山东工商学院数学与信息科学学院, 烟台 264005)

2) (北京邮电大学网络技术研究院, 北京 100876)

3) (洛阳师范学院数学科学学院, 洛阳 471934)

(2019年6月21日收到; 2019年9月12日收到修改稿)

量子相干理论是一类重要的量子资源理论, 其自由操作是各种类型的非相干操作. 在单体相干资源理论中, 最大相干态是最重要的量子资源态, 它被定义为在非相干操作下可以转化为任何其他纯态的量子态. 但是, 这一情形在多体系统中发生了巨大改变: 不仅在有些相干度量下不存在唯一的最大相干态, 而且在有些非相干操作下几乎所有纯的相干多体态都不可比较 (非相干操作下, 量子态之间的转换几乎不可能). 为了解决这一问题, 把非相干操作的定义扩展为一种不能产生相干的量子操作, 即研究一般化的相干资源理论. 具体地说, 基于量子资源是否来源于多体相干或者真的多体相干研究两类可能的量子资源理论框架, 并且指出在这些理论框架下存在合理的偏序关系 (每个纯态都可在非相干操作下转换为相干度更弱的纯态). 另外, 还证明了真的多体相干资源理论下存在唯一的最大相干态.

关键词: 量子相干, 资源理论, 多体最大相干态**PACS:** 03.65.Ta, 03.65.Ud, 03.65.Yz**DOI:** 10.7498/aps.68.20190966

1 引言

量子相干没有与之对应的经典量, 是量子理论的显著特征. 与纠缠资源理论^[1,2]类似, 相干资源理论^[3,4]的目的在于提供一套定量刻画相干的框架, 并且最终达到在量子技术领域完全理解相干的性能和局限的目的. 到目前为止, 单体系统上的相干资源理论^[3,5-8]比多体系统上^[9,10]发展的要完善得多. 虽然多体系统上的相干资源已经在量子密码学^[11-16], 单向量子计算^[17-19], 非平衡库下腔场演化^[20]等量子信息处理领域得到了一定的应用, 但是对多体相干态复杂结构的深刻理解可以进一步激发人们设计出量子信息科学中的新方案, 以及研究固态物理的新工具.

作为一种资源理论, 量子相干理论的广泛应用当前已经成为量子信息领域的一个研究热点^[3,21-26]. 人们从量子纠缠^[2]、量子非局域性^[27]或者量子导引^[28,29]等不同角度研究相干的各种量子效应. 资源理论的主要任务是实现量子态集合的排序以及为资源态提供一种度量其属性的方法. 在这类任务中, 自由操作扮演着重要角色, 其中自由操作是一种映射并且它的产生可不消耗任何物理成本. 因此, 所有可经自由操作制备的态都是自由态, 而非自由态体现资源的状态. 自由操作在资源态之间建立了一种秩序: 当一个态 ρ 经由某种自由操作转变为态 σ , 则任意可由 σ 完成的量子信息任务也可以由 ρ 完成, 从而 ρ 包含的量子资源不少于 σ .

由于相干是带有多个叠加项的量子系统的特征, 可知在这种资源理论中自由操作的一种自然选

* 国家自然科学基金 (批准号: 61771294, 61602232) 和山东省自然科学基金 (批准号: ZR2015FQ006) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: liufeng23490@126.com

择是非相干操作 [5,30]. 实际上, 仅把非相干操作作用于各个叠加项只能生成非相干态, 而相干态克服非相干操作施加的束缚成为一种资源. 另外, 相干性作为一种资源, 但是自由操作却并不被认为是更廉价的. 这是因为往往自由操作 (比如 CNOT 操作) 比非自由操作更难实现. 在多体相干性的资源理论中, 其参考基可以任意选取, 有时甚至可以选择 Bell 基作为参考基. 但是, 这种选择通常缺乏实际的物理意义, 因为 Bell 态相对其他单体的直积态更难制备, 需要消耗更多的物理资源. 因此探索多体的完全非相干态或者两体非相干态就非常具有物理意义. 从自由操作的角度看, 完全非相干操作, 或者两体非相干操作, 类似于纠缠资源理论中的局域操作与经典通信 (LOCC) 比 CNOT 这种非相干操作更具有实际意义, 实验上实现起来也较为容易 [31]. Du 等 [32] 研究了纯的相干态在非相干操作下的各种转换, 从而指出非相干操作建立了一种偏序关系, 更重要的是证明了在选定的局域维数下最大相干态具有唯一性. 最近, Wu 等 [31] 从理论和实验的角度彻底解决了二维量子系统中态在自由操作下的转化问题. 最大相干态可以经由非相干操作转变为任何同维数的其他量子态, 但是同维数的任何其他量子态不能经由非相干操作转换为该态. 这个态也就顺理成章地成为相干度量的一个重要标准, 并且在诸如单向量子计算 [17,18] 等量子信息任务中成为单体量子系统中最有用的量子态. 但是, 这一情形在多体量子系统中不复存在, 因为多体量子系统中存在不等价的相干态, 使得量子态空间被分为几个随机的非相干类, 其中同一类中的态可经由非相干操作以非零的概率相互转化, 但是不同类间的态不能经由非相干操作转化. 这一现象表明在多体量子系统中不存在唯一的最大相干态. 这一结果导致的一种极端情形是: 在至少三体系统中, 几乎所有的纯态都是孤立的, 即每个纯态都不能从具有相同维数的另一个纯态经由非相干操作转换而来. 这一结果意味着几乎所有的纯态都不能利用非相干操作进行比较, 因此非相干操作下的多体相干资源理论是平凡的.

我们相信这一现象要求对相干资源理论进行更加深入的研究, 特别是审查用来建立偏序关系的非相干操作. 实际上, 虽然非相干操作转移有明确的操作性解释, 但是它不是可以把非相干态映射为非相干态的最一般种类的非相干映射. 换句话说,

非相干操作严格地包含于至少一个子系统上的操作是非相干操作的量子操作类型中. 因此, 这类更广泛的量子操作类型原则上可以建立更有意义的序列, 解释多体相干态系统中更清晰的结构. 这也正是本文的主要目的. 文献 [33,34] 把 LOCC 操作扩展为非纠缠操作. 借助文献 [33,34] 的思想, 为了寻找到多体系统中非平凡的相干资源理论是否存在, 我们在至少一个子系统上的操作是非相干操作的量子操作, 这一最大可能的非相干操作类下研究相干资源理论. 由仅在某些子系统上是相干态, 可知该量子态不是完全非相干态 (FiC). 进一步地, 将所有子系统都相干的态称为真正的多体相干态 (GMC). 从而, 在多体情形下, 存在两类不同形式的相干理论: 第一类中相干态是资源态, 自由操作是完全的非相干保护操作 (FiCP); 另一类中 GMC 态是资源态, 自由操作是至少一个子系统上的非相干保护操作 (OiCP). 研究结果表明两种形式的资源理论都是非平凡的, 即不存在不等价形式的相干和孤立的资源态. 我们还研究了在上述理论下是否同单体系统类似存在唯一的最大相干态. 在 FiCP 操作以及三量子比特系统上, 答案是否定的. 但是, 在 OiCP 操作的 GMC 资源理论上, 答案是肯定的. 最大的 GMC 态就是广义的 GHZ 态.

2 准备知识

记 M 是 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的子集且 \bar{M} 是 M 的补集, 对于 Hilbert 空间

$$H = H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_n = (\mathbb{C}^d)^{\otimes n}, \quad (1)$$

定义 H_M 与 $H_{\bar{M}}$ 分别是 M 与 \bar{M} 对应的 Hilbert 空间的张量积. 令第 i 个子空间 H_i 的维数是 d ,

$$\{|k_1^i\rangle, |k_2^i\rangle, \dots, |k_d^i\rangle\} \quad (2)$$

是该空间的一组基.

当 n 体纯态

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle, \quad (3)$$

且 $|\psi_i\rangle \in H_i$ 总是基 $|k^i\rangle$ 上的非相干态时, 称其为 FiC, 否则是相干态; 对于任意的 $M \subset \{1, 2, \dots, n\}$, 如果总存在 $|\psi_M\rangle \in H_M$ 和 $|\psi_{\bar{M}}\rangle \in H_{\bar{M}}$, 使得 $|\psi_M\rangle$ 在任意选定的 H_M 的一组基 $\{|k_1^M\rangle, |k_2^M\rangle, \dots, |k_{M,d}^M\rangle\}$ 上是非相干的, $|\psi_{\bar{M}}\rangle$ 在任意选定的 $H_{\bar{M}}$ 的一组基 $\{|k_1^{\bar{M}}\rangle, |k_2^{\bar{M}}\rangle, \dots, |k_{\bar{M},d}^{\bar{M}}\rangle\}$ 上是非相干的, 并且

$$|\psi\rangle = |\psi_M\rangle \otimes |\psi_{\bar{M}}\rangle, \quad (4)$$

则称其为 BiC, 否则是 GMC. 利用凸运算, 上述概念可以扩展到混合态: 所有完全相干态记为

$$\mathcal{FiC} = \text{conv}\{\psi : |\psi\rangle \text{ is FiC}\}, \quad (5)$$

所有两体非相干态记为

$$\mathcal{BiC} = \text{conv}\{\psi : |\psi\rangle \text{ is BiC}\}, \quad (6)$$

其中 $\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$.

量子理论中的变换 Λ 是完全正的保迹映射 (CPTP). 对于任意的 $\rho \in \mathcal{FiC}$, 当映射 Λ 满足 $\Lambda(\rho) \in \mathcal{FiC}$ 时, 称其为 FiCP; 对于任意的 $\rho \in \mathcal{BiC}$, 当映射 Λ 满足 $\Lambda(\rho) \in \mathcal{BiC}$ 时, 称其为 OiCP. 设 f 是一个将 H 上的算子映射为非负实数的函数, 如果对于任意的量子态 ρ 和 FiCP(OiCP) 映射 Λ , 恒有 $f[\Lambda(\rho)] \leq f(\rho)$, 则称 f 是 FiCP 度量 (OiCP 度量). 这一要求完全类似于纠缠度量: LOCC 映射下纠缠度量不增. 尽管非相干操作是 FiCP 映射和 OiCP 映射的严格子集, 一些已知的相干度量仍然是 FiCP 度量或者 OiCP 度量. 比如, 对于任意的 CPTP 映射 Λ , 当距离测度 $f(\rho||\sigma)$ 满足量子运算不增 $f(\Lambda(\rho)||\Lambda(\sigma)) \leq f(\rho||\sigma)$ 的性质时, 形如 $f_{\Phi}(\rho) = \inf_{\sigma \in \Phi} f_{\Phi}(\rho||\sigma)$ 的度量具有类似的单调性, 其中 $\Phi \in \{\mathcal{FiC}, \mathcal{BiC}\}$. 这包括相对熵相干^[5]

$$f(\rho||\sigma) = C_r(\rho) = \min_{\sigma \in \mathcal{I}} S(\rho||\sigma), \quad (7)$$

其中 $S(\rho||\sigma) = \text{Tr}[\rho \log_2 \rho] - \text{Tr}[\rho \log_2 \sigma]$ 是量子相对熵; 鲁棒相干^[35]

$$f(\rho||\sigma) = C_R(\rho) = \min_{\sigma} \min_{s \geq 0} \left\{ s \geq 0 : \frac{\rho + s\sigma}{1+s} \in \mathcal{I} \right\}. \quad (8)$$

这里的 \mathcal{I} 都是空间 H 中基 $\{|k_j\rangle\}$ 上的集合 \mathcal{FiC} 或者 \mathcal{BiC} .

在单体系统中, 广义的非相干映射 (如 FiCP, OiCP) 下不是所有的基于非相干操作的相干度量均单调. 这是因为广义的非相干映射下的态转移, 非相干操作下可能不会实现. 为了后续理解广义的非相干映射下资源诱导的偏序, 首先约定若存在自由操作 Λ 使得 $\Lambda(\psi) = \varphi$, 则称量子态 ψ 与 φ 之间存在偏序关系且 ψ 优于 φ ; 若同时存在另一个自由操作 Λ' 满足 $\Lambda'(\varphi) = \psi$, 则称两个态 ψ 和 φ 在相应的资源理论下是等价的. 然后研究在 FiCP 和 OiCP 下哪些纯态之间的转移可以实现. 因此, 尽管我们研究的是量子态的特征, 这实际上也是建立等价类的过程. 本文还将证明在 OiCP 和 GMC 的资源理

论下等价类的范围比现有的非相干资源理论下的更大.

3 一般化的资源理论

在相干资源理论中, 当自由操作是 FiCP 或 OiCP 映射时均有如下结论.

定理 1 对于任意的两个资源纯态 ψ 和 φ , 总存在完全正的迹不增的 FiCP(OiCP) 映射 Λ 使得 $\Lambda(\psi) = p\varphi$, 其中 $p \in (0, 1]$.

证明 对于纯态 ψ , 它的几何相干^[36] 表示为

$$C_g(\psi) = 1 - \max_{\varphi \in \mathcal{FiC}(\text{OiC})} |\langle\varphi|\psi\rangle|^2. \quad (9)$$

由定义可知, $C_R(\varphi) > 0$, $1 > C_g(\psi) > 0$. 从而总存在 $p \in (0, 1]$, 满足

$$p \leq \frac{C_g(\psi)}{C_R(\varphi)(1 - C_g(\psi))}. \quad (10)$$

选取完全正的迹不增的映射^[37] Λ 使得

$$\Lambda(*) = p\text{tr}(\psi*)\varphi + \text{tr}[(I - \psi)*]\tilde{\varphi}, \quad (11)$$

其中 $\tilde{\varphi}$ 满足 $C_R(\varphi) = f(\varphi||\tilde{\varphi})$. 从而 $\Lambda(\psi) = p\varphi$.

任取 $\sigma \in \mathcal{FiC}(\text{OiC})$, 则

$$\Lambda(\sigma) = p\text{tr}(\psi\sigma) \left(\varphi + \frac{1 - \text{tr}(\psi\sigma)}{p\text{tr}(\psi\sigma)} \tilde{\varphi} \right), \quad (12)$$

从而 $\Lambda(\sigma)/\text{tr}[\Lambda(\sigma)] \in \mathcal{FiC}(\text{OiC})$ 的充要条件是 $1 - \text{tr}(\psi\sigma) \geq p\text{tr}(\psi\sigma)C_R(\varphi)$. 再结合 (10) 式以及 $\text{tr}(\psi\sigma) \leq 1 - C_g(\psi)$ 可知定理 1 成立.

这个结论表明: 在 FiCP(OiCP) 的相干资源理论中, 不存在等价形式的相干态. 这与 IO 相干资源理论中态空间总可以分成有限个等价类完全不同. 作为定理 1 的推论, 不难得到以下推论.

推论 1 每个资源态都不是孤立的, 即对于空间 H 内的任一个资源纯态 ψ , 在 H 内总存在一个不等价的资源纯态 φ 和 CPTP 的 FiCP(OiCP) 映射 Λ 使得 $\Lambda(\psi) = \varphi$.

证明 由鲁棒度量是输入态的连续函数^[38] 可知, 存在资源纯态 $\tilde{\varphi}$, 使得当 $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$ 时, $C_R(\varphi) \rightarrow 0$. 从而, 对于任意的量子态 ψ , 恒有 $C_g(\psi) > C_R(\tilde{\varphi})(1 - C_g(\psi))$. 利用 ψ 的任意性, 总可以给出一个 $\tilde{\psi}$ 使得 $C_R(\tilde{\psi}) \neq C_R(\tilde{\varphi})$, 从而 $\tilde{\psi} \neq \tilde{\varphi}$; 由 (10) 式可知我们能够取得 $p = 1$. 从而 (11) 式中的映射可以表示为

$$\Lambda(*) = \text{tr}(\tilde{\psi}*)\tilde{\varphi} + \text{tr}[(I - \tilde{\psi})*]\tilde{\varphi}, \quad (13)$$

其中 $\tilde{\varphi}$ 满足 $C_R(\varphi) = f(\varphi||\tilde{\varphi})$. 它是一个 CPTP 映射 [37], 并且 $\Lambda(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}$.

该推论表明 (13) 式的自由操作类能够建立相干资源纯态之间的偏序关系, 即每个资源纯态都可以被映射为一个包含较少相干资源的纯态. 在 LOCC 纠缠资源理论中, 包括真的多体纠缠子集 (GME) 在内的几乎所有的量子态都是孤立的 [39,40]. 但是, Contreras-Tejada 等 [34] 指出即使在上述限制下推论 1 仍然成立, 即保护完全可分的自由操作以及保护两体可分的自由操作都可以把任一最大多体纠缠态映射为同类型的不相等的量子态.

4 最大资源态的存在性

既然定理 1 和推论 1 都表明 FiCP 和 OiCP 操作都能克服 IO 多体相干资源理论的局限性, 一个自然的问题是 FiCP 或 OiCP 相干资源理论是否足够强健使得系统有唯一的多体最大相干态. 如果答案是肯定的, 这个唯一的多体最大相干态就应该同单体系统中的最大相干态一样处于应用的核心地位. 为了解答这一问题, 我们首先回顾一下 d 维的单体系统 H 中最大资源态的描述性定义 [32,34]: 如果 H 上存在一个量子态 φ , 它可经由自由操作转化为 H 上任意的其他量子态 (并且不存在可以把 H 上的其他量子态转化为 φ 的自由操作), 则称 φ 是该类自由操作下资源理论的最大资源态. 我们先研究 FiCP 操作下相干资源理论中的情况, 研究结果表明该理论框架下不存在多体的最大相干态.

定理 2 在 FiCP 多体相干资源理论中, 不存在 $H = (\mathbb{C}^2)^{\otimes 3}$ 上的最大相干态.

证明 Contreras-Tejada 等 [34] 证明了量子资源的几何度量 [41] 是一种完全可分保护的度量方式, 而 W 态 $|W\rangle = (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)/\sqrt{3}$ 是 Hilbert 空间 H 中完全可分保护操作下唯一的最大资源态 [42]. 因此, 如果 FiCP 3-qubit 相干资源理论存在最大资源态, 它就只能是 W 态, 也就是 W 态可经由 FiCP 操作映射为该空间中任意的其他量子态.

考虑鲁棒相干度量 $C_R(*)$:

$$C_R(\rho) = \max\{0, \text{tr}(\rho W)\}, \quad (14)$$

其中 ρ 是任意的量子态, $\Delta(*) = \sum_{j=0}^{d-1} |k_j\rangle\langle k_j| * |k_j\rangle\langle k_j|$; W 是使得 $W \leq I$, $\Delta(W) = 0$ 成立的相干见证 [35,43].

考虑基 $\{|0\rangle, |1\rangle\}^{\otimes 3}$ 上的完全非资源态: $\sigma =$

$(|000\rangle\langle 000| + |111\rangle\langle 111|)/2$. 由文献 [44,34] 可知

$$\rho(a, b, c) = a\text{GHZ}_+ + b\text{GHZ}_- + \frac{c}{6} \sum_{i=001}^{110} |i\rangle\langle i| \quad (15)$$

是完全可分态的充要条件是 $3|a - b| \leq c$, 其中 $\text{GHZ}_{\pm} = (|000\rangle \pm |111\rangle)/\sqrt{2}$, 求和指标 i 从 001 遍历到 110, $a + b + c = 1$ 并且 $a, b, c \geq 0$. 显然, 完全非资源态 $\sigma = \rho(1/2, 1/2, 0)$ 是一个特殊的完全可分态; 所以利用相干见证 [34] $\mathcal{W} = 2/3I - 8/3\text{GHZ}_+ + 4/3\text{GHZ}_-$ 得到 $C_R(\text{GHZ}) = 2$. 完全类似地可以得到, 在 FiCP 3-qubit 相干资源理论中, $C_R(W) = 2$.

因此, 如果 W 是 FiCP 3-qubit 相干资源理论中的最大相干态, 由 $C_R(\text{GHZ}) = C_R(W) = 2$ 可知 GHZ 态也是 FiCP 3-qubit 相干资源理论中的最大相干态. 在此假设下, 该量子系统中就应该存在一个 FiCP Λ 将 W 态映射为 GHZ 态: $\Lambda(W) = \text{GHZ}$. 考虑完全非相干态

$$\eta = \frac{1}{3}W + \frac{2}{3}\tau, \quad (16)$$

其中 $\tau = \frac{1}{6}\sigma + \frac{1}{2}\overline{W} - \frac{1}{48} \sum_{i=001}^{110} |i\rangle(\langle i^1| + \langle i^2|)$, \overline{W} 表示 W 态的比特反转形式, i^1 与 i^2 分别表示指标 i 中的比特向左平移 1 位和 2 位. 从而, $\eta' = \Lambda(\eta) = \frac{1}{3}\text{GHZ} + \frac{2}{3}\Lambda(\tau)$, 并且 η' 也应该是 FiC 的. 这与 $\Lambda(\tau) = \rho(0, 1/4, 3/4)$ [34], 所以 η' 不是 FiC 态的事实矛盾! 因此 Λ 不是 FiCP, 定理得证.

该 no-go 定理表明在 $H = (\mathbb{C}^2)^{\otimes 3}$ 上不存在唯一的 FiCP 多体最大相干态, 这与 IO 下唯一的最大相干态为 [5,32,45] $|\varphi\rangle = \frac{1}{4} \sum_{i=000}^{111} |i\rangle$ 大不相同, 其中求和指标 i 从 000 遍历到 111. 但是, 在 OiCP 相干资源理论中, 定理 3 证明了在指定的 Hilbert 空间中存在唯一的多体最大相干态.

定理 3 在 $(\mathbb{C}^d)^{\otimes n}$ 空间上的 OiCP 相干资源理论中, 存在唯一的最大多体相干态:

$$|\text{GHZ}(n, d)\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^d |i\rangle^{\otimes n}, \quad (17)$$

即 $\forall \varphi \in (\mathbb{C}^d)^{\otimes n}$, 总存在一个 OiCP 映射 Λ , 使得 $\Lambda[|\text{GHZ}(n, d)\rangle] = \varphi$.

证明 选取完全正的 OiCP 映射 Λ 使得

$$\Lambda(*) = \text{tr}(\text{GHZ}(n, d)*)\varphi + \text{tr}[(I - \text{GHZ}(n, d)*)]\tilde{\varphi}, \quad (18)$$

其中 $\tilde{\varphi}$ 满足 $C_R(\varphi) = f(\varphi||\tilde{\varphi})$. 从而, $\Lambda[|\text{GHZ}(n, d)\rangle] = \varphi$.

由定理 1 和定理 2 可知, Λ 是 OiCP 映射的充要条件是 $C_R(\varphi) \leq C_g(\text{GHZ}(n, d))/[1 - C_g(\text{GHZ}(n, d))]$. 利用两体的 Schmidt 分解方法^[34,46] 可知, 广义 GHZ 态有最大的相干度量值为 $C_g(\text{GHZ}(n, d)) = (d - 1)/d$. 从而 Λ 是 OiCP 映射的充要条件是 $C_R(\varphi) \leq d - 1$.

记 $M|\overline{M}$ 两体分割的划分下, 量子态 φ 可以表示为 $\varphi_{M|\overline{M}} = \sum_i \sqrt{\lambda_i^{M|\overline{M}}} |i\rangle_M |i\rangle_{\overline{M}}$. 从而,

$$C_R(\varphi) \leq \min_M \left(\sum_i \sqrt{\lambda_i^{M|\overline{M}}} \right)^2 - 1 \leq d - 1. \quad (19)$$

因此, $\forall \varphi \in (\mathbb{C}^d)^{\otimes n}$, 总存在一个 OiCP 映射 Λ , 使得 $\Lambda[\text{GHZ}(n, d)] = \varphi$.

5 结 论

通过将自由操作放宽为一般的不产生相干的量子操作, 本文建立了两类一般化的相干资源理论框架: FiCP 相干与 OiCP 相干. 与已有的 (*)IO (如 IO, SIO, MIO, PIO 等) 相干资源理论不同, OiCP 相干资源是具有唯一最大多体相干态的量子资源理论, 而 FiCP 相干资源在 3-qubit 系统上不存在最大相干态. 本文中两类一般化的相干资源理论为研究多体系统资源间的关系和转化提供了新的研究工具: 1) 自由操作是最大的保持非资源态的操作, 如果将其操作更细化, 分几个不同的层次, 比如可分离的局域非相干操作加上经典通讯, 将是非常有意义的; 2) 以一般相干性资源理论为基础, 研究多体系统资源间的关系和转化关系与方法也是一种新颖的手段.

参考文献

[1] Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M, Horodecki K 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 865
 [2] Chitambar E, Gour G 2019 *Rev. Mod. Phys.* **91** 025001
 [3] Streltsov A, Adesso G, Plenio M B 2017 *Rev. Mod. Phys.* **89** 041003
 [4] Hu M L, Hu X, Wang J, Peng Y, Zhang Y R, Fan H 2018 *Phys. Rep.* **762-764** 1
 [5] Baumgratz T, Cramer M, Plenio M B 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 140401
 [6] Winter A, Yang D 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 120404
 [7] Zhao M J, Ma T, Quan Q, Fan H, Pereira R 2019 *Phys. Rev. A* **100** 012315
 [8] Zhou Y, Zhao Q, Yuan X, Ma X 2017 *New J. Phys.* **19** 123033

[9] Yao Y, Xiao X, Ge L, Sun C P 2015 *Phys. Rev. A* **92** 022112
 [10] Streltsov A, Rana S, Bera M N, Lewenstein M 2017 *Phys. Rev. X* **7** 011024
 [11] Kumar A 2017 *Phys. Lett. A* **381** 991
 [12] Gao F, Qin S J, Huang W, Wen Q Y 2019 *Sci. China-Phys. Mech. Astron.* **62** 070301
 [13] Yang Y G, Zhang X 2008 *Sci. Sin.-Phys. Mech. Astron.* **38** 523 (in Chinese) [杨宇光, 张兴 2008 中国科学: 物理学 力学 天文学 **38** 523]
 [14] Wei C Y, Cai X Q, Liu B, Wang T Y, Gao F 2018 *IEEE Trans. Comput.* **67** 2
 [15] Ma J, Zhou Y, Yuan X, Ma X 2019 *Phys. Rev. A* **99** 062325
 [16] Ma J, Hakande A, Yuan X, Ma X 2019 *Phys. Rev. A* **99** 022328
 [17] Walther P, Resch K J, Rudolph T, Schenck E, Weinfurter H, Vedral V, Aspelmeyer M, Zeilinger A 2005 *Nature* **434** 169
 [18] Raussendorf R, Briegel H J 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 5188
 [19] Pan M, Qiu D 2019 *Phys. Rev. A* **100** 012349
 [20] Li H, Zou J, Shao B, Chen Y, Hua Z 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 040201 (in Chinese) [李海, 邹健, 邵彬, 陈雨, 华臻 2019 物理学报 **68** 040201]
 [21] Gao D M, Xin Y, Ye Z, Qiao X Y 2019 *Int. J. Quantum Inf.* **17** 1950004
 [22] Liu F, Li F 2016 *Quantum Inf. Process* **15** 4203
 [23] Liu F, Li F, Chen J, Xing W 2016 *Quantum Inf. Process* **15** 3459
 [24] Lostaglio M, Müller M P 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 020403
 [25] Luo S, Sun Y 2019 *Phys. Lett. A* **383** 2869
 [26] Zhao Q, Liu Y, Yuan X, Chitambar E, Ma X 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 070403
 [27] Brunner N, Cavalcanti D, Pironio S, Scarani V, Wehner S 2014 *Rev. Mod. Phys.* **86** 419
 [28] Gallego R, Aolita L 2015 *Phys. Rev. X* **5** 041008
 [29] Xiao S, Guo Z H, Cao H X 2019 *Sci. Sin.-Phys. Mech. Astron.* **49** 010301 (in Chinese) [肖书, 郭志华, 曹怀信 2019 中国科学: 物理学 力学 天文学 **49** 010301]
 [30] Lami L, Regula B, Adesso G 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 150402
 [31] Wu K D, Theurer T, Xiang G Y, Li C F, Guo G C, Plenio M B, Streltsov A 2019 arXiv: 1903.01479 v1 [quant-ph]
 [32] Du S, Bai Z, Guo Y 2017 *Phys. Rev. A* **95** 029901
 [33] Brandão F G S L, Plenio M B 2008 *Nat. Phys.* **4** 873
 [34] Contreras-Tejada P, Palazuelos C, de Vicente J I 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 120503
 [35] Napoli C, Bromley T R, Cianciaruso M, Piani M, Johnston N, Adesso G 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 150502
 [36] Streltsov A, Singh U, Dhar H S, Bera M N, Adesso G 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 020403
 [37] Chitambar E, de Vicente J I, Girard M W, Gour G 2017 arXiv: 1711.03835 [quant-ph]
 [38] Vidal G, Tarrach R 1999 *Phys. Rev. A* **59** 141
 [39] Sauerwein D, Wallach N R, Gour G, Kraus B 2018 *Phys. Rev. X* **8** 031020
 [40] Hebenstreit M, Spee C, Kraus B 2016 *Phys. Rev. A* **92** 012339
 [41] Wei T C, Goldbart P M 2003 *Phys. Rev. A* **68** 042307
 [42] Chen L, Xu A, Zhu H 2010 *Phys. Rev. A* **82** 032301
 [43] Eisert J, Brandao F G, Audenaert K M 2007 *New J. Phys.* **9** 46
 [44] Dür W, Cirac J I, Tarrach R 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 3562
 [45] Zhu H, Ma Z, Cao Z, Fei S M, Vedral V 2017 *Phys. Rev. A* **96** 032316
 [46] Biswas A, Prabhu R, de Sen A, Sen U 2014 *Phys. Rev. A* **90** 032301

General resource theory of quantum coherence in multipartite system*

Liu Feng^{1)†} Gao Dong-Mei¹⁾ Cai Xiao-Qiu²⁾³⁾

1) (*School of Mathematic and Information Science, Shandong Technology and Business University, Yantai 264005, China*)

2) (*Institute of Network Technology, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China*)

3) (*School of Mathematic Science, Luoyang Normal University, Luoyang 471934, China*)

(Received 21 June 2019; revised manuscript received 12 September 2019)

Abstract

The theory of quantum coherence is an important kind of quantum resource theory, and its free operations are various kinds of incoherent operations. In the single-system coherence resource theory, the maximally coherent state is the most important quantum resource state, and it can turn into a quantum state of any other pure state. However, the situation is quite different from multipartite quantum systems: not only does no-go theorem forbidding the existence of a unique maximally coherent state exist there, but almost all pure multipartite coherent states are incomparable (i.e., some incoherent operation transformations among them are almost never possible). In order to cope with this problem, we consider general coherent resource theories in which we relax the traditional incoherent operations to operations that do not create coherence. Specifically, we consider two possible theories, depending on whether resources correspond to bipartite coherence or genuinely multipartite coherent states (each subsystem is coherent): one is the theory in which bipartite coherence states are considered as a resource and the free operations are bipartite incoherent preservation and the other is the theory that involves genuinely multipartite coherent states and fully incoherent operations. These ideas come from the research by Contreras-Tejada et al. (*Phys. Rev. Lett.* **122** 120503), where the alternative entanglement resource theories were considered through relaxing the class of local operations and classical communication (LOCC) to operations that do not create entanglement, and they considered two possible theories depending on whether resources correspond to the multipartite entangled or genuinely multipartite entangled (GME) states. Furthermore, we show that there exists meaningful partial order (i.e. each pure state is transformable to a more weakly coherent pure state) in these two theory frames. Finally, we prove that the genuine multipartite coherent resource theory has a unique maximally coherent state (i.e. it can be transformed into any other state by the allowed free operations). Our results cover a wide class of coherent resource theories due to the free operations we introduced, and the discussion is solidified by important examples, such as entanglement, superposition, asymmetry, et al. And, how to establish the relations between these two kinds of multipartite coherent states, quantum discords and entanglements is also an interesting problem.

Keywords: quantum coherence, resource theory, multipartite maximally coherent state

PACS: 03.65.Ta, 03.65.Ud, 03.65.Yz

DOI: 10.7498/aps.68.20190966

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61771294, 61602232) and the Natural Science Foundation of Shandong Province, China (Grant No. ZR2015FQ006).

† Corresponding author. E-mail: liufeng23490@126.com