

专题：拓扑物理前沿与应用

## 电路中的拓扑态\*

罗开发 余睿†

(武汉大学, 物理科学与技术学院, 武汉 430072)

(2019年9月14日收到; 2019年11月12日收到修改稿)

利用凝聚态物理中紧束缚哈密顿量与集中参数电子线路中基尔霍夫方程的对应关系, 可以在电子线路中设计出种类丰富的拓扑物态. 本文详细介绍用电路实现一维 SSH 模型、三维结线半金属模型和外尔半金属模型的设计方案. 在上述拓扑电路中可探测到端点态、表面鼓膜态、表面费米弧等体拓扑性质对应的界面态. 由于电子线路对应的紧束缚哈密顿量中的跃迁项具有丰富的调控自由度, 如强度、距离、维度等, 容易推广到非厄密系统以及四维或更高维度的系统, 使得人们能在电路中设计和验证传统凝聚态体系中难以实现或无法实现的新物态. 此外, 电子线路具备器件功能多样、制备工艺成熟可靠等优势, 为探索新奇物态提供了一个便利的实验平台.

关键词: 拓扑电路, 拓扑结线态, 外尔半金属

PACS: 03.65.Vf, 71.15.-m

DOI: 10.7498/aps.68.20191398

## 1 引言

利用拓扑的概念对物理系统中的物态进行分类<sup>[1-3]</sup>在近十多年来取得了巨大成就. 整数、分数量子霍尔效应、量子自旋霍尔效应、量子反常霍尔效应、狄拉克半金属、外尔半金属和拓扑结线半金属等拓扑态极大地促进了人们对电子材料物性的理解<sup>[4-15]</sup>. 由于拓扑态的出现主要取决于能带结构中的贝里曲率, 于是拓扑能带论被迅速推广到冷原子体系<sup>[16-21]</sup>、光子<sup>[22-28]</sup>、声子<sup>[29-34]</sup>和机械系统<sup>[35-46]</sup>等经典体系.

近期, 在经典线性电子线路中<sup>[47-60]</sup>研究人员设计出了多种拓扑态, 包括: 基于时间反演对称的 Hofstadter 模型<sup>[47,48]</sup>和 Kane-Mele 模型<sup>[61]</sup>的二维拓扑电路; 一维和二维 SSH 拓扑电路<sup>[49,59]</sup>; 存在外尔点的三维拓扑电路<sup>[51,52]</sup>; 借助负电阻引入等效磁场后具有手性边界态的二维陈拓扑电路<sup>[62,63]</sup>; 模拟

高阶拓扑角态<sup>[64,65]</sup>; 拓扑安德森绝缘态<sup>[66]</sup>和马约拉纳零能模<sup>[67]</sup>的电路. 这些电路的主要构成单元是理想电容和电感, 器件的连接方式和参数决定了系统的对称性和物理性质. 上述工作采用的分析方法大多是电路理论中常用的电势运动方程<sup>[47,48]</sup>或拉普拉斯矩阵方程<sup>[51]</sup>, 与我们研究电子结构拓扑态时熟悉的哈密顿量有一定距离. 为便于在哈密顿力学的框架下对电路系统的拓扑态进行设计和分析, 我们介绍描述集中参数电子线路的基本方程—基尔霍夫方程与凝聚态物理中紧束缚哈密顿量之间的对应关系<sup>[68]</sup>, 从而将电子线路的问题转化成研究单粒子系统紧束缚哈密顿量的问题. 本文主要介绍一维 SSH 电路系统、三维结线和外尔电路系统的设计方案<sup>[52]</sup>. 基于此, 我们可以将凝聚态材料中已有的拓扑态推广到电路系统, 也可以设计出传统体系中难以实现的一些新奇拓扑态, 比如非厄密拓扑态, 四维或更高维度的拓扑态等.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11874048) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [yurui@whu.edu.cn](mailto:yurui@whu.edu.cn)

## 2 从基尔霍夫电流方程到紧束缚哈密顿量

集中参数电路中电流和电压的变化规律由基尔霍夫电流和电压定律刻画. 前者源于载流子的电荷守恒定律, 后者源于能量守恒定律. 对电路网络中的节点进行编号  $\alpha = 1, 2, \dots, N$ , 任意两节点  $\alpha$  和  $\beta$  间导纳记为  $y_{\alpha\beta}$ . 节点  $\alpha$  上的电势记为  $v_\alpha$  (取地面为零势能参考点), 流入该节点的净电流记为  $I_\alpha$ . 对节点  $\alpha$ , 从与之相连的节点  $\alpha'$  流入的电流记为  $I_{\alpha\alpha'}$  ( $\alpha' \neq \alpha$ ). 欧姆定律给出  $I_{\alpha\alpha'} = (v_{\alpha'} - v_\alpha)y_{\alpha\alpha'}$ , 对所有支路求和得到  $\sum_{\alpha'} I_{\alpha\alpha'} = \sum_{\alpha'} (v_{\alpha'} - v_\alpha) \times y_{\alpha\alpha'} = I_\alpha$ . 重复此过程, 可得电路中所有节点上电压和流入电流之间的关系式  $\mathcal{L}\mathbf{V} = \mathbf{I}$ , 其中  $\mathbf{V} = (v_1, v_2, \dots, v_N)^T$  为节点电压矢量,  $\mathbf{I} = (I_1, I_2, \dots, I_N)^T$  为节点电流矢量. 矩阵  $\mathcal{L}$  包含了电路网络中的所有器件连接信息<sup>[69]</sup>.

考虑一种简单情况: 电路由一系列接地的 LC 谐振回路构成, LC 谐振回路之间由电容器连接 (见图 1). 后面我们会看到电路采取这种连接方式形成谐振频率色散的机制和晶体中电子形成能带的物理图像非常相似. 在交流信号下电容  $C$  和电感  $L$  的导纳分别为  $y_C = j\omega C, y_L = 1/(j\omega L)$ , 其中  $j = \sqrt{-1}$  为虚数单位,  $\omega$  为电路的谐振频率. 如果线路不外接任何源和漏 (实验上可以通过为电路输入脉冲信号而后撤去电源来实现), 则电流矢量  $\mathbf{I} = 0$ , 矩阵方程  $\mathcal{L}\mathbf{V} = 0$  化简移项后可写成

$$Y\mathbf{V} = \frac{1}{\omega^2 L}\mathbf{V},$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & -C_{12} & \cdots & -C_{1N} \\ -C_{21} & y_2 & \cdots & -C_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -C_{N1} & -C_{N2} & \cdots & y_N \end{bmatrix},$$

$$y_\alpha = \sum_{\alpha'=1(\neq\alpha)}^N C_{\alpha\alpha'} + C_\alpha. \quad (1)$$

上式与定态薛定谔方程  $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$  形式一致. 这里谐振频率  $1/\omega^2 L$  为本征值, 节点电压矢量  $\mathbf{V}$  为本征矢量,  $Y$  可看成哈密顿量矩阵.  $Y$  中的非对角元  $y_{\alpha\beta} = -C_{\alpha\beta}$  可理解为准粒子在节点  $\alpha$  和  $\beta$  之间的跃迁强度, 正比于电容值; 对角元  $y_\alpha$  为准粒子在轨道  $\alpha$  上的在位能. 由此,  $Y$  矩阵可类比为凝聚态物理中常见的紧束缚哈密顿量. 求解此本征值方程, 可得电路谐振频率构成的频谱. 回想电子能带的形成过程: 对于孤立原子, 其中的电子具有离散能级. 随着原子间距减小并逐渐形成晶体, 电子可以在相邻原子间跃迁, 孤立原子的离散能级展宽成固体中的电子能带. 在电路中, 孤立的 LC 谐振回路具有特定的谐振频率  $1/\sqrt{LC}$ , 可类比于原子上的电子能级, 当这些回路通过电容器  $C$  连接后, 电容值的大小决定 LC 谐振回路间的耦合强度. 当耦合足够强时, 所有 LC 回路的谐振频率会形成由谐振频率构成的能带. 因此, 通过调节 LC 谐振回路的连接方式及强度, 我们可以调控谐振频率色散, 使其发生频带的反带或简并, 实现拓扑绝缘态或者拓扑半金属态. 这正是我们在电子线路中模拟 SSH 模型、结线和外尔态的物理基础.

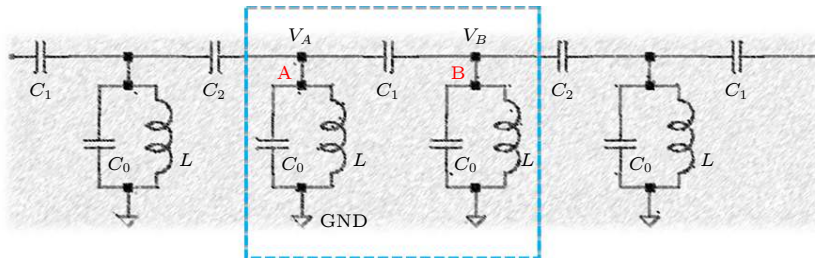


图 1 一维 SSH 电路. 原胞 (蓝色虚线框) 内有 A 和 B 两个不等价节点, 经并联的电感  $L$  和电容  $C_0$  接地. 原胞内节点由电容  $C_1$  相连, 原胞间节点由电容  $C_2$  相连

Fig. 1. The 1D LC chain, in which a unit cell containing two inequivalent nodes A and B labeled by a dashed blue box. Each node A or B is grounded through a parallel connected inductor  $L$  and capacitor  $C_0$ . All nodes are connected by  $C_1$  and  $C_2$  alternately.

### 3 一维 SSH 电路中的拓扑态

#### 3.1 一维 SSH 电路的模型哈密顿量

Su-Schrieffer-Heeger (SSH) 模型是最简单的一维拓扑模型, 在冷原子<sup>[70]</sup>、光子晶体<sup>[71]</sup>、声子晶体<sup>[72,73]</sup>和机械系统<sup>[36]</sup>中均有详细的理论和实验研究. 在电子线路里, 已有工作从系统阻抗频谱<sup>[51]</sup>的角度对一维 LC 链的拓扑端点态进行了考察. 这里我们采用哈密顿矩阵的形式对这个典型的拓扑体系进行重新刻画和分析, 展示这一方法的有效性和直观性.

图 1 为电路 SSH 链的示意图. 原胞内包含两个不等价节点 A 和 B, 通过 LC 回路接地 (电感  $L$ , 电容  $C_0$ ). 取原胞间距  $a$  为单位长度. 原胞内的 A-B 节点通过电容器  $C_1$  连接, 原胞间的 A-B 节点通过电容器  $C_2$  连接. 对于第  $n$  个原胞, 根据基尔霍夫定律可写出流入原胞 A, B 节点的净电流分别为:

$$\begin{aligned} I_A(n) &= j\omega(C_0[0 - v_A(n)] + C_1[v_B(n) - v_A(n)] \\ &+ C_2[v_B(n-1) - v_A(n)]) + [0 - v_A(n)]/(j\omega L), \\ I_B(n) &= j\omega(C_0[0 - v_B(n)] + C_1[v_A(n) - v_B(n)] \\ &+ C_2[v_A(n+1) - v_B(n)]) + [0 - v_B(n)]/(j\omega L), \end{aligned} \quad (2)$$

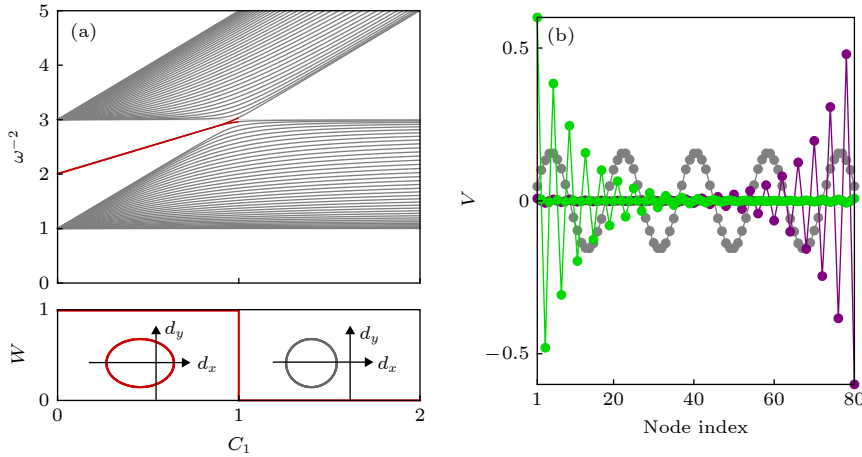


图 2 (a) 上: 电容  $C_1$  从 0 逐渐增加至超过  $C_2$ , 频谱中两个端点态 (红线) 在能  $C_1 = C_2$  处消失, 表明系统发生了拓扑相变. 下: 系统缠绕数从 1 到 0 的跃变与端点态的消失临界值一致.  $C_1/C_2 = 0.5$  时系统的等效极化矢量在  $d_x - d_y$  平面上随动量参数  $k$  从 0 连续变到  $2\pi$  时绕原点一周. 红圈对应缠绕数为 1;  $C_1/C_2 = 1.5$  时  $(d_x, d_y)$  绕原点 0 圈. 黑色圈对应缠绕数为 0. (b) 取  $C_1/C_2 = 0.8$ , 端点态 (绿色和紫色) 以及一个随机挑选的体态 (灰色) 对应的电势分布  $V$

Fig. 2. (a) Upper: increase the parameter of  $C_1$  from zero to exceed  $C_2$ , the end states (red) converge into the bulk states, indicating the topological transition. Bottom: the transition of winding number is consistent with the appearance and absence of end states. The effective polarization vector  $(d_x, d_y)$  winds the original a round when the momentum varies continuously from 0 to  $2\pi$  for  $C_1 = 0.5$  (left), while zero round for  $C_1 = 1.5$  (right). (b) The electric potential distributions of two end states (green and purple) and a randomly selected bulk state (grey).

线路无源和漏接入时  $I_A(n) = I_B(n) = 0$ , 两端同时除以  $j\omega$  得到

$$\begin{aligned} \mu v_A(n) - C_1 v_B(n) - C_2 v_B(n-1) &= \frac{1}{\omega^2 L} v_A(n), \\ \mu v_B(n) - C_1 v_A(n) - C_2 v_A(n+1) &= \frac{1}{\omega^2 L} v_B(n), \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\mu \equiv C_0 + C_1 + C_2$ . 联立所有原胞内节点上的方程可得到形如  $Y\mathbf{V} = (\omega^2 L)^{-1}\mathbf{V}$  的矩阵方程, 从  $Y$  中, 可以提取出紧束缚模型中的跃迁项和在位能项:

$$\begin{aligned} H_{AB}(R=0) &= -C_1, \quad H_{AB}(R=-1) = -C_2, \\ H_{AA}(R=0) &= H_{BB}(R=0) = \mu, \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $R$  表示跃迁矢量. 考虑到系统具有平移对称性, 通过傅里叶变换  $H_{mn}(k) = \sum_R e^{ikR} H_{mn}(R)$ , ( $m, n = A, B$ ) 可得动量空间中的布洛赫哈密顿矩阵,

$$\begin{aligned} H_{\text{SSH}}(k) &= \mu\sigma_0 + (h_+(k)\sigma_+ + h.c.), \\ h_+(k) &= -C_1 - C_2 e^{-ik}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\sigma_+ = (\sigma_1 + i\sigma_2)/2$ ,  $\sigma_0$  为单位阵,  $\sigma_{1,2,3}$  为泡利矩阵. 这正是凝聚态物理中为人熟知的 SSH 哈密顿量, 其色散关系为  $E_k = \mu \pm |h_+| = \mu \pm \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2 \cos k}$ .

### 3.2 系统的拓扑数

由于  $H_{SSH}$  中  $\mu\sigma_0$  项不改变系统的拓扑性质, 在下面的讨论中均将其忽略. 系统具有手征对称性, 其拓扑不变量由缠绕数来描述:

$$W = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ik}{2\pi} \partial_k \ln h_+(k) = \Theta(|C_2| - |C_1|), \quad (6)$$

其中  $\Theta(x)$  是 Heaviside 阶梯函数, 当  $x > 0$  时  $\Theta(x) = 1$ , 而  $x < 0$  时  $\Theta(x) = 0$ . 上述结果可以通过赝自旋  $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y)$  在赝磁场  $d(k) = (d_x(k), d_y(k))$  ( $d_x = (h_+ + h_-)/2$ ,  $d_y = i(h_+ - h_-)/2$ ) 中的极化来理解 (见图 2). 赝磁场  $d(k)$  随参数  $k$  的演化会导致赝自旋相应发生旋转, 绕原点  $d = 0$  的圈数对应缠绕数  $W$ . 我们还可以用 Zak 相位  $\phi_Z = \oint \mathcal{A}(k) dk$  来表征系统是否处于拓扑非平庸态, 其中  $\mathcal{A}(k) = \langle v_k | i\partial_k v_k \rangle$  是贝里联络,  $|v_k\rangle = (-h_+ / |E_k|, 1)^T / \sqrt{2}$  是一维 SSH 模型频谱中低频支对应的布洛赫电势分布函数. 由此可得系统的 Zak 相位为

$$\phi_Z = \oint \langle u_k | i\partial_k u_k \rangle dk = \pi\Theta(|C_2| - |C_1|) = \pi W, \quad (7)$$

与缠绕数的计算一致. 实验上, 缠绕数和 Zak 相位可以通过观测拓扑泵浦 [74] 和表面阻抗 [72] 等物理量来测量.

### 3.3 受拓扑保护的端点态

从上面的讨论已经知道,  $|C_1| < |C_2|$  时系统处于缠绕数为 1 的拓扑非平庸态, 存在受手征对称性保护的零能解. 对于含  $N$  原胞的 SSH 链,  $H = \sum_{n=1}^N (-C_1|n, B\rangle\langle n, A| + \text{h.c.}) + \sum_{n=1}^{N-1} (-C_2|n+1, A\rangle\langle n, B| + \text{h.c.})$ . 记其零能模  $|0\rangle = \sum_{n=1}^N (a_n|n, A\rangle + b_n|n, B\rangle)$  则方程  $H|0\rangle = 0$  给出如下系数间的关系式:

$$a_{n+1} = \left(-\frac{C_1}{C_2}\right)^n a_1, \quad b_{n+1} = \left(-\frac{C_2}{C_1}\right)^n b_1, \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (8)$$

和边界条件

$$C_1 b_1 = 0, \quad C_1 a_N = 0. \quad (9)$$

由  $C_1 \neq 0$  可推出  $b_1 = a_N = 0$ , 说明对有限长度的 SSH 链, (8) 式只有平庸解. 但系统趋于热力学极限  $N \rightarrow \infty$  时,  $\lim_{N \rightarrow \infty} b_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} a_N = 0$  可以给出  $a_1, b_N$  为非零有限值的两个非平庸解. 通过测量

A 或 B 格点上边界态从端点往体内的电势分布衰减指数, 可以与理论值  $-C_1/C_2$  进行对比.

## 4 三维电路中的拓扑结线和外尔态

### 4.1 拓扑结线态

在电子系统中, 结线态 [75] 可以视为其它拓扑态的母态. 通过改变系统参数, 如自旋轨道耦合强度和应力等, 结线态可以演化成外尔态、狄拉克半金属态或拓扑绝缘态等. 在电路中, 我们首先考虑实现拓扑结线态, 然后通过调控对称性, 实现外尔态.

对于无自旋系统, 一般有三种方案可以设计出拓扑结线态: 1) 时间反演加空间反演 [76,77]; 2) 镜面对称性 [78,79]; 3) 包含螺旋轴或滑移面的非简单空间对称群 [80-82]. 由于无洛伦兹力和科里奥利力的系统中天然存在时间反演对称性, 而且系统空间对称性越高相应地会对电路网络中的器件参数值的选取给出更严苛的要求, 因此我们采用上述第一种方案. 考虑无自旋的两能级系统,  $k$  参数空间中哈密顿量的一般形式为  $H(k) = \sum_{i=0}^3 d_i(k)\sigma_i$ . 时间反演算符为  $T = K$ , 即复共轭算符. 空间反演算符  $I$  可表示为  $\sigma_0$  或  $\sigma_3$ , 取决于两个基函数宇称相同或相反. 当系统同时具有时间反演和空间反演对称性时, 哈密顿量将受到如下约束:

$$TH(k)T^{-1} = H(-k), \quad IH(k)I^{-1} = H(-k). \quad (10)$$

时间反演要求  $d_{1,3}(k)$  为偶函数, 而  $d_2(k)$  为奇函数. 当  $I = \sigma_0$  时, 空间反演不产生约束, 而  $I = \sigma_3$  时, 空间反演对称性要求  $d_{1,2}(k)$  为奇函数,  $d_3(k)$  为偶函数. 综合上述约束方程得到  $d_1(k) = 0$ ,  $d_2(k)$  为奇函数,  $d_3(k)$  为偶函数. 结线态的出现要求  $d_1(k) = d_2(k) = d_3(k) = 0$ . 在三维  $k$  空间中求解两个约束方程, 可以得到无穷多个解, 刚好是我们寻找的结线态. 例如  $d_2(k) = \sum_{i=1}^3 a_i k_i$  和  $d_3(k) = \sum_{i,j=1}^3 b_0 + b_{ij} k_i k_j$ , 这两个函数同时为零的解是  $k$  空间中平面与二次曲面的交线, 此交线即为结线型能谱简并点. 下面我们按照这个思路在电路中设计结线态.

我们从二维六角蜂窝电路出发, 图 3(a) 所示,  $\mathbf{a}-\mathbf{b}$  平面内所有 A 和 B 节点通过电容  $C_{1,2,3}$  连接 (这里取三种电容值相等). 每个节点 A(B) 由并联的电感  $L_A(L_B)$  和电容  $C_{GA}(C_{GB})$  接地. 按照上一

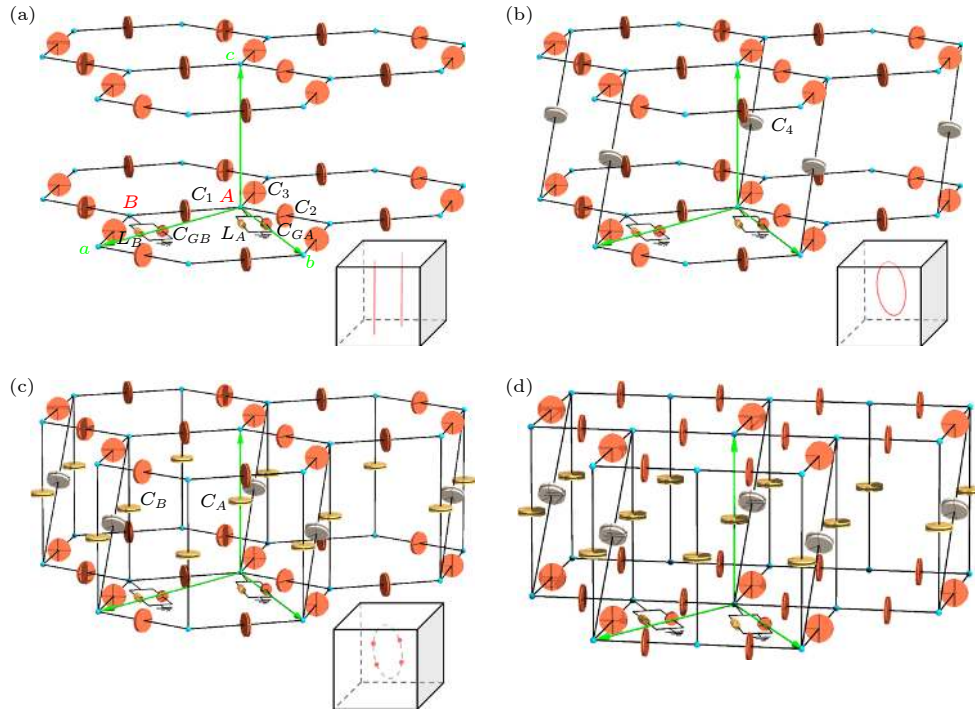


图3 三维LC电路示意图。(a)单层LC蜂窝电路沿 $c$ 方向上无连接的堆叠起来,每个原胞内的两个不等价节点A和B在层内由 $C_{1,2,3}$ 连接。每个节点A(B)都通过并联的 $L_A(L_B)$ 和 $C_{GA}(C_{GB})$ 回路接地。 $a$ 、 $b$ 和 $c$ 表示格矢。小图:单层LC电路频谱中包含两个简并点,沿着 $k_c$ 方向扩展将在布里渊区中形成两条直线状的结线(红线)。(b)电容 $C_4$ 连接最近邻层间的节点A和B,结线在给定合适的 $C_4$ 时将弯曲成闭合环形。(c)电容 $C_A(C_B)$ 连接最近邻层间的A-A(B-B)节点对, $C_A \neq C_B$ 且 $C_{GA} \neq C_{GB}$ 时空间反演对称破缺,环状结线可能退化成离散的外尔点。此外,LC网络可以变形成(d),简化实验装置的同时保证频谱不变

Fig. 3. Schematic setup of the 3D LC circuit lattice. (a) LC honeycomb layers stacked along  $c$ -direction without any interlayer connection. Two inequivalent nodes A and B within a unit cell, linked by capacitors  $C_{1,2,3}$ . Each node A(B) is grounded through the parallel connected inductor  $L_A(L_B)$  and capacitor  $C_{GA}(C_{GB})$ .  $a$ ,  $b$ , and  $c$  denote lattice vectors. Inset: spectra of a single layer LC lattice includes two band-crossing points, extended uniformly along  $k_c$ -direction and form two straight nodal lines (red) in the BZ. (b) Connecting nodes A and B between the nearest neighbor-layers with  $C_4$ . The straight lines could be curved to a closed ring given appropriate  $C_4$ . (c) Connect node-pairs A-A(B-B) between the nearest neighbor-layers with  $C_A(C_B)$ , to break space inversion symmetry by setting  $C_A \neq C_B$  and  $C_{GA} \neq C_{GB}$ , and the nodal ring may be degenerated to discrete Weyl points. The LC network can be deformed into (d), which is convenient to construct circuit elements in experiments while spectrum invariant.

节介绍的方法,这些二维电路系统的基尔霍夫电流方程可写成与石墨烯哈密顿量完全一致的形式。类似于石墨烯的特征能带,二维六角蜂窝电路的共振频谱在第一布里渊区内存在两个闭合点,沿 $c$ 方向堆叠,层间无耦合时二维布里渊区中的频谱交点将在三维布里渊区内形成图3(a)中小图所示的两条直线型结线。如果将最近邻层间的A和B节点用电容 $C_4$ 连接(图3(b)),调节 $C_4$ 的容值并不破坏系统的空间反演对称性,但直线状的结线可逐渐弯曲至闭合成为我们感兴趣的结环。如果用 $C_A(C_B)$ 连接层间的A-A(B-B)节点(图3(c)),选择参数 $C_A \neq C_B$ 和 $C_{GA} \neq C_{GB}$ ,此时空间反演对称性将被破缺,结线型交叉有可能退化成离散的外尔点。上述电路的等效紧束缚哈密顿矩阵为<sup>[52]</sup>:

$$d_0(k) = \mu + \frac{C_{GA} + C_{GB}}{2} + (C_A + C_B)(1 - \cos k_c), \quad (11)$$

$$d_1(k) = -C_1 - C_2 \cos(k_b - k_a) - C_3 \cos k_a - C_4 \cos(k_c - k_a), \quad (12)$$

$$d_2(k) = C_2 \sin(k_b - k_a) - C_3 \sin k_a + C_4 \sin(k_c - k_a), \quad (13)$$

$$d_3(k) = \frac{C_{GA} - C_{GB}}{2} + (C_A - C_B)(1 - \cos k_c), \quad (14)$$

其中 $\mu \equiv \sum_{i=1}^4 C_i$ 。取 $L_A = L_B = L_G$ 可求出两支色散曲线 $\omega_{1,2}^{-2}(k) = L_G [d_0(k) \pm \sqrt{\sum_{i=1}^3 d_i^2(k)}]$ ,通过调节系统里的电容参数值,便能得到上面讨论的结线态。

体边对应要求非平庸的结线对应着表面态的存在,沿(001)方向投影能带的结环内部会出现

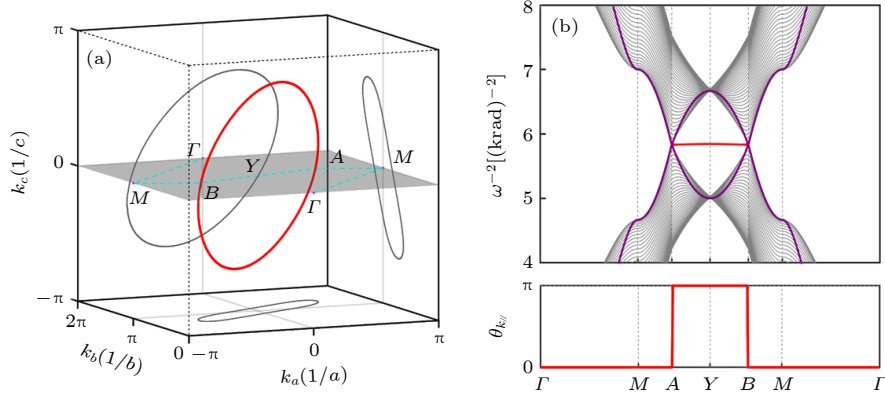


图 4 (a) 结线 (红色) 及其在 (001), (010) 和 (100) 面上的投影 (灰色). 此时参数取为  $C_1 = 1 \text{ mF}$ ,  $C_2 = 2 \text{ mF}$ ,  $C_3 = 1 \text{ mF}$ ,  $C_4 = 0.833 \text{ mF}$ ,  $C_{GA} = C_{GB} = 1 \text{ mF}$  和  $L_A = L_B = 1 \text{ mH}$ . (b) 沿  $\Gamma$ -M-A-Y-B-M- $\Gamma$  路径的频谱, 其中 A 和 B 是 (a) 中结线与  $k_c = 0$  平面的交点. 上: (001) 方向的体态 (灰色) 及表面态 (红线), 以及周期边界条件下的能带 (紫色). 下: 积分路径在结线内部 (外部) 的贝里相位  $\theta_{k_{\parallel}}$  等于拓扑非平庸的  $\pi$  (平庸的 0)

Fig. 4. (a) Nodal line (red) and its projections (grey) on the (001), (010), and (100) planes. The parameters are set as  $C_1 = 1 \text{ mF}$ ,  $C_2 = 2 \text{ mF}$ ,  $C_3 = 1 \text{ mF}$ ,  $C_4 = 0.833 \text{ mF}$ ,  $C_{GA} = C_{GB} = 1 \text{ mF}$ , and  $L_A = L_B = 1 \text{ mH}$ . (b) Bands along  $\Gamma$ -M-A-Y-B-M- $\Gamma$ , where A and B are two points with  $k_c = 0$  on the nodal line as labeled in (a). Upper: the bulk bands (grey) with the drumhead-like surface states nestled inside the projection of the nodal ring (red) on the (001) surface and the two bands (purple) in periodic boundary condition. Bottom: the Berry phase  $\theta_{k_{\parallel}}$  equals  $\pi$  (0) inside (outside) the nodal ring.

图 4(b) 中色散极小的鼓膜态. 将三维布洛赫哈密顿矩阵参数化为等效的一维系统  $H(k_a, k_b)$ , 沿  $k_c$  方向进行积分即得到  $k_a$ - $k_b$  面上的贝里相位

$\theta_{k_{\parallel}} = \int \langle v_k | i \partial_{k_c} v_k \rangle dk_{\perp}$ , 其中  $|v_k\rangle$  为频谱中低频支的布洛赫电势分布函数. 积分路径位于结线内部时得到拓扑非平庸的贝里相位  $\pi$ , 否则是平庸的相位 0.

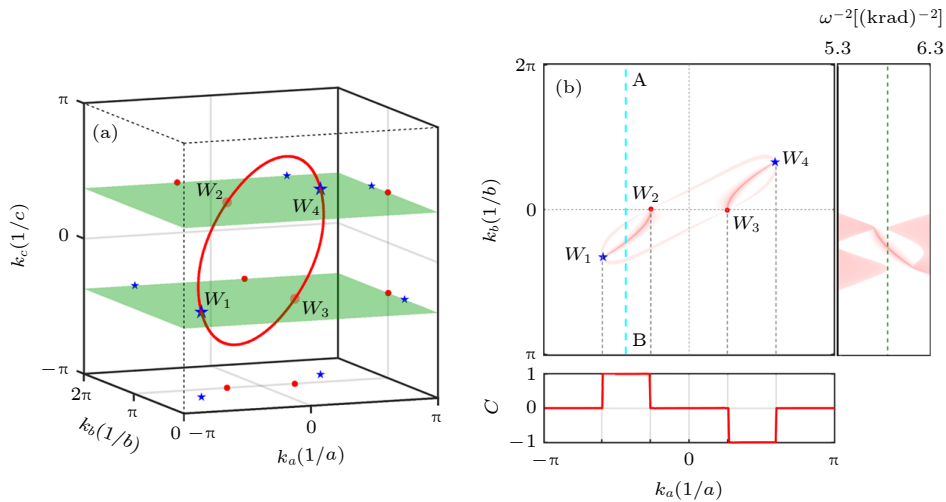


图 5 (a) 布里渊区中的四个外尔点及它们在 (001), (010) 和 (100) 方向的投影. 取  $C_A = 0.2 \text{ mF}$ ,  $C_B = 0.01 \text{ mF}$  和  $C_{GA} = 0.77 \text{ mF}$ , 其它参数均与图 4 中相同. 外尔点是由  $d_{1,2}(k) = 0$  决定的结线与  $d_3(k) = 0$  决定的两平面的交点, 它们的手性用蓝色五角星 ( $\chi = +1$ ) 和红色圆点 ( $\chi = -1$ ) 标记. (b) 左上: 在 (001) 表面上, 费米弧连接了手性相反外尔点的投影点. 右上: 开边界时路径 AB 上 (亮青色虚线) 的无能隙表面态, 绿色虚线标记外尔点所在频率. 左下: 垂直于  $k_a$  的各平面上的陈数. 沿  $k_a$  方向移动, 经过正 (负) 手性外尔点时平面上的陈数会增加 1 (减少 1)

Fig. 5. (a) Four Weyl points in the Brillouin zone and their projections on (001), (010) and (100) direction.  $C_A = 0.2 \text{ mF}$ ,  $C_B = 0.01 \text{ mF}$ , and  $C_{GA} = 0.77 \text{ mF}$  are used in the calculations. The other parameters are the same as Fig. 4. The Weyl points are the intersection points between the nodal ring determined by  $d_{1,2}(k) = 0$  and the two planes determined by  $d_3(k) = 0$ . The chirality are indicated as blue stars (red points) for  $\chi = +1$  ( $-1$ ). (b) upper left: on the (001) surface, Fermi arcs connect the projections of the bulk Weyl nodes carrying opposite chiralities onto the surface. Upper right: the gapless surface band in the A-B path. Dashed green line denotes the frequency where Weyl points lie. Bottom left: the Chern numbers for planes perpendicular to  $k_a$ . Moving along  $k_a$ , the Chern number increases (decreases) when the plane passing through the Weyl points with  $+1$  ( $-1$ ) chirality.

## 4.2 拓扑外尔态

取电容值  $C_A \neq C_B$ ,  $C_{GA} \neq C_{GB}$  可以破缺空间反演对称性从而使结线态相变到外尔态. 此时  $d_3(\mathbf{k})$  不再恒为零, 能隙闭合条件需要进一步要求  $\cos k_c = 1 + (C_{GA} - C_{GB})/2(C_A - C_B)$ . 选取电容参数使得等式右边小于 1,  $d_3(k) = 0$  在三维布里渊区中给出两个垂直于  $k_c$  的平面, 当这两个平面与  $d_{1,2}(k) = 0$  给出的结线相交时便得到图 5(a) 中的 4 个交点, 这正是我们寻找的外尔点. 由于时间反演对称性会把一个位于  $k$  的外尔点映射到手性相同但位于  $-k$  的外尔点, 而整个系统的外尔点手性之和恒为零. 于是这四个外尔点的手性必然有 2 个为正, 另 2 个为负, 即这类具有时间反演对称性的系统中外尔点的最小数目为 4. 如图 5(b) 所示将  $k_a$  作为参数, 可得一系列由  $k_b - k_c$  张成的二维面, 由这些二维面上陈数的变化可判断出外尔点的手性. 在远离外尔点处二维面上的能带具有能隙, 若存在非零陈数, 则开边界时能隙中会出现非平庸的手征表面态. 因此, 和电子系统中的外尔半金属类似, 电路系统中手性相反的两个外尔点在表面的投影也会被表面费米弧连接起来.

在上面的讨论中, 我们考虑的是理想电容和电感. 实际中的电子元件受到制造工艺等因素影响,

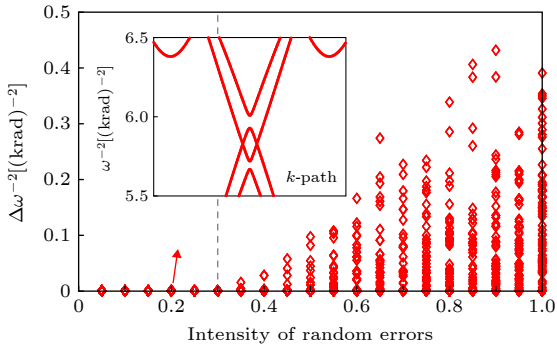


图 6  $3 \times 3 \times 3$  超胞的能隙  $\Delta\omega^{-2} \equiv \min\{\omega_{N/2+1}^2 - \omega_{N/2}^2\}$  随误差幅度的变化, 其中  $N$  是能带条数. 参数同图 5 理想情形. 每种误差幅度随机重复计算 100 次. 数值计算中误差幅度不超过 30% 时外尔点仍然存在. 小图为电容误差幅度为  $\pm 20\%$  时两个外尔点所在路径的色散

Fig. 6. The band gap,  $\Delta\omega^{-2} \equiv \min\{\omega_{N/2+1}^2 - \omega_{N/2}^2\}$  as a function of the tolerance values for a  $3 \times 3 \times 3$  super cell, where  $N$  is the number of total bands. The parameters are the same as Fig. 5 in ideal case. Each range of tolerance is calculated 100 times. Numerical results show that Weyl points survive for ranges less than the critical value 30%. Inset: the bands along the  $k$ -path crossing two Weyl points with 20% range of tolerance on the capacitors.

其真实参数在标注值的基础上都存在一定范围的误差, 需要进一步考虑参数误差对前面两类拓扑态的影响. 由于结线态需要空间反演对称性保护, 在大量器件都存在误差的前提下要保持此对称过于困难, 因而一般是不稳定的. 而外尔态只要求系统的平移对称性以保持动量空间的存在, 不需要其他对称性, 可以期待外尔点能抵抗一定程度的器件参数误差.

下面我们对上述电路进行器件误差分析. 考虑一个  $3 \times 3 \times 3$  的超胞. 其中电容参数在精确值基础上附加一定幅度的随机误差, 即哈密顿矩阵中的化学势和跃迁项被附加随机数. 误差幅度从 0 开始以精确参数值的 5% 为步长逐渐增加到 100%, 每个数据点随机选取均匀分布的误差重复 100 次并计算第  $N/2$  条和第  $N/2 + 1$  条能带的频率差. 如图 6 所示, 误差强度小于 30% 时外尔点依然存在.

## 5 小结与展望

本文介绍了一类基尔霍夫方程可映射为紧束缚哈密顿量的 LC 网络, 将经典电子线路与单粒子的量子问题联系起来. 我们以 SSH 模型为例, 展示了如何在电路中实现一维拓扑态. 通过堆叠二维蜂窝 LC 网络, 我们设计了一个在不同参数下分别具有拓扑结线态和外尔点的三维 LC 网络, 调控电容能够实现两者之间的拓扑相变, 在此电路网络中, 可以观测到结线态对应的表面鼓膜态和外尔态对应的表面费米弧,

从上述例子可见, 电路模型哈密顿量中跃迁项的设计自由度极大, 跃迁强度、方向、距离等均能通过连接电容器件来调控, 借以实现传统凝聚态体系中不易制备的新奇物态, 例如最近得到广泛关注的非厄密拓扑态. 非厄密物理的典型特性之一是参数空间中的非厄密能带闭合点 [83], 同时伴随着体费米弧 [84] 和反常边界态 [85] 等行为. 非厄密系统的物理性质强烈依赖于边界条件 [86-88], 而在通常的量子体系和人工超材料体系中难以在周期边界条件和开放边界条件之间自由切换. 但对于集中参数电子线路, 可以非常方便的调控部分线路的开或断来改变边界条件. 此外, 在系统中添加运算放大器或电阻等有源/耗器件后, 很容易为电路网络引入非厄密效应. 通过引入不对称跃迁项 [53,89], 基于本文讨论的蜂窝电路, 可以展示多种以非厄密简并点

为端点或边界的体费米弧和体鼓膜态, 该系统中体边对应的破缺和恢复也有望通过实验观测得到验证.

电子线路作为一个宏观稳定易操控的物理平台, 其潜力远不止于用来模拟其它量子或经典系统中已被实验观测的物态. 考虑到集中参数电路中元件的相互连接几乎不受空间维度和器件数量的限制, 按照类似的思路不难设计出对应于准晶<sup>[90]</sup>和非晶<sup>[91]</sup>哈密顿量的电路网络. 通过更复杂的连接, 还可以设计四维拓扑绝缘态<sup>[56]</sup>和更多其他系统中难以研究的高维拓扑态.

## 参考文献

- [1] Qi X L, Zhang S C 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1057
- [2] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045
- [3] Chiu C K, Teo J C, Schnyder A P, Ryu S 2016 *Rev. Mod. Phys.* **88** 035005
- [4] Xu G, Weng H, Wang Z, Dai X, Fang Z 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 186806
- [5] Wan X, Turner A M, Vishwanath A, et al. 2011 *Phys. Rev. B* **83** 205101
- [6] Burkov A 2018 *Ann. Rev. Cond. Mat. Phys.* **9** 359
- [7] Weng H M, Fang C, Fang Z, Bernevig B A, Dai X 2015 *Phys. Rev. X* **5** 011029
- [8] Lv B Q, Weng H M, Fu B B, Wang X P, et al. 2015 *Phys. Rev. X* **5** 031013
- [9] Xu S Y, Belopolski I, Alidoust N, et al. 2015 *Science* **349** 613
- [10] Weng H M, Yu R, Hu X, Dai X, Fang Z 2015 *Adv. Phys.* **64** 227
- [11] Armitage N P, Mele E J, Vishwanath A 2018 *Rev. Mod. Phys.* **90** 015001
- [12] Yu R, Fang Z, Dai X, Weng H M 2017 *Fron. Phys.* **12** 127202
- [13] Fang C, Weng H M, Dai X, Fang Z 2016 *Chinese Phys. B* **25** 117106
- [14] Weng H M, Dai X, Fang Z 2016 *J. Phys.: Cond. Mat.* **28** 303001
- [15] Yan Z, Wang Z 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 087402
- [16] Goldman N, Satija I, Nikolic P, et al. 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 255302
- [17] Sun K, Liu W V, Hemmerich A 2012 *Nature Phys.* **8** 67
- [18] Jotzu G, Messer M, Desbuquois R, et al. 2014 *Nature* **515** 237
- [19] Aidelsburger M, Lohse M, Schweizer C, M. Atala, J. Barreiro, S. Nascimbene, N. Cooper, I. Bloch, N. Goldman 2015 *Nature Phys.* **11** 162
- [20] Dubcek T, Kennedy C J, L. Lu, W. Ketterle, M. Soljacic, H. Buljan 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 225301
- [21] Xu Y, Zhang F, Zhang C 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 265304
- [22] Raghu S, Haldane F D M 2008 *Phys. Rev. A* **78** 033834
- [23] Haldane F D M, Raghu S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 013904
- [24] Rechtsman M C, Zeuner J M, Plotnik Y, Y. Lumer, D. Podolsky, F. Dreisow, S. Nolte, M. Segev, A. Szameit 2013 *Nature* **496** 196
- [25] Lu L, Fu L, Joannopoulos J D, Soljacic M 2013 *Nature Photon.* **7** 294
- [26] Lu L, Wang Z D, Ran Y L, Fu L, Joannopoulos J D, Soljacic M 2015 *Science* **349** 622
- [27] Yan Q, Liu R, Yan Z, B. Liu, H. Chen, Z. Wang, L. Lu 2018 *Nature Phys.* **14** 461
- [28] Ozawa T, Price H M, Amo A, N. Goldman, M. Hafezi, L. Lu, M. C. Rechtsman, D. Schuster, J. Simon, O. Zilberberg, I. Carusotto 2019 *Rev. Mod. Phys.* **91** 015006
- [29] Wang P, Lu L, Bertoldi K 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 104302
- [30] Po H C, Bahri Y, Vishwanath A 2016 *Phys. Rev. B* **93** 205158
- [31] Li F, Huang X, Lu J, J. Ma, Z. Liu 2018 *Nature Phys.* **14** 30
- [32] Xiao Y X, Ma G, Zhang Z Q, Chan C 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 166803
- [33] Zhang T, Song Z, Alexandradinata A, H. Weng, C. Fang, L. Lu, Z. Fang 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 016401
- [34] Wen X, Qiu C, Y. Qi, L. Ye, M. Ke, F. Zhang, Z. Liu 2019 *Nature Phys.* **15** 352
- [35] Kane C L, Lubensky T C 2013 *Nature Phys.* **10** 39
- [36] Gin-gé B, N. Upadhyaya, V. Vitelli 2014 *Proc. Nat. Acad. Sci.* **111** 13004
- [37] Paulose J, B. G.-g. Chen, V. Vitelli 2015 *Nature Phys.* **11** 153
- [38] Nash L M, Kleckner D, Read A, Vitelli V., Turner W T M 2015 *Proc. Nat. Acad. Sci.* **112** 14495
- [39] Kariyado T, Y. Hatsugai 2015 *Sci. Rep.* **5** 18107
- [40] Susstrunk R, Huber S D 2015 *Science* **349** 47
- [41] Wang Y T, Luan P G, S. Zhang 2015 *New J. Phys.* **17** 073031
- [42] Susstrunk R, Huber S D 2016 *Proc. Nat. Acad. Sci.* **113** E4767
- [43] Coulais C, Sounas D, Alu A 2017 *Nature* **542** 461
- [44] Takahashi Y, Kariyado T, Hatsugai Y 2017 *New J. Phys.* **19** 035003
- [45] Ronellenfitch H, Dunkel J, *arXiv*: 1907.02054(2019).
- [46] Ma G, Xiao M, Chan C T 2019 *Nature Rev. Phys.* **1** 281
- [47] Ningyuan J, Owens C, Sommer A, D. Schuster, J. Simon 2015 *Phys. Rev. X* **5** 021031
- [48] Albert V V, L. I. Glazman, L. Jiang 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 173902
- [49] Goren T, Plekhanov K, F. Appas, K. Le Hur 2018 *Phys. Rev. B* **97** 041106
- [50] Li Y, Sun Y, Zhu W, Z. Guo, J. Jiang, T. Kariyado, H. Chen, X. Hu, *arXiv*: 1801.04395 (2018).
- [51] Lee C H, Imhof S, Berger C, Bayer F, J. Brehm, L. W. Molenkamp, T. Kiessling, R. Thomale 2018 *Commun. Phys.* **1** 39
- [52] Luo K, Yu R, Weng H 2018 *Research* **2018** 1
- [53] Luo K, Feng J, Y. X. Zhao, R. Yu, *arXiv*: 1810.09231 (2018).
- [54] Kotwal T, Ronellenfitch H, Moseley F, Dunkel J, *arXiv*: 1903.10130 (2019).
- [55] Lee C H, T. Hofmann, T. Helbig, Y. Liu, X. Zhang, M. Greiter, R. Thomale, *arXiv*: 1904.10183 (2019).
- [56] Yu R, Zhao Y X, A. P. Schnyder, *arXiv*: 1906.00883 (2019).
- [57] Lu Y, Jia N, L. Su, C. Owens, G. Juzeliūnas, D. I. Schuster, J. Simon 2019 *Phys. Rev. B* **99** 020302
- [58] Olekhno N A, Kretov E I, Stepanenko A A, Filonov D S, Yaroshenko V V, Cappello B, Matekovits L, Gorlach M A, *arXiv*: 1907.01016 (2019).
- [59] Liu S, Gao W, Q. Zhang, S. Ma, L. Zhang, C. Liu, Y. J. Xiang, T. J. Cui, S. Zhang 2019 *Research* **2019** 1
- [60] Serra-Garcia M, R. Sūsstrunk, S. D. Huber 2019 *Phys. Rev. B* **99** 020304
- [61] Zhu W, Long Y, Chen H, Ren J 2019 *Phys. Rev. B* **99** 115410



- [62] Hofmann T, T. Helbig, C. H. Lee, M. Greiter, R. Thomale 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 247702
- [63] Haenel R, Branch T, Franz M 2019 *Phys. Rev. B* **99** 235110
- [64] Imhof S, Berger C, Bayer F, Brehm J, et al. 2018 *Nature Phys.* **14** 925
- [65] Ezawa M 2018 *Phys. Rev. B* **98** 201402
- [66] Zhang Z Q, Wu B L, Song J, Jiang H, arXiv: 1906.04064 (2019).
- [67] Ezawa M 2019 arXiv: 1907.06911 (2019).
- [68] Nakata Y, Okada T, Nakanishi T, M. Kitano 2012 *Phys. Status Solidi B* **249** 1
- [69] Tzeng W J, Wu F Y 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 8579
- [70] Atala M, Aidelsburger M, Barreiro J T, Abanin D, T. Kitagawa, E. Demler, I. Bloch 2013 *Nature Phys.* **9** 795
- [71] Wang Q, Xiao M, Liu H, Zhu S, C. T. Chan 2016 *Phys. Rev. B* **93** 041415
- [72] Xiao M, Zhang Z, Chan C 2014 *Phys. Rev. X* **4** 021017
- [73] Xiao M, Ma G, Z. Yang, P. Sheng, Z. Q. Zhang, C. T. Chan 2015 *Nature Phys.* **11** 240
- [74] Wang L, Troyer M, Dai X 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 026802
- [75] Bernevig A, Weng H M, Fang Z, Dai X 2018 *J. Phys. Soc. Jpn.* **87** 041001
- [76] Yu R, Weng H M, Fang Z, Dai X 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 036807
- [77] Kim Y, Wieder B J, Kane C L, Rappe A M 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 036806
- [78] Chiu C K, Schnyder A P 2014 *Phys. Rev. B* **90** 205136
- [79] Yu R, Wu Q, Fang Z, Weng H M 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 036401
- [80] Fang C, Chen Y, H.-Y. Kee, L. Fu 2015 *Phys. Rev. B* **92** 081201
- [81] Bzdusek T, Wu Q, Ruegg A, Sigrist M, Soluyanov A A 2016 *Nature* **538** 75
- [82] Liang Q F, Zhou J, Yu R, Wang Z, Weng H M 2016 *Phys. Rev. B* **93** 085427
- [83] Heiss W D 2012 *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** 444016
- [84] Zhou H, Peng C, Yoon Y, Hsu C W, Nelson K A, Fu L, Joannopoulos J D, Soljacic M, Zhen B 2018 *Science* **359** 1009
- [85] Lee T E 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 133903
- [86] Yao S, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 086803
- [87] Xiao L, Deng T, Wang K, Zhu G, Wang Z, Yi W, Xue P 2019 arXiv: 1907.12566
- [88] Hofmann T, Helbig T, Schindler F, Salgo N, Brzezinska M, M. Greiter, T. Kiessling, D. Wolf, A. Vollhardt, A. Kabasi, C. H. Lee, A. Bilusic, R. Thomale, T. Neupert 2019 arXiv: 1908.02759
- [89] Helbig T, Hofmann T, Imhof S, Abdelghany M, Kiessling T, Molenkamp L W, Lee C H, Szameit A, Greiter M, Thomale R 2019 arXiv: 1907.11562.
- [90] Chen R, Chen C Z, Gao J H, Zhou B, Xu D H 2019 arXiv: 1904.09932
- [91] Mitchell N P, Nash L M, Hexner D, Turner A M, Irvine W T M 2018 *Nature Phys.* **14** 380

SPECIAL TOPIC—The frontiers and applications of topological physics

Topological states in electric circuit<sup>\*</sup>

Luo Kai-Fa    Yu Rui<sup>†</sup>

(*School of Physics and Technology, Wuhan University, Wuhan 430072, China*)

( Received 14 September 2019; revised manuscript received 12 November 2019 )

**Abstract**

Based on the correspondence between tight-binding Hamiltonian in condensed matter physics and the Kirchhoff's current equations in lumped parameters circuits, profuse topological states can be mapped from the former to the latter. In this article, the electric-circuit realizations of 1D SSH model, 3D nodal-line and Weyl semimetals are devised and elaborated, in which the edge states, surface drum-head and Fermi-arc states are appearing on the surface of the circuit lattice. Of these circuits, the effective hopping terms in Hamiltonian have high degree of freedom. The hopping strength, distance and dimension are easy to tune, and therefore our design is convenient to be extended to non-Hermitian and four or higher dimensional cases, making the fancy states that hard to reach in conventional condensed matter now at our fingertips. Besides, the electric circuit has the advantage of plentiful functional elements and mature manufacture techniques, thus being a promising platform to explore exotic states of matter.

**Keywords:** topological electric circuit, nodal-line state, Weyl semimetal

**PACS:** 03.65.Vf, 71.15.-m

**DOI:** [10.7498/aps.68.20191398](https://doi.org/10.7498/aps.68.20191398)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11874048).

† Corresponding author. E-mail: [yurui@whu.edu.cn](mailto:yurui@whu.edu.cn)