

一种随机共振增强正弦信号的二次多项式接收方法*

刘广凯^{1)†} 全厚德¹⁾ 康艳梅²⁾ 孙慧贤¹⁾ 崔佩璋¹⁾ 韩月明³⁾

1) (陆军工程大学石家庄校区电子与光学工程系, 石家庄 050003)

2) (西安交通大学数学与统计学院, 西安 710049)

3) (中国人民解放军 66389 部队, 石家庄 050000)

(2019年6月19日收到; 2019年8月5日收到修改稿)

针对雷达、通信系统的正弦中频信号在低信噪比中难以接收的问题, 提出一种经随机共振增强正弦信号的接收方法. 通过分析正弦信号的随机共振机理, 引入判决时刻, 将非自治的福克-普朗克方程 (Fokker-Planck Equation, FPE) 转化为自治方程求解, 得到 FPE 的含时间参量的周期定态解; 在得到随机共振输出粒子的概率密度基础上, 通过分析能量接收、匹配滤波接收特点, 提出基于二次多项式的接收结构, 通过使偏移系数最大化, 确定二次多项式系数, 初步确定了检验统计量; 为进一步减小误码率, 结合“ N 次采样取平均”思想, 根据中心极限定理, 将问题转换为高斯分布下的假设检验问题, 最终提出了随机共振增强正弦信号的二次多项式接收方法和处理流程. 仿真验证了理论的正确性, 并得到: 在最佳匹配随机共振参数的限制下, 当 $N = 500$ 时, 二次多项式接收结构在信噪比大于 -17 dB 时误码率低于 2.2×10^{-2} .

关键词: 随机共振, 正弦信号接收, 二次多项式接收, 福克-普朗克方程, 偏移系数

PACS: 05.40.-a, 02.50.-r

DOI: 10.7498/aps.68.20190952

1 引言

传统雷达、通信的中频接收系统一般在信噪比 (signal to noise ratio, SNR) 大于 0 dB 时才能有效检测和接收, 如何使其中频接收系统在强干扰或极低 SNR 的电磁环境中仍能正常工作, 是军事应急通信研究的重点内容之一. 对偶序列跳频 (dual-sequence-frequency-hopping, DSFH) 通信模式作为新型军事应急通信手段, 通过传输码元 0 和 1 分别选择两组伪随机序列控制的跳频载波信道, 选中的作为通信信道, 而未选中的作为对偶信道, 接收端通过检测信道占用情况判断传输码元^[1,2]. 与传统通信模式将信息调制在基带部分有

很大不同的是, DSFH 以两条射频序列出现与否代表码元 0 和 1, 其信息调制在射频部分. 这种信息调制方式决定了只要某一支路的中频正弦信号存在, 接收码元就判决为此支路约定代表的码元^[2]. 且一般采用较低数据速率, 作为新的抗干扰通信模式, 多用于高速率军事通信受到强干扰无法实施时的应急通信. 同时, 一般采用超外差接收方式, 其典型的中频接收信号为正弦信号, 是随机共振 (stochastic resonance, SR) 系统的典型输入信号形式之一.

SR 作为一种非线性物理现象, 当信号、噪声与 SR 系统三者匹配时, 噪声通过非线性系统对信号检测起到积极的增强作用, 打破了以往认为噪声总是有害的观点. Benzi 等^[3] 在对地球冰川期变化

* 河北省自然科学基金 (批准号: F2017506006) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: dreamer_gk@163.com

的研究中首次提出 SR 的概念,而后该现象在物理、生物、电子等领域得到印证^[4-8],大量研究人员将其用于信号强度低于判决门限时的信号检测接收问题^[9].对于经 SR 处理后的信号检测接收问题,关键在于设计合理高效的接收结构,即检验统计量.不同信号环境对应不同的最优接收结构,对此问题,大量学者展开研究. Galdi 等^[10]在 Gaussian 白噪声环境下,应用最大似然检测原理,分析了基于 SR 的最优接收问题,给出了平均值、过零检测和非相干检测三种检验统计量,初步解决了 SR 与信号检测结合的问题. Zozor 和 Amblard^[11]针对非高斯噪声条件,讨论了 SR 系统作为预处理单元如何检测正弦信号问题,并在小信号假设下应用泰勒展开法,以 SNR 为指标得到了局部最优接收结构^[12]. Chen 等^[13,14]详细讨论了基于 SR 理论的信号检测问题,推导了不同准则下的检测概率和虚警概率,得到了广义 SR 接收结构. Wang 等^[15]针对 SR 理论改进了传统能量检测结构,以 SNR 为指标,应用朗之万方程 (Langevin equation, LE) 从粒子轨道角度进行了数值仿真. Zhang 等^[16]在 α 稳定噪声情况下应用 SNR 指标,通过 SNR 取极值的必要条件,分析了单门限检测接收 SR 增强后的信号及最优检测门限问题. Zhang 和 Song^[17]研究了色噪声对逻辑 SR 信号的影响,得出在色噪声环境下添加周期信号可以提高逻辑 SR 的检测效果的结论.在得到合理高效的接收结构后,关键在于得到有无正弦信号这两种假设下检验统计量的输出概率密度,即求解表征 SR 系统输出概率密度的福克-普朗克方程 (Fokker-Planck equation, FPE) 方程;但由于 FPE 中非自治项的加入,使得输出无定态解^[18,19],文献^[20]针对小信号特点从线性化角度分析了 FPE 的解问题,文献^[21]应用 Meshless 方法,得到了 FPE 的数值解,但目前所得的解形式很少应用于信号检测问题.

针对正弦信号经 SR 系统增强后的检测接收问题,通过分析正弦信号的 SR 机理,假设电磁粒子 SR 行为瞬时完成,引入判决时刻,将非自治的 FPE 转化为自治方程求解,得到 FPE 的含时间参量的周期定态解;在得到 SR 输出粒子的概率密度基础上,通过分析能量接收、匹配滤波接收特点,提出基于二次多项式的接收方法,为进一步减小误码率,结合“ N 次采样取平均”思想,根据中心极限定理,将问题转换为典型的高斯分布下的假设检验

问题,并给出了接收方法步骤和理论值;最后进行了仿真验证.

2 随机共振的信号增强机理分析

2.1 正弦信号的随机共振描述

典型的随机共振系统可由下面的朗之万方程来描述:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^3 + A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \Gamma(t), \quad (1)$$

其中 a, b 为非负参数; $A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ 为弱的外部周期驱动信号; $\Gamma(t)$ 是 Gaussian 白噪声,满足 $E[\Gamma(t)] = 0$, $E[\Gamma(t)\Gamma(t+s)] = 2D\delta(s)$, 参数 D 称为强度. 运用线性响应近似理论^[3], 可知系统 (1) 的长时间平均响应为

$$\langle x(t) \rangle = \bar{x}(D) \cos(\omega_0 t - \bar{\varphi}), \quad (2)$$

其中 $\bar{x}(D) = \frac{2Ar_k \langle x^2 \rangle_0}{D\sqrt{4r_k^2 + \omega_0^2}}$ 为平均响应的幅值, $\bar{\varphi} = \arctan\left(\frac{\omega_0}{2r_k}\right)$ 为相移, $r_k = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{4Db}}$ 是与驱动信号无关的 Kramers 逃逸速率.

由于经典的随机共振现象只能放大低频信号,但在雷达、通信系统中,用作中频信号的正弦波,其频率一般在 1 kHz 左右,是典型大参数信号,因而无法直接应用 SR 理论,必须应用尺度变换将该中频信号转换为能被随机共振机理处理的小参数信号.为此,引入以下归一化变量代换^[22] $x \rightarrow x\sqrt{b/a}$, $\tau \rightarrow at$, 则 (1) 式转化为

$$\frac{dx}{d\tau} = x - x^3 + \sqrt{\frac{b}{a^3}} A \cos\left(\frac{\omega_0}{a}\tau + \varphi\right) + \sqrt{\frac{2Db}{a^2}} \eta(\tau). \quad (3)$$

由此可见,我们的频率尺度变换公式为 $\omega_0/a = 2\pi f$, 即输入信号经过归一化尺度变换后变为低频信号,其频率仅为原来的 $1/a$; 当 a 足够大时, ω_0/a 就足够地小. 相应地,信号幅度变换公式为 $A_0 = \sqrt{b/a^3} A$; 当 a 足够大、 b 足够小时,输入信号经过归一化尺度变换后变成了弱信号.与此同时,噪声强度变为 $D_0 = \sqrt{2Db/a^2}$, 即给定的噪声经由尺度变换也变成了弱噪声.

注意到直接对朗之万方程 (3) 模拟一次,可以得到随机过程 $x(t)$ 的一条样本轨道,而在实际的应用当中,我们更关注的却是大量样本轨道的统计性质,因此常常需要对方程 (3) 做大量的随机模拟.

理论上, 回避大量随机模拟的方法是直接考虑随机过程的概率密度函数. 设 $\rho(x, t)$ 为粒子在时刻 t 位于位置 x 的概率密度, 其演化满足 FPE^[23]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[x - x^3 + \sqrt{\frac{b}{a^3}} A \cos\left(\frac{\omega_0}{a} t + \varphi\right) \right] \rho(x, t) \right\} \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{Db}{a^2} \rho(x, t) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

和自然边界条件. 由于方程 (4) 是一个变系数的线性方程, 其定态解不存在, 但是可以证明其存在周期定态解^[4,18]; 特别地, 在绝热消去意义上, 可以得到方程 (4) 的周期定态解形如

$$\begin{aligned} \rho_{as}(x, t) = Z(t)^{-1} \exp \left\{ -\frac{a^2}{Db} \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{\frac{b}{a^3}} x A \cos\left(\frac{\omega_0}{a} t + \varphi\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $Z(t)$ 是与 t 有关的概率归一化常数.

$$\begin{aligned} \rho(x, t_0) = \left\{ 2 \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{a^2}{Db} \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} x^2 + \sqrt{\frac{a}{D^2 b}} x A \cos\left(\frac{\omega_0}{a} t_0 + \varphi\right) \right]} dx \right\}^{-1} \\ \times e^{-\frac{a^2}{Db} \left(\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 \right)} \left[e^{\sqrt{\frac{a}{D^2 b}} x A \cos\left(\frac{\omega_0}{a} t_0 + \varphi\right)} + e^{-\sqrt{\frac{a}{D^2 b}} x A \cos\left(\frac{\omega_0}{a} t_0 + \varphi\right)} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

其中积分上下限 x_1, x_2 由概率归一化常数决定, 对于对称双稳态系统 $x_1 = -x_2$.

从 (6) 式可以得到, 某判决时刻的正弦信号相当于在 SR 系统中添加了线性漂移力, 会使粒子向两侧势阱牵引, 增加粒子在势阱的出现和停留概率; 正的漂移力牵引粒子向正侧势阱聚集, 负的漂移力牵引粒子向负侧势阱聚集, 但由于 SR 系统输出粒子的对称性和正弦信号的周期性, 最终粒子的输出概率密度呈现对称性. 同时, 由于正弦信号的周期性, 不同判决时刻正弦信号的大小不同, 决定的漂移力大小也不同; 当判决时刻位于正弦信号的波峰

2.2 SR 增强后判决时刻的输出概率密度

为了将概率密度函数 (5) 用于正弦信号的检测接收问题, 假设电磁粒子从瞬态进入周期定态的演化过程非常快, 从而可忽略粒子从初始状态向准平衡的周期定态演化的过渡时间; 或者说, 假定在引入判决时刻 t_0 之时, 电磁粒子的扩散运动已经达到了周期定态, 且粒子在势阱内的停留时间远大于稳态过渡时间, 即出现在势阱内的概率远大于其他位置的概率. 假设势阱由双稳态的系统结构和正弦信号的极值点决定, 从而以判决时刻 t_0 时的周期定态概率密度表征 SR 输出粒子在势阱内的概率密度.

SR 系统输出粒子在正侧势阱和负侧势阱对称跃迁, 且 $\cos\left(\frac{\omega_0}{a} t_0 + \varphi\right)$ 处于波峰时所代表的线性漂移力将粒子向正侧势阱牵引, $\cos\left(\frac{\omega_0}{a} t_0 + \varphi\right)$ 处于波谷时所代表的线性漂移力将粒子向负侧势阱牵引; 对于正弦信号存在性的检测而言, 二者都是同一信号的牵引作用, 无法区分且效果相同, 取效果平均, 进一步得 x 的概率密度为

或波谷位置时, 引入的线性漂移力最大, 粒子在势阱的停留时间最长, 此时的概率密度最大.

3 二次多项式接收方法

3.1 检验统计量设计

目前通信系统多采用能量检测、包络检测或匹配滤波方式接收, 均可以看作广义二次多项式形式的接收方式, 基于此思想, 提出经 SR 系统增强的正弦信号二次多项式接收结构如图 1 所示.

如图 1 所示, 混有噪声的正弦信号经过 SR 系

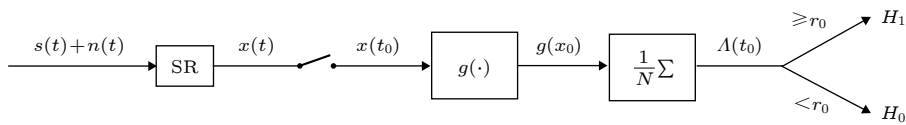


图 1 SR 系统增强正弦信号的二次多项式接收结构

Fig. 1. Quadratic polynomial receiving structure for sine signals enhanced by SR.

统, 得到增强后的待检测信号 $x(t)$, 经判决开关取样, 得到判决时刻 t_0 的 SR 系统输出值 $x(t_0)$, 即正弦信号波峰、波谷驱动 SR 系统的输出值, 此时 $x(t_0)$ 的概率密度可由 (8) 式计算得到. 对 $x(t_0)$ 进行二次多项式 $g(\cdot)$ 运算, 得到判决时刻的输出值 $g(x_0)$, 且 $g(x_0)$ 为正弦驱动信号处于波峰、波谷时, 接收系统的输出值; 平均 N 个独立同分布的 $g(x_0)$, 得到检验统计量 $\Lambda(t_0)$; 当 $\Lambda(t_0) \geq r_0$ 时判为 H_1 (存在正弦信号), 当 $\Lambda(t_0) < r_0$ 时判为 H_0 (不存在正弦信号).

当检验统计量服从高斯分布时, 误码率 P_e 与偏移系数 d 存在解析关系, 且高斯分布时, 偏移系数 $d^2 = \frac{(E_1[g(x)|H_1] - E_0[g(x)|H_0])^2}{\sigma_0[g(x)|H_0]}$ [24]; 非高斯分布时, P_e 与 d 负相关 [6,25]. 非高斯分布的偏移系数 d 定义如下 [6,25]:

$$d^2 = \frac{(E_1[g(x)] - E_0[g(x)])^2}{\frac{1}{2}(\sigma_1[g(x)] + \sigma_0[g(x)])}. \quad (7)$$

当 $g(\cdot)$ 在二次多项式函数形式的约束时, 通过使偏移系数 d 最大, 确定 $g(\cdot)$ 的系数. 设二次多项式 $g(x) = l_1x^2 + l_2x + l_3$, 则两种假设下的偏移

$$d^2(l_1, l_2) = \frac{l_1^2(\mu_{12} - \mu_{02})^2 + 2l_1l_2(\mu_{12} - \mu_{02})(\mu_{11} - \mu_{01}) + l_2^2(\mu_{11} - \mu_{01})^2}{\frac{1}{2}[l_1^2(\mu_{14} - \mu_{12}^2 + \mu_{04} - \mu_{02}^2) + 2l_1l_2(\mu_{13} - \mu_{12}\mu_{11} + \mu_{03} - \mu_{02}\mu_{01}) + l_2^2(\mu_{12} - \mu_{11}^2 + \mu_{02} - \mu_{01}^2)]}, \quad (9)$$

令

$$\begin{cases} c_{11} = (\mu_{12} - \mu_{02})^2, \\ c_{12} = 2(\mu_{12} - \mu_{02})(\mu_{11} - \mu_{01}), \\ c_{13} = (\mu_{11} - \mu_{01})^2, \\ c_{21} = (\mu_{14} - \mu_{12}^2 + \mu_{04} - \mu_{02}^2), \\ c_{22} = 2(\mu_{13} - \mu_{12}\mu_{11} + \mu_{03} - \mu_{02}\mu_{01}), \\ c_{23} = \mu_{12} - \mu_{11}^2 + \mu_{02} - \mu_{01}^2, \end{cases} \quad (10)$$

将 (10) 式代入 (9) 式得

$$\frac{d^2(l_1, l_2)}{2} = \frac{l_1^2c_{11} + l_1l_2c_{12} + l_2^2c_{13}}{l_1^2c_{21} + l_1l_2c_{22} + l_2^2c_{23}}. \quad (11)$$

非高斯分布时, P_e 与 d 负相关 [6,25], 所以欲得最小 P_e , 需计算最大 d ; 通信系统多以最小误码率为准则, 则问题转化为

$$\max_{l_1, l_2 \in R} d(l_1, l_2). \quad (12)$$

系数

$$\begin{aligned} d^2(l_1, l_2, l_3) &= \frac{(E_1[g(x)] - E_0[g(x)])^2}{\frac{1}{2}(\sigma_1[g(x)] + \sigma_0[g(x)])} \\ &= \frac{(l_1E_1[x^2] + l_2E_1[x] - l_1E_0[x^2] - l_2E_0[x])^2}{\frac{1}{2}(l_1^2\sigma_1[x^2] + l_2^2\sigma_1[x] - l_1^2\sigma_0[x^2] - l_2^2\sigma_0[x])} \\ &= [l_1(E_1[x^2] - E_0[x^2]) + l_2(E_1[x] - E_0[x])]^2 \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2}[l_1^2E_1[x^4] + 2l_1l_2E_1[x^3] + l_2^2E_1[x^2]] \right. \\ &\quad - (l_1^2E_1^2[x^2] + 2l_1l_2E_1[x^2]E_1[x] + l_2^2E_1^2[x]) \\ &\quad + l_1^2E_0[x^4] + 2l_1l_2E_0[x^3] + l_2^2E_0[x^2] \\ &\quad \left. - (l_1^2E_0^2[x^2] + 2l_1l_2E_0[x^2]E_0[x] + l_2^2E_0^2[x]) \right\}^{-1} \\ &= d^2(l_1, l_2). \end{aligned} \quad (8)$$

由 (8) 式可得, 二次多项式的偏移系数 $d(l_1, l_2, l_3)$ 与常数项 l_3 无关, 仅由系数 l_1, l_2 和 x 的一至四阶原点矩决定, 且 $d(l_1, l_2, l_3)$ 有线性偏移不变性. 令 $\mu_{11} = E_1[x], \mu_{12} = E_1[x^2], \mu_{13} = E_1[x^3], \mu_{14} = E_1[x^4]$ 和 $\mu_{01} = E_0[x], \mu_{02} = E_0[x^2], \mu_{03} = E_0[x^3], \mu_{04} = E_0[x^4]$, 则

由函数取极值的必要条件得

$$\begin{aligned} \frac{\partial d}{\partial l_1} = -\frac{\partial d}{\partial l_2} = 0 &\Leftrightarrow l_1^2(c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12}) \\ &+ l_1l_2(2c_{11}c_{23} - 2c_{21}c_{13}) \\ &+ l_2^2(c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

设 $l_1 = ml_2$ 时, $\frac{\partial d}{\partial l_1} = 0$, 即

$$\begin{aligned} \frac{\partial d}{\partial l_1} = 0 &\Leftrightarrow m^2(c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12}) \\ &+ 2m(c_{11}c_{23} - c_{21}c_{13}) \\ &+ (c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

求解 (14) 式可得 m 的数值解. 此时 $g(x) = x^2 + \frac{1}{m}x + c$, 其在两种假设下的期望和方差

$$\begin{cases} \mu_1 = E_1 [g(x)] = \int g(x) \rho(x, t_0 | H_1) dx, \\ \mu_0 = E_0 [g(x)] = \int g(x) \rho(x, t_0 | H_0) dx, \\ \sigma_1^2 = \sigma_1^2 [g(x)] = \int (g(x) - \mu_1)^2 \rho(x, t_0 | H_1) dx, \\ \sigma_0^2 = \sigma_0^2 [g(x)] = \int (g(x) - \mu_0)^2 \rho(x, t_0 | H_0) dx. \end{cases} \quad (15)$$

为进一步减小系统误码率, 经 $\frac{1}{N} \sum$ 单元处理, 相当于取 N 个独立同分布且具有相同期望和方差的 $g(x_0)$ 的平均值, 由独立同分布的中心极限定理^[26], 可知当 $N > 50$ 时, 检验统计量

$$\Lambda(t_0) = \frac{1}{N} \sum g(x_0) \sim \begin{cases} N(\mu_1, \sigma_1^2/N), & H_1, \\ N(\mu_0, \sigma_0^2/N), & H_0, \end{cases} \quad (16)$$

其中 μ_1, σ_1 为 $g(x_0)$ 在 H_1 假设下的期望和标准差; μ_0, σ_0 为 $g(x_0)$ 在 H_0 假设下的期望和标准差.

至此, 经 SR 系统增强的二次多项式接收正弦信号问题转化为经典的高斯分布下的假设检验问题. 且正弦信号的接收中频频率先验已知, 当检测到正弦信号存在时, 接收码元判定为“1”; 否则判定为“0”; 以最小错误概率为准则, 则误码率

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{2} (1 - P_d) + \frac{1}{2} P_{fa} \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{r_0} \Lambda f_1(\Lambda) d\Lambda + \int_{r_0}^{+\infty} \Lambda f_0(\Lambda) d\Lambda \right] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} Q \left(\frac{r_0 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2/N}} \right) + \frac{1}{2} Q \left(\frac{r_0 - \mu_0}{\sqrt{\sigma_0^2/N}} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

其中 r_0 为判决门限; μ_1, μ_0 为两种假设下 $g(x_0)$ 单元的期望; σ_1, σ_0 为两种假设下 $g(x_0)$ 单元的标准差.

对于最小错误概率准则, 判决门限在两种假设下概率密度相等, 即 $f_1(r_0) = f_0(r_0)$ 时, P_e 取得最小值, 即

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2/N}} e^{-\frac{(r_0-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2/N}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2/N}} e^{-\frac{(r_0-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2/N}}, \quad (18)$$

化简得

$$\frac{(r_0 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{(r_0 - \mu_0)^2}{\sigma_0^2} = \frac{2}{N} \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0}, \quad (19)$$

则判决门限 r_0 可由 (19) 式数值计算得到.

3.2 接收算法流程

根据 3.1 节的理论, 经 SR 增强正弦信号的二次多项式接收算法如下:

- 1) 根据 (6) 式计算两种假设下 SR 系统输出的概率密度函数 $\rho(x, t|H_1)$, $\rho(x, t|H_0)$ 和一至四阶原点矩 $\mu_{11}, u_{12}, \mu_{13}, u_{14}$ 和 $\mu_{01}, u_{02}, \mu_{03}, u_{04}$;
- 2) 根据 (10) 和 (14) 式确定 $g(x)$ 的系数 l_1, l_2 ;
- 3) 根据 (15) 式计算 $g(x)$ 在两种假设下的期望 μ_1, μ_0 和标准差 σ_1, σ_0 ;
- 4) 根据 (19) 式计算最小错误概率准则下的判决门限 r_0 ;
- 5) 根据 (17) 式计算最小错误概率 P_e .

4 仿真实验

通过搭建基于 SR 增强的二次多项式接收正弦信号的 Simulink 模型, 对比分析理论值和仿真值, 验证理论推导的正确性. 仿真参数如下: 正弦信号频率为 1 kHz, 中频采样率为 200 kHz, 最佳匹配 SR 的噪声功率值参见文献^[22] 的表 3.

4.1 正弦信号经 SR 系统后的时、频域波形

混合强噪声的正弦信号时域、频域波形分别见图 2(a) 和图 2(b), 经 SR 系统增强输出后的时域、频域波形分别见图 2(c) 和图 2(d). 当输入 SNR = -18 dB 时, 时域图 (图 2(a)) 和频域图 (图 2(b)) 呈现出杂乱的、无规律的, 无法看到 1 kHz 正弦信号分量的任何特征; 然而经 SR 系统处理后, 时域图 (图 2(c)) 出现周期性特征, 说明存在周期分量信号; 通过频域图 (图 2(d)) 观察到 1 kHz 出现明显的信号分量 (采样点数 20000 个, 频率分辨率 10 Hz, 所以峰值出现在 99.95 处), 且输出全局 SNR 为 -14.0957 dB, 提高了 3.9043 dB. 这是因为 SR 单元对信号的处理可相当于非线性低通滤波, 会增强低频区的某些频率分量, 减弱其他的频率分量. 但与线性滤波器只改变输出频谱结构, 不改变输出各频率的概率密度的性质不同的是, SR 单元在改变频谱结构的同时, 也改变了输出粒子的概率密度 (见图 3). 经过 SR 系统后, 平坦分布的高斯白噪声将向低频区聚集, 使低频区能量变大, 和低频正弦信号一起驱动粒子在双稳态势垒之间跃迁, 时域信号出现一定的周期特性, 频域观察更显著, 改变了含噪信号的频谱结构, 宏观上表现为 SNR 增大.

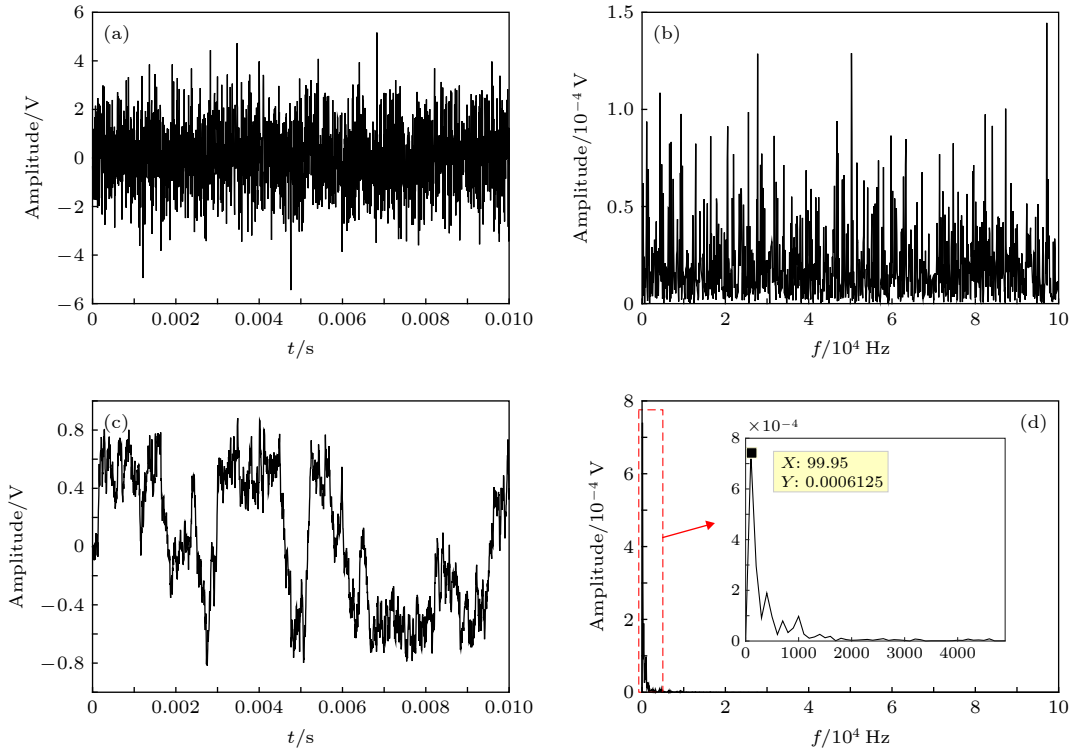


图 2 正弦信号经 SR 系统增强前后的时频域波形 (输入 $SNR = -18$ dB, 噪声功率 $\sigma^2 = 4$, 信号幅度 $A = 0.25$, SR 系统参数 $a = 1 \times 10^4$, $b = 3.3856 \times 10^{12}$) (a) 输入信号时域波形; (b) 输入信号频域幅值谱; (c) 输出信号时域波形; (d) 输出信号频域幅值谱

Fig. 2. Waveform of time and frequency zone of sine wave enhanced by SR (input $SNR = -18$ dB, the noise intensity $\sigma^2 = 4$, signal amplitude $A = 0.25$, parameters of system $a = 1 \times 10^4$, $b = 3.3856 \times 10^{12}$): (a) The waveform of input signal in time zone; (b) the amplitude of input signal in frequency zone; (c) the waveform of output signal in time zone; (d) the amplitude of output signal in frequency zone.

4.2 正弦信号经 SR 系统增强后的概率密度

正弦信号未经 SR 处理的粒子概率密度如图 3(a) 所示, 经 SR 系统增强后在不同位置的 $\rho(x, t)$ 理论值和仿真值如图 3(b) 所示, 其部分局部如图 3(c) 所示. 黑色实线为有驱动力时的 $\rho(x, t_0 | H_1)$, 红色虚线为无驱动力时的 $\rho(x, t_0 | H_0)$, 黑色实线为选取两个不同的判决时刻, 即分别为 $\cos\left(\frac{\omega_0}{a}t_0 + \varphi\right) = 1$ 和 $\cos\left(\frac{\omega_0}{a}t_0 + \varphi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 的对应时刻, 无驱动力的情况可视为 $\cos\left(\frac{\omega_0}{a}t_0 + \varphi\right) = 0$ 的对应时刻. 在未经 SR 处理之前, 正弦信号淹没在高斯噪声之中, 且 SNR 极低, 粒子的概率分布情况绝大部分表征了高斯噪声的性质, 因信号强度相较噪声太小, 导致有无信号时, 两种假设下的概率密度几乎无差别, 图 3(a) 很好地说明了这一点. 经过 SR 处理之后, 粒子的分布不再服从高斯分布, 体现了 SR 的非线性作用; 同时理论和仿真曲线都

表明, 引入判决时刻的正弦信号相当于系统中添加了线性漂移力, 会牵引粒子向两侧势阱聚集, 增长粒子在稳态势阱的驻留时间, 增加粒子在势阱的出现概率, 从而加大两种不同假设下 $\rho(x, t)$ 的差异, 更加有利于区分有无正弦信号这两种假设, 提高正弦信号的检测能力. 且根据两条不同判决时刻的黑色实线可看出, 不同判决时刻对应的正弦信号数值大小不同, 决定的线性漂移力也不同, 从而在两侧势阱的概率也不同; 当判决时刻位于正弦信号的波峰或波谷位置时, 引入的线性漂移力最大, SR 系统的粒子在势阱的停留时间最长, 在势阱的概率密度也相应最大. 从滤波角度来看, 输入粒子的高斯分布特性经过 SR 单元处理后, 变为非高斯分布. 但同时也可看到, 有无信号驱动下 SR 输出概率密度差异较小, 导致直接将 SR 应用于 DSFH 的信号检测出现较大的虚警; 故而设计二次多项式接收结构和 N 次判决平均, 进一步扩大接收检验统计量在有无信号下的概率密度差异, 提高 SR 应用于 DSFH 的接收性能.

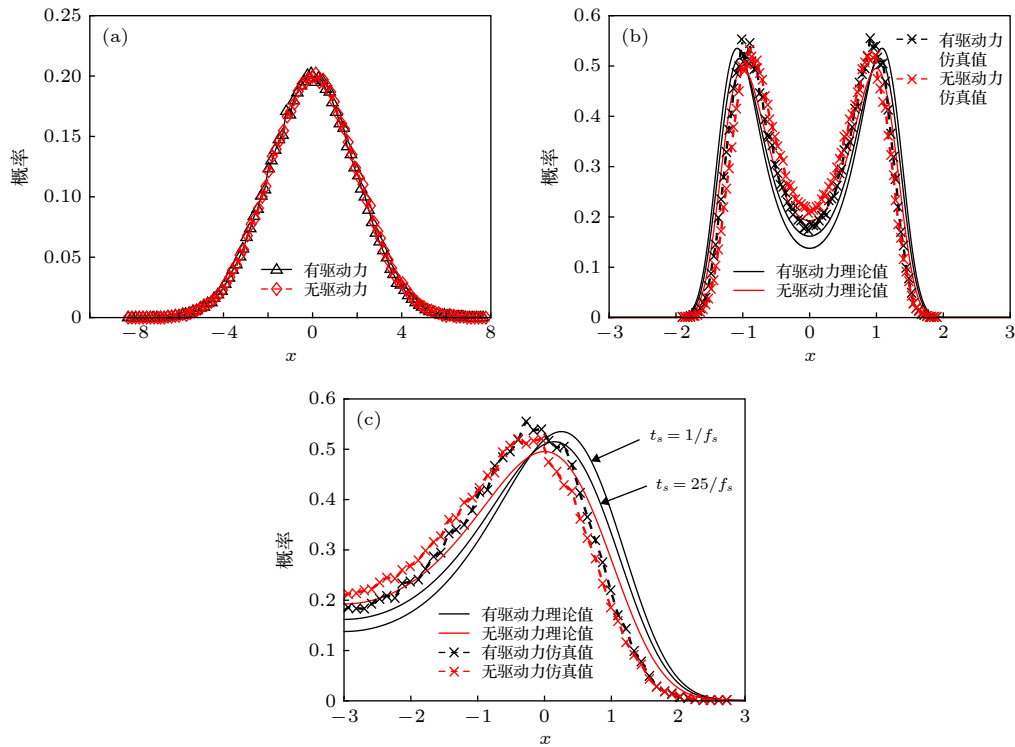


图3 粒子处于不同位置时的概率密度(输入 $SNR = -14$ dB, 噪声功率 $\sigma^2 = 4$, 信号幅度 $A = 0.4$, SR 系统参数 $a = 1 \times 10^4$, $b = 2.6406 \times 10^{12}$) (a) 未经 SR 处理的粒子的分布概率; (b) 经 SR 处理后粒子的分布概率; (c) 经 SR 处理后粒子的分布概率局部图
 Fig. 3. Probability density function of particles of SR (input $SNR = -14$ dB, the noise intensity $\sigma^2 = 4$, signal amplitude $A = 0.4$, parameters of system $a = 1 \times 10^4$, $b = 2.6406 \times 10^{12}$): (a) The probability density of particles before SR processed; (b) the probability density of particles after SR processed; (c) the partial of probability density of particles after SR processed.

4.3 不同判决点数的系统判决时刻输出

不同判决点数 N 时系统在判决时刻的输出仿真值如图 4 所示, 图 4(a) 为单次检验统计量 $g(x_0)$ 的波形, 图 4(b) 为 $g(x_0)$ 的多次 ($N = 10$) 平均波形. 可以看出不同 N 时, 对于检验统计量 $g(x_0)$ 的发散程度不同. 这是因为判决时刻时, 粒子的运动

大部分集中于势阱内, 其位置由势阱决定; 但同时受到噪声影响, 粒子不会在势阱内静止不动, 而是在一定范围内抖动, 出现图 4(a) 中情形, 其平衡位置就是势阱的大概位置. 图 4(b) 为经过 N 次平均之后的波形, 进一步体现了平衡位置所在, 同时减小了随机变量 $g(x_0)$ 的抖动范围. 从而证明了 N 次平均统计量更有利于提高判决准确性.

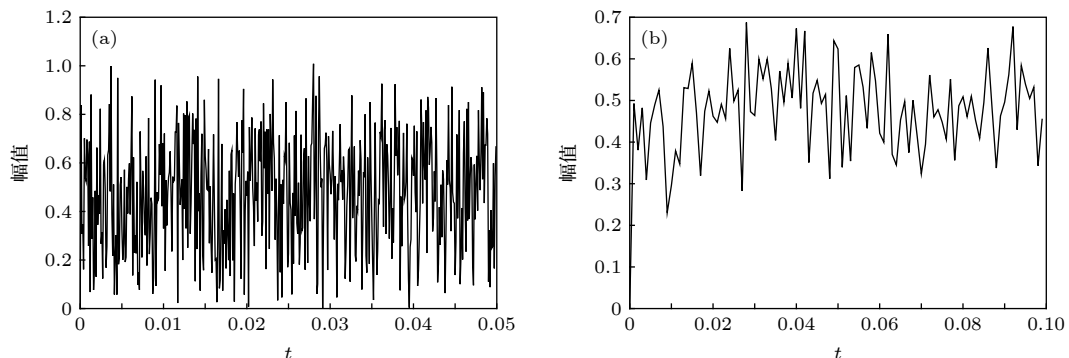


图4 不同 N 时 $g(x_0)$ 的输出值(输入 $SNR = -18$ dB, 噪声功率 $\sigma^2 = 4$, 信号幅度 $A = 0.25$, SR 系统参数 $a = 1 \times 10^4$, $b = 3.3856 \times 10^{12}$) (a) $N = 1$ 时检验统计量的时域波形; (b) $N = 10$ 时检验统计量的时域波形

Fig. 4. Output of $g(x_0)$ at different N (input $SNR = -18$ dB, the noise intensity $\sigma^2 = 4$, signal amplitude $A = 0.25$, parameters of system $a = 1 \times 10^4$, $b = 3.3856 \times 10^{12}$): (a) The waveform of test statistics when $N = 1$; (b) the waveform of test statistics when $N = 10$.

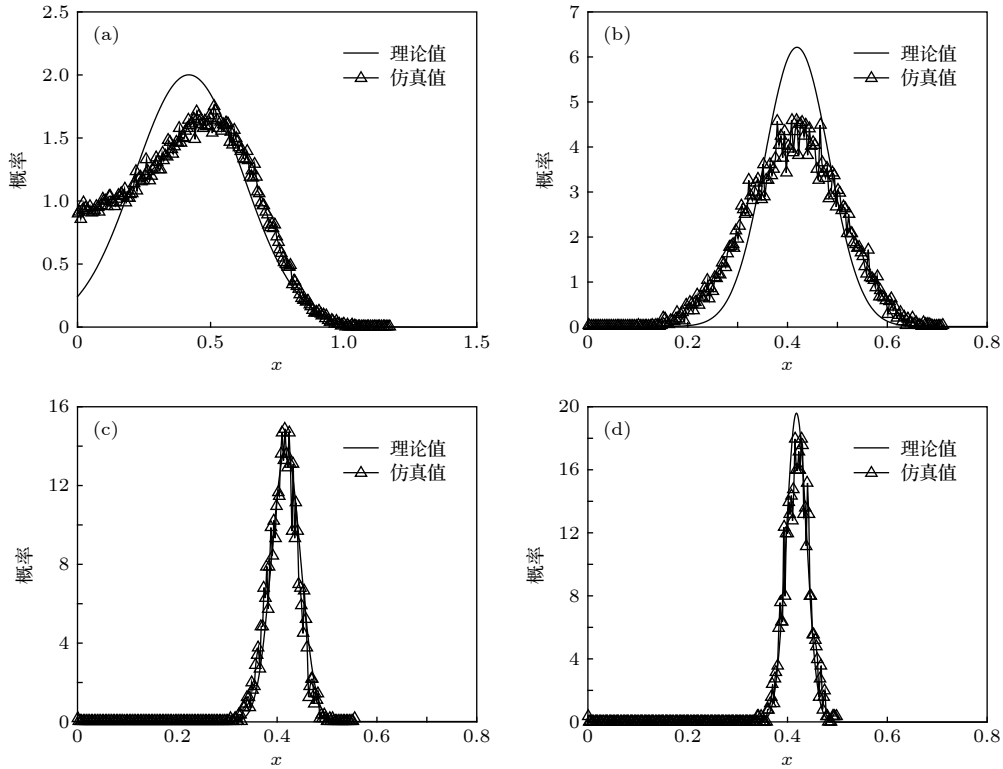


图 5 不同 N 时 $g(x_0)$ 的输出概率密度 (输入 $SNR = -14$ dB, 噪声功率 $\sigma^2 = 4$, 信号幅度 $A = 0.4$, SR 系统参数 $a = 1 \times 10^4$, $b = 2.6406 \times 10^{12}$, $g(x) = x^2 + 0.0701x$) (a) $N = 1$ 时粒子的分布概率; (b) $N = 10$ 时粒子的分布概率; (c) $N = 50$ 时粒子的分布概率; (d) $N = 100$ 时粒子的分布概率

Fig. 5. Output probability density function of $g(x_0)$ at different N (input $SNR = -14$ dB, the noise intensity $\sigma^2 = 4$, signal amplitude $A = 0.4$, parameters of system $a = 1 \times 10^4$, $b = 2.6406 \times 10^{12}$, $g(x) = x^2 + 0.0701x$): (a) The output probability density when $N = 1$; (b) the output probability density when $N = 10$; (c) the output probability density when $N = 50$; (d) the output probability density when $N = 100$.

不同判决点数 N 时系统的输出概率密度理论值和仿真值如图 5 所示, 理论值为由 $E[g(x_0)]$ 和 $\sigma[g(x_0)]$ 确定的高斯分布, 仿真值为系统的输出频率. 从图 5(a) 和图 5(b) 可以看出, 在 N 不符合中心极限定理条件时, 系统输出的频率与高斯分布的概率密度相差较大; 从图 5(c) 和图 5(d) 可以看出, 当 $N > 50$ 时, 符合中心极限定理条件, 系统输出的频率与相应的高斯分布符合较好; 且随着 N 的增大, 系统输出的方差 σ^2/N 减小, 粒子的聚集性更加集中, 在均值附近出现的概率更大, 更加有利于区分两种不同的假设, 理论和仿真均说明这一点.

4.4 不同接收结构的系统输出误码率

不同接收结构的系统输出误码率如图 6 所示. 可以看到, 直接 N 次累积平均接收结构的误码率最大, 其次是能量接收结构, 二次多项式 $g(x)$ 接收结构的误码率最小; 验证了二次多项式接收结构的性能优于能量接收和直接累积平均接收结构, 但三

者性能相差不大. 这是因为 N 次累积平均接收结构与包络接收一致, 而能量接收与包络接收性能相差无几. 根据“3.2 节 接收算法流程”中第二步: “根据 (10) 式和 (14) 式确定 $g(x)$ 的系数 l_1, l_2 ”, 同时依据偏移系数 d 的线性偏移不变性, 可确定此时二次多项式 $g(x)$ 接收结构的最优系数为: 二次项系

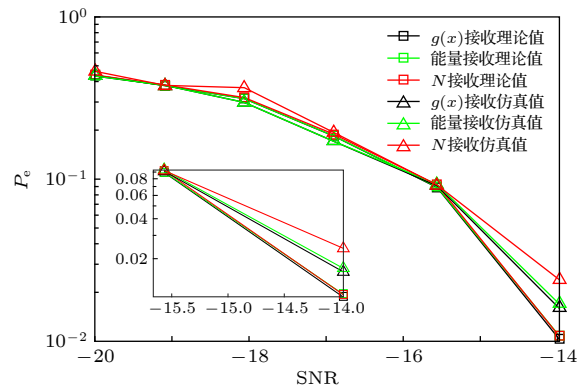


图 6 不同接收结构的系统输出误码率

Fig. 6. Output bit error ratio of different receiving structure.

统为 1, 一次项系数分别为 [0.4616, 0.3312, 0.2291, 0.1421, 0.1002, 0.0701], 常数项无影响, 一次项系数较二次项系统相差较大, 起主要作用的是二次项系数, 所以和能量接收性能相差不大. 同时, 不同接收结构主要改变的是不同假设情况下系统输出的期望, 对于方差影响不大; 而在高斯分布时系统输出的误码率主要由方差决定; 所以三者接收性能差别不大.

4.5 不同判决点数时系统输出误码率

不同判决点数时系统输出误码率如图 7 所示. 可以看到, 随着判决点数 N 的增大, 系统输出误码率越来越小, 理论和仿真曲线均是如此. 这是因为当接收结构一定时, 系统输出的期望是一定的, 不同判决点数决定的是系统输出的方差; 在中心极限定理条件下, 系统输出在两种假设时均服从高斯分布, 其方差为 σ^2/N ; 随着 N 的增大, 方差减小, 两种假设的分离度越来越大, 检测接收的性能会越来越好. 采用 N 点平均判决, 必须确保一个码元周期内存在 N 个可供判决的波峰、波谷值; 即判决点数 N 越多, 需要正弦信号在一个码元时间内的周期越多, 对于系统的采样频率和正弦信号载频一定时, 必须降低码元速率, 即通信系统中以“有效性换可靠性”思想的体现. 在忽略两种假设输出概率密度差别二元对称信道条件下, 单符号的平均最大信息量 c 与误码率关系为 $c = 1 + P_e \log_2(P_e) + (1 - P_e) \log_2(1 - P_e)$, 采用 N 点平均判决时, 超外差接收的 DSFH 模式在某 SNR 条件下的最大信息速率 R 与误码率关系为 $R = \frac{f_0}{N} c = \frac{f_0}{N} [1 + P_e \log_2(P_e) + (1 - P_e) \log_2(1 - P_e)]$. 当 $N = 500$ 时,

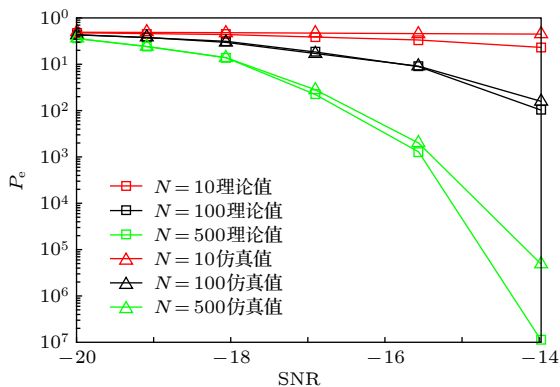


图 7 不同 N 时的二次多项式接收结构的误码率

Fig. 7. Output bit error ratio of quadratic polynomial receiving structure at different N .

二次多项式接收结构在 $SNR > -17$ dB 时误码率低于 2.2×10^{-2} , 可应用于 DSFH 通信模式的军事应急通信.

5 总结

SR 系统在输入信号、噪声和系统参数匹配的情况下, 对低频小信号有天然的共振效果, 通过过采样将超外差接收的 DSFH 中频正弦信号等效到采样频带的低频区, 此时噪声会与低频信号一起提高低频区响应; 加大了极低 SNR 下有无信号的差别, 更有利于信号检测接收. 同时, SR 应用于 DSFH 的信号检测, 并不会改变 DSFH 空域信号的窄带特性, 判决时刻对同步要求较低, 非常适合于极低 SNR 下的军事应急通信场景, 进一步扩展了军事应急通信的可用手段. 信号检测只关注在判决时刻的检验统计量情况, 据此特点, 一改传统“先确定检验统计量, 再确定判决时刻”的处理方法; 同时根据双稳态 SR 的势阱特点, 在确定检验统计量之前, 引入判决时刻, 巧妙地将非自治 FPE 转换为自治 FPE 求解. 根据 SR 和信号检测的特点, 合理改变判决时刻与检验统计量的处理顺序的思想, 以及所得 $\rho(x, t)$ 的求取方法及结果为 SR 应用于信号检测接收问题提供了借鉴; 所提的二次多项式接收方法进一步补充了正弦信号经 SR 系统增强后的接收策略. 同时, 多项式接收结构的幂次受系统稳定性的约束, 这也是下一步的主要研究内容.

参考文献

- [1] Quan H D, Zhao H, Cui P Z 2015 *Wirel. Pers. Commun.* **81** 1159
- [2] Zhao H, Quan H D, Cui P Z 2015 *Syst. Eng. Electron.* **37** 671 (in Chinese) [赵寰, 全厚德, 崔佩璋 2015 系统工程与电子技术 **37** 671]
- [3] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A* **14** 453
- [4] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [5] Chapeau B F, Godivier X 1997 *Phys. Rev. E* **55** 1478
- [6] Tougaard J 2002 *Biol. Cybern.* **87** 79
- [7] Kang Y M 2016 *Phys. Lett. A* **380** 3160
- [8] Wang S, Wang F Z 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 160502 (in Chinese) [王珊, 王辅忠 2018 物理学报 **67** 160502]
- [9] Krauss P, Metzner C, Schilling A 2017 *Sci. Rep.* **7** 2450
- [10] Galdi V, Pierro V, Pinto I M 1998 *Phys. Rev. E* **57** 6470
- [11] Zozor S, Amblard P O 2002 *Signal Process.* **82** 353
- [12] Zozor S, Amblard P O 2003 *IEEE Trans. Signal Process.* **51** 3177
- [13] Chen H, Varshney P K, Kay S M 2007 *IEEE Trans. Signal*

- Process.* **55** 3172
- [14] Chen H, Varshney P K, Kay S M 2008 *IEEE Trans. Signal Process.* **56** 5031
- [15] Wang J, Ren X, Zhang S 2014 *IEEE Trans. Wireless Commun.* **13** 4014
- [16] Zhang Z, Kang Y, Xie Y 2014 *Commun. Theor. Phys.* **61** 578
- [17] Zhang L, Song A 2018 *Phys. A* **503** 958
- [18] Hu G 1994 *Stochastic Force and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education) pp220–225 (in Chinese) [胡岗 1994 随机力与非线性系统 (上海: 上海科技教育出版社) 第220—225页]
- [19] Lu Z H, Lin J H, Hu G 1993 *Acta Phys. Sin.* **42** 1556 (in Chinese) [卢志恒, 林建恒, 胡岗 1993 物理学报 **42** 1556]
- [20] Socha L 2005 *Appl. Mech. Rev.* **58** 178
- [21] Askari M, Adibi H 2015 *Ain Shams Eng. J.* **6** 1211
- [22] Hu N Q 2012 *The Theory of Detection and Estimation Using Stochastic Resonance* (Beijing: National Defence Publishing) pp85, 86 (in Chinese) [胡鸢庆 2012 随机共振微弱特征信号检测理论与方法 (北京: 国防工业出版社) 第85, 86页]
- [23] Kang Y M, Xu J X, Xie Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2712 (in Chinese) [康艳梅, 徐健学, 谢勇 2003 物理学报 **52** 2712]
- [24] Steven M K (translated by Luo P F) 2014 *Fundamentals of Statistical Signal Processing* (Beijing: Publishing House of Electronics Industry) pp397–400 (in Chinese) [史蒂文 M L 著 (罗鹏飞 译) 2014 统计信号处理基础-估计与检测理论 (北京: 电子工业出版社) 第397—400页]
- [25] Picinbono B 1995 *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* **31** 1072
- [26] Sheng Z, Xie S Q, Pan C Y 2008 *Probability Theory and Mathematical Statistics* (Beijing: Higher Education Press) pp147–153 (in Chinese) [盛骤, 谢式千, 潘承毅 2008 概率论与数理统计 (北京: 高等教育出版社) 第147—153页]

A quadratic polynomial receiving scheme for sine signals enhanced by stochastic resonance*

Liu Guang-Kai^{1)†} Quan Hou-De¹⁾ Kang Yan-Mei²⁾ Sun Hui-Xian¹⁾
 Cui Pei-Zhang¹⁾ Han Yue-Ming³⁾

1) (*Department of Electronics and Optical Engineering, Army Engineering University, Shijiazhuang 050003, China*)

2) (*School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*)

3) (*The Troop of 66389, Shijiazhuang 050000, China*)

(Received 19 June 2019; revised manuscript received 5 August 2019)

Abstract

Aiming at the reception of the intermediate frequency signal of sine wave of radio and communication system at extremely low signal-to-noise ratio (SNR), a quadratic polynomial receiving scheme for sine signals enhanced by stochastic resonance (SR) is proposed. Through analyzing the mechanism of sine signals enhanced by SR and introducing the decision time, the analytic periodic stable solution with time parameters of the Fokker-Planck Equation (FPE) is obtained through converting the non-autonomous FPE into an autonomous equation. Based on the probability density function of the particle of SR output, a quadratic polynomial receiving scheme is proposed by analyzing the feature of energy detector and matching filter receiver. By maximizing the deflection coefficient, the binomial coefficients and the test statistic are obtained. For further reducing the bit error, by combining the thought of “the average of N samples”, a quadratic polynomial receiving scheme for sine signals enhanced by SR is proposed through the hypothesis under Gaussian distribution approximation of the law of large N . And the conclusion is obtained as follows. When N is 500 and the SNR is greater than -17 dB, the bit error rate is less than 2.2×10^{-2} , under the constraint of the parameters of the optimally matched SR.

Keywords: stochastic resonance, reception of sine signal, quadratic polynomial receiving scheme, Fokker-Planck equation, deflection coefficient

PACS: 05.40.-a, 02.50.-r

DOI: [10.7498/aps.68.20190952](https://doi.org/10.7498/aps.68.20190952)

* Project supported by the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant No. F2017506006).

† Corresponding author. E-mail: dreamer_gk@163.com