

傅里叶域中的光线*

张书赫 邵梦 张盛昭 周金华†

(安徽医科大学生物医学工程系, 合肥 230032)

(2019年5月29日收到; 2019年8月9日收到修改稿)

建立普适的理论模型用于描述光线和光波场的关系是几何光学领域中重要的研究内容. 本文基于传统几何光学与傅里叶光学原理, 提出利用光波场的傅里叶角谱得到光束的光线模型, 反之可以根据光线模型反演光场的傅里叶角谱. 以 Airy 光束以及 Cusp 光束为例, 展示了利用傅里叶角谱构建光束光线模型的方法及其正确性; 进一步展示利用光线构建焦点处的光波场的傅里叶频谱分布, 然后通过逆变换得到光波场的空间分布, 并与 Debye 方法取得了相同的结果; 最后从空间坐标域以及空间频率域给出了光线模型的高维解释, 以聚焦光束、Airy 光束以及二次梯度折射率波导中的光线为例展示了高维光线模型的物理内涵. 理论分析表明, 传统几何光学构建的光线模型只是高阶光线模型在实空间内的投影.

关键词: 几何光学, 光线, 高维光线, 傅里叶角谱**PACS:** 42.15.-i, 42.30.Kq, 42.60.Jf**DOI:** 10.7498/aps.68.20190839

1 引言

光线是几何光学的核心, 其作为一种纯数学物理的概念被广泛用于光学设计^[1], 计算机图形学^[2]以及光场 (light field) 分析^[3,4]中. 现代几何光学结合了波动光学的思想, 导出了利用光线模型描述光波场复振幅在空间中传输的方法^[5,6]. 利用该方法, 人们能够在几何光学适用范围内精确描述光波场的波动现象^[7], 其中甚至包括光波场的干涉以及衍射行为^[8]. 此外, 人们通过对光波场建立光线模型, 不仅能直观地表征光波场在空间中的演化过程, 更能用于解释一些光波场的特殊性质. 例如采用光束的光线模型解释 Airy 光束的自加速特性^[9]、Bessel 光束的自修复特性^[10]以及拉盖尔高斯光束的亚光速传输特性^[11,12]等. 反之, 根据光线模型反演出光波场的相位与振幅信息同样具有重要的应用价值^[13]. 光场相机利用结构紧凑的微透镜阵列近似得到光

线的强度、位置以及方向等信息, 再利用光线重构得到光场分布^[4], 进而实现“先拍照, 后聚集”的功能. 该原理甚至能用于实现光波场的相位恢复^[13]. 可见, 光线模型作为一种数学工具, 不仅能指导人们研究光波的传输性质, 而且储存了光波场的复振幅信息 (强度以及相位). 因此建立更为普适的模型用于描述光线和光波场的关系是几何光学领域中重要的研究内容.

几何光学基于“光波场的相位梯度方向为光线方向”这一基本原理^[7], 从光波场复振幅的相位中获得其对应的光线模型, 然而该方法并不适用于焦点和焦散线/面附近的光波场. 在焦点和焦散线/面附近, 光线方向并不与光波场的波前垂直^[5,6], 因此几何光学无法正确描述光线与波前在焦点和焦散线/面附近的关系.

为了避免几何光学在焦点和焦散线/面附近失效的问题, 本文提出使用光波场的傅里叶角谱得到光束的光线模型. 本文的结构如下: 第 2 节简单介

* 安徽省自然科学基金 (批准号: 1908085MA14)、安徽省转化医学研究院科研基金 (批准号: 2017zhyx25)、安徽医科大学博士科研资助基金 (批准号: XJ201812) 和安徽医科大学校科研基金 (批准号: 2018XKJ013) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhoujinhua@ahmu.edu.cn

绍几何光学中光线方向与光波场的定义, 为后续的理论推导做铺垫; 第 3 节从光场的傅里叶角谱中推导得到“光波场傅里叶角谱的相位反映了光线位置”这一结论; 第 4 节以 Airy 光束以及 Cusp 光束为例展示了利用傅里叶角谱构建光束的光线模型, 并使用光线模型解释光束的传输特性; 第 5 节以焦点处光场分布为例, 展示了使用光线追踪构建焦点处光场分布的思路; 第 6 节以会聚的平面波、Airy 光束以及二次梯度折射率波导中的光线展示高维空间下光束的高维光线模型.

2 光波场的相位梯度为光线方向

根据现代几何光学原理^[7], 在焦点和焦散线/面以外的区域, 光线方向为光波场波前的梯度方向. 其具体形式为: 若某 $z = z_0$ 平面内的已知光波场的复振幅

$$U(x, y, z_0) = A(x, y, z_0) \exp[ikS(x, y, z_0)], \quad (1)$$

其中函数 $A(x, y, z_0)$ 与 $S(x, y, z_0)$ 均为缓变的实函数, 则其从点 $\mathbf{r} = (\xi, \eta, z_0)$ 出发的光线的方向向量为^[7]

$$\mathbf{v}(\xi, \eta, z_0) = \nabla S =$$

$$\left[\frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x=\xi}, \frac{\partial S}{\partial y} \Big|_{y=\eta}, \sqrt{1 - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x=\xi} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y} \Big|_{y=\eta} \right)^2} \right]. \quad (2)$$

在傅里叶光学中, 二维向量 $(\partial S/\partial x, \partial S/\partial y)/\lambda$ 定义为光波场在点 (ξ, η, z_0) 处的局部空间频率^[14]. 可见, 光线反映了光波场局部空间频率的信息.

根据 (2) 式我们可以得到一些光波场复振幅满足表达式 (1) 的光线模型. 例如平面波 $U(x, y, z_0) = \exp[ik(x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta)]$, 其中参数 θ 和 φ 分别为平面波传输方向在球坐标系下的坐标参数. 根据 (2) 式可得平面波上任意一点的光线均沿单位向量 $\mathbf{v} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ 传输. 再例如从 xoy 面出发, 向点 $(0, 0, f)$ 会聚的球面波 $U(x, y, 0) = \exp[-ik(f^2 + x^2 + y^2)^{1/2}]$, 根据 (2) 式可得从 $(\xi, \eta, 0)$ 点出发的光线沿着指向点 $(0, 0, f)$ 的单位向量 $\mathbf{v} = (-\xi, -\eta, f)/\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}$ 传输. 根据光线位置 \mathbf{r} 与光线方向 \mathbf{v} , 可以进一步得到光线在空间中的轨迹. 在几何光学角度下, 函数 $A(x, y, z_0)$ 此时为光线在对应位置的权重函数^[7].

然而, (2) 式并不适用于焦点或焦散线/面附近

的光波场. 图 1 展示了二维 (2D) 平面内平行光经过理想透镜聚焦后的光线模型. 如图 1(a) 所示, 平行光经过理想透镜聚焦后, 光线会聚在焦点处, 并形成光锥的结构. 以焦面为 $z = 0$ 平面, 焦点为原点建立二维笛卡尔坐标系得到如图 1(b) 所示的光线模式, 图中蓝色虚线为光波场的等相位面. 若假设透镜的焦距为 f , 在 $z = -f$ 平面内, 从点 (ξ, f) 处发出的光线沿单位向量 $\mathbf{v} = (-\xi, f)/\sqrt{\xi^2 + f^2}$ 传输. 反之, 根据 (2) 式得到该点 (ξ, f) 处的光波场相位为 $-k\sqrt{\xi^2 + f^2}$. 在远离焦点的区域, 光波的等相位面为一球面, 且光线方向垂直于光波场的波前. 然而在焦点处, 光波的等相位面为平面^[6], 光线在焦点处会聚且不垂直于波前, 因此在焦点或焦散线/面处, 此时 (2) 式无法正确描述光线方向与光波相位面的关系.

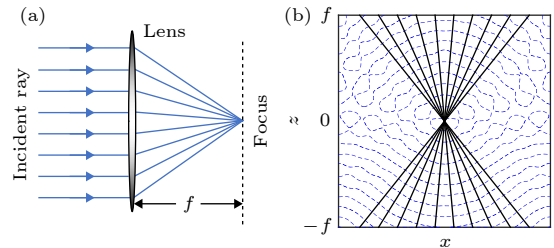


图 1 平行光经透镜聚焦后产生锥形光线 (a) 光线追踪示意图; (b) 光锥的简化光线模型

Fig. 1. Ray cone that produced by convergent parallel rays through a lens: (a) Sketch of ray-tracing; (b) simplified ray model of ray cone.

从波动的角度解释, 等光程的光线在空间位置域会聚于一点, 发生强烈干涉现象, 导致光波场的相位产生畸变, 越靠近焦点处畸变越严重^[6]. 因此几何光学无法正确描述焦点处的光波场相位情况 (焦散线/面处同理). 然而, 当光波场在均匀介质中传输时, 其傅里叶角谱只产生相位的平移变化. 我们可以认为光波场的傅里叶角谱在传输过程中并不发生严重的干涉现象. 因此在处理焦点光波场问题时, 人们往往从傅里叶角谱域着手得到光波场在焦点的傅里叶角谱的表达形式, 然后根据傅里叶逆变换得到空间位置域的光波场分布. 著名的 Debye 近似方法先使用光线追踪得到从物镜后瞳发出的会聚的光线模型, 再将每根光线视作平面波, 得到焦点处平面波的傅里叶角谱表达式^[6]. 这些平面波在焦点处干涉叠加的过程即为计算傅里叶逆变换的过程, 最终计算得到光波场在焦点附近

的三维分布. Debye 近似的处理方法同样表明, 光线不仅仅包含了光波场实域的相位信息, 它还包含了光波场的局部空间频率信息.

3 角谱的相位梯度为光线位置

为了简化分析, 考虑在真空中传输的标量单色光波场为 (1) 式的表示形式. 设 $z = z_0$ 平面内光波场的傅里叶角谱为 $\tilde{U}(p, q, z_0)$, 根据二维傅里叶变换^[5,14]:

$$\tilde{U}(p, q, z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, y, z_0) \times \exp\{ik[p x + q y]\} dx dy, \quad (3)$$

将 (1) 式代入 (3) 式得到

$$\begin{aligned} \tilde{U}(p, q, z_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(x, y, z_0) \\ &\times \exp\{ik[S(x, y, z_0) - p x - q y]\} dx dy. \end{aligned} \quad (4)$$

设 $L(x, y, z) = S(x, y, z) - p x - q y$. 由于在几何光学近似下有 $k \rightarrow \infty$, 因此我们可以使用稳相近似法 (stationary phase approximation)^[15] 简化 (4) 式积分的计算. (4) 式中的积分只有在相位驻点附近才显著不为零. 设驻点的坐标为 (x_0, y_0, z_0) , 驻点满足 $\partial L / \partial x = \partial L / \partial y = 0$, 得到 $\partial S(x, y, z) / \partial x|_{x=x_0} = p$ 以及 $\partial S(x, y, z) / \partial y|_{y=y_0} = q$. 根据局部空间频率的定义, $(p/\lambda, q/\lambda)$ 为驻点 (x_0, y_0, z_0) 处的局部空间频率. 以几何光学的角度, 单位向量 $\mathbf{v}(p, q) = (p, q, \sqrt{1-p^2-q^2})$ 可作为驻点处发出的光线方向.

将函数 $L(x, y, z)$ 在驻点附近用泰勒展开, 忽略包含三次项以上高次项得到

$$\begin{aligned} L(x_0, y_0, z_0) &\approx S(x_0, y_0, z_0) - p x_0 - q y_0 + \left[\frac{\partial^2 S(x-x_0)^2}{\partial x^2} \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} (x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 S(y-y_0)^2}{\partial y^2} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

将 (5) 式代入 (4) 式提出常数项, 得到 (4) 式的近似表达为

$$\begin{aligned} \tilde{U}(p, q, z_0) &\approx A(x_0, y_0, z_0) \exp\{ik[S(x_0, y_0, z_0) - p x_0 - q y_0]\} \\ &\times \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \exp\left\{\left[\frac{\partial^2 S(x-x_0)^2}{\partial x^2} \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \frac{(y-y_0)^2}{2} + \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} (x-x_0)(y-y_0)\right]\right\} dx dy. \end{aligned} \quad (6)$$

由于 (6) 式中的被积函数是仅关于变量 x 与 y 的函数, 且不存在变量 p 与 q , 故该积分结果与 $A(x_0, y_0, z_0)$ 的乘积可以共同表示为关于驻点 x_0 与 y_0 坐标的函数 $B(x_0, y_0, z_0)$. (6) 式可进一步简化表示为

$$\tilde{U}(p, q, z_0) \approx B(x_0, y_0, z_0) \exp[ik\Psi(p, q)], \quad (7)$$

其中

$$\Psi(p, q) = S(x_0, y_0, z_0) - p x_0 - q y_0. \quad (8)$$

由于驻点 $\mathbf{r} = (x_0, y_0, z_0)$ 处满足 $\partial S(x, y, z) / \partial x|_{x=x_0} = p$ 和 $\partial S(x, y, z) / \partial y|_{y=y_0} = q$, 根据 (2) 式, 可将 $\mathbf{v}(p, q)$ 视为从驻点发出的光线方向. 反之若某根光线的方向已知, 可以根据 (8) 式找到该光线对应驻点的位置坐标. 根据 (7) 和 (8) 式可得, 若光波场的傅里叶角谱可以写为 $\tilde{U}(p, q, z_0) = B(p, q, z_0) \exp[ik\Psi(p, q, z_0)]$ 的形式, 其中 $B(p, q, z_0)$ 与 $\Psi(p, q, z_0)$ 均为实函数, 则沿方向 $\mathbf{v}(p_0, q_0)$ 传播的光线必定经过点

$$\mathbf{r} = \left(\left. \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right|_{p=p_0}, \left. \frac{\partial \Psi}{\partial q} \right|_{q=q_0}, z_0 \right). \quad (9)$$

同理, 若某一维光波场的角谱可以写为 $\tilde{U}(p, z_0) = B(p, z_0) \exp[ik\Psi(p, z_0)]$ 的形式, 则沿方向 $\mathbf{v}(p_0)$ 传播的光线必定经过点

$$\mathbf{r} = \left(\left. \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right|_{p=p_0}, z_0 \right). \quad (10)$$

以几何光学的角度分析, 此时函数 B 为该方向传输的光线在傅里叶角谱域的权重函数. 接下来将以 Airy 光束与 Cusp 光束为例, 展示利用傅里叶角谱构建光束的光线模型, 并以此模型描述光束的传输性质.

4 使用傅里叶角谱构建光波场的光线模型

一些特殊的光束在空间位置域并不具有如 (1) 式的复振幅分布, 例如 (2 + 1)D Airy 光束, 此

时根据相位梯度关系对该类光束建立光线模型是非常困难的. 然而有些特殊光束, 例如 Airy 光束等, 具有如 (7) 式的傅里叶角谱分布. 因此可以利用该方法从傅里叶角谱中得到这类光束的光线模型.

4.1 Airy 光束的光线模型

(2 + 1)D Airy 光束具有如 (7) 式形式的傅里叶角谱^[16], 我们能从其傅里叶角谱中获得光束的光线模型. 有限能量 (2 + 1)D Airy 光束的傅里叶角谱为^[16]

$$\begin{aligned} \tilde{U}(p, q, z) = & \exp\left[\frac{1}{3}(a - ik\alpha p)^3\right] \exp\left[\frac{1}{3}(b - ik\beta q)^3\right] \\ & \times \exp\left[-\frac{ikz}{2}(p^2 + q^2)\right] \exp(ikz), \end{aligned} \quad (11)$$

其中参数 a 与 b 分别为 x 方向与 y 方向的振幅衰减因子, α 与 β 分别为 x 方向与 y 方向的缩放因子. (11) 式中采用菲涅耳衍射的角谱传递函数表征了 Airy 光束轴向传输 z 距离后的傅里叶角谱^[14]. 其光斑主瓣沿抛物线 $[z^2/(4k^2x_0^3), z^2/(4k^2y_0^3), z]$ 自加速传输. 根据 (9) 式得到沿方向 $\mathbf{v}(p, q)$ 传输的光

线必经过点 (ξ, η, z) , 其中 ξ 与 η 分别为

$$\begin{aligned} \xi = & -\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial p} \arg \left[\tilde{U}(p, q, z) \right] \\ = & -k^2 \alpha^2 p^2 + zp + a^2 \alpha, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \eta = & -\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial q} \arg \left[\tilde{U}(p, q, z) \right] \\ = & -k^2 \beta^2 q^2 + zq + b^2 \beta. \end{aligned} \quad (13)$$

根据 (12) 和 (13) 式可得, 对应于一组参数 (ξ, η, z) , 可分别解得两对不同值的参数 p 以及参数 q . 这两对参数可两两组合得到四组方向 $\mathbf{v}(p, q)$. 因此对于 Airy 光束内每一位置而言, 有四根光线同时经过该点. 为了展示 Airy 光束的光线模型, 将光线的单位向量投影到 xoy 面, 并展示了传输不同距离后 (不同横截面) 的 Airy 光束的光线模型.

图 2 展示了不同横截面处 Airy 光束的光线分布. 模拟中选取 $\lambda = 0.532 \mu\text{m}$, $a = b = 0.1$, $\alpha = \beta = 2$. 图中红色箭头为光线的单位向量在 xoy 面上的投影向量, 灰色点为光线所经过的点. 对于 Airy 光束, 有 4 条光线同时从同一点出发. 当 $z = -180 \mu\text{m}$ 时, 如图 2(a) 所示, 光线方向的合方向偏

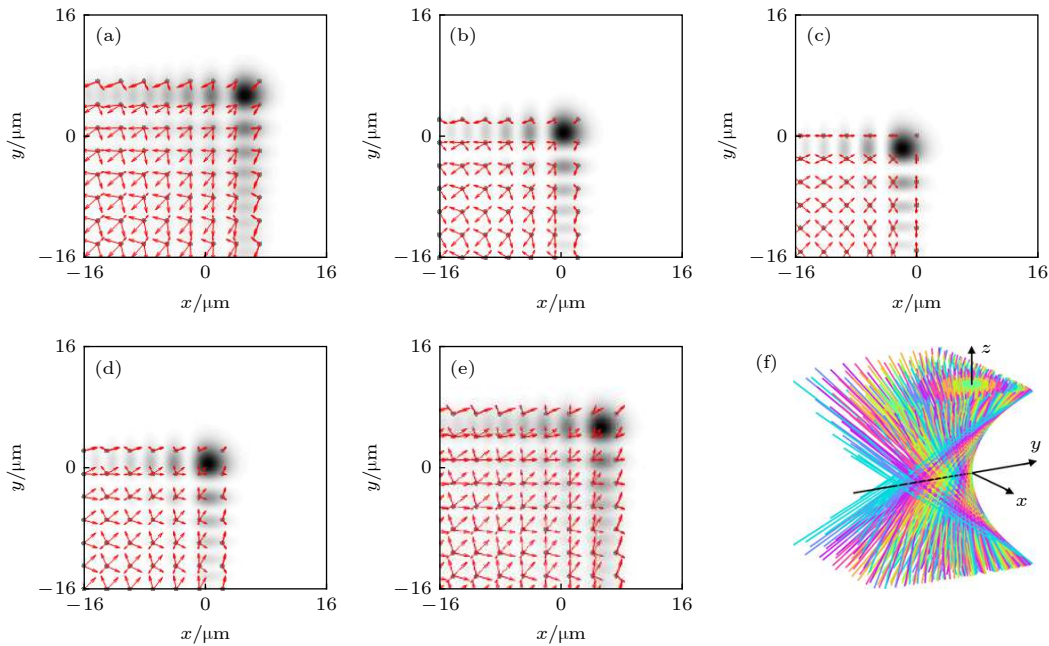


图 2 不同横截面处 Airy 光束的光线分布, 其中 (a) $z = -180 \mu\text{m}$, (b) $z = -100 \mu\text{m}$, (c) $z = 0 \mu\text{m}$, (d) $z = 100 \mu\text{m}$, (e) $z = 180 \mu\text{m}$; 背景色为归一化的光强分布; 灰色点为光线起点, 红色箭头为光线在 xoy 面投影矢量, 长度正比于光线的夹角大小; (f) Airy 光束的光线模型; 不同颜色用以区分不同位置的光线

Fig. 2. Ray model of Airy beam at (a) $z = -180 \mu\text{m}$, (b) $z = -100 \mu\text{m}$, (c) $z = 0 \mu\text{m}$, (d) $z = 100 \mu\text{m}$, and (e) $z = 180 \mu\text{m}$. Backgrounds is the normalized intensity distribution. The transverse directions of rays are represented by red arrows, the length of arrow is proportional to the sine of the angle between the ray and the z axis. (f) Ray model of Airy beam. Different colors are used to distinguish the rays at different positions.

向第三象限, 代表光波场传输的运动趋势. 随着光束传输到 $z = -100 \mu\text{m}$ 处, 如图 2(b) 所示, 光线的合方向依然偏向第三象限. 可见光波场的光斑分布相对于图 2(a) 沿着第三象限对角线发生了平移. 此时光线长度减小, 表明光波场平移的速度正在减慢. 当光束传输到 $z = 0 \mu\text{m}$ 处, 如图 2(c) 所示, 经过每一点的光线方向均匀指向四周, 因此光线的合方向并不具有明显的偏向性. 根据图 2(a)—(c) 可知, Airy 光束在 $z < 0$ 时向第三象限对角线方向自加速传输. 当光束传输到 $z > 0$ 处, 如图 2(d) 所示光线的合方向偏向于第一象限, 此时 Airy 光束沿第一象限对角线方向自加速传输. 随着传输距离的增大, 光线在 xoy 面投影的长度增加表明 Airy 光束光斑平移的速度逐渐增大. 图 2(f) 展示了 Airy 光束的光线模型. 光线与抛物面焦散面相切使得光束具有自加速特性.

4.2 Cusp 光束的光线模型

除 (2 + 1)D Airy 光束以外, Cusp 光束也具有有如 (7) 式的傅里叶角谱^[17,18]:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(p, q, z) = & \exp\left[-\frac{k^2(p^2 + q^2)}{w_0^2}\right] \\ & \times \exp\left[ik^3 w_0^3(p^3 + q^3 - 3p^2q - 3pq^2)\right] \\ & \times \exp\left[-\frac{ikz}{2}(p^2 + q^2)\right] \exp(ikz), \end{aligned} \quad (14)$$

其中 w_0 为任意正实数. 令 $p = \rho \cos \varphi$ 和 $q = \rho \sin \varphi$, 根据 (9) 式得到沿方向 $\mathbf{v}(p, q)$ 传输的光线必经过点 (ξ, η, z) , 其中 ξ 与 η 分别为

$$\begin{aligned} \xi = & -\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial p} \arg[\tilde{U}(p, q, z)] \\ = & -3k^2 w_0^3 \rho^2 [\cos(2\varphi) - \sin(2\varphi)] + pz, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \eta = & -\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial q} \arg[\tilde{U}(p, q, z)] \\ = & 3k^2 w_0^3 \rho^2 [\cos(2\varphi) + \sin(2\varphi)] + qz. \end{aligned} \quad (16)$$

图 3 展示了不同横截面处 Cusp 光束的光线分布, 模拟中选取 $w_0 = 1.2$. 当 $z = -180 \mu\text{m}$ 时, 如图 3(a) 所示, 此时 Cusp 拥有近似为三角形的光斑分布. 光线分布基本与光斑分布重合, 其光线起点的包络同样近似为三角形. 光线指向光束中心位置, 表明该光斑尺寸随着传播有缩小趋势. 随着光

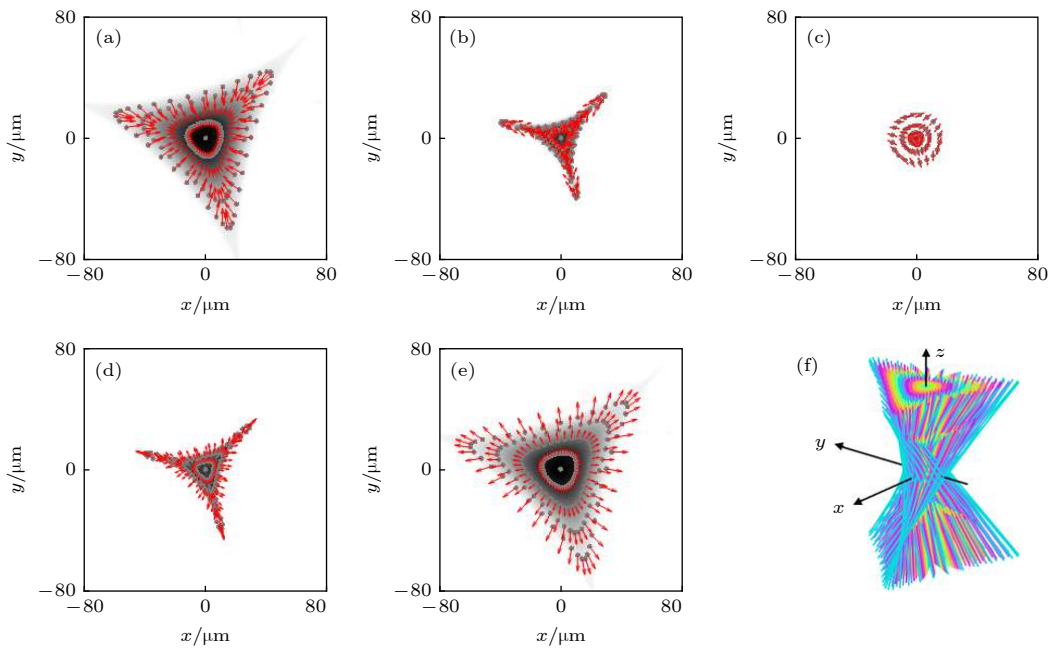


图 3 不同横截面处 Cusp 光束的光线分布, 其中 (a) $z = -180 \mu\text{m}$, (b) $z = -100 \mu\text{m}$, (c) $z = 0 \mu\text{m}$, (d) $z = 100 \mu\text{m}$, (e) $z = 180 \mu\text{m}$; 背景色为归一化的光强分布; 灰色点为光线起点, 红色箭头为光线在 xoy 面投影矢量, 长度正比于光线与 z 轴的夹角大小; (f) Cusp 光束的光线模型; 不同的颜色用以区分不同位置的光线

Fig. 3. Ray model of Cusp beam at (a) $z = -180 \mu\text{m}$, (b) $z = -100 \mu\text{m}$, (c) $z = 0 \mu\text{m}$, (d) $z = 100 \mu\text{m}$, and (e) $z = 180 \mu\text{m}$. Backgrounds is the normalized intensity distribution. The transverse directions of rays are represented by red arrows, the length of arrow is proportional to the sine of the angle between the ray and the z axis. (f) Ray model of Cusp beam. Different colors are used to distinguish the rays at different positions.

束传输到 $z = -100 \mu\text{m}$ 处, 如图 3(b) 所示, Cusp 光束的光斑尺寸缩小, 光线分布更加密集, 光线起点的包络依然保持近似三角形的结构. 光线依然指向光束中心位置, 表明光斑尺寸会进一步缩小. 注意到图 3(b) 中的箭头长度相较于图 3(a) 的箭头长度短, 表明光斑缩小的速度正在减慢. 如图 2(c) 所示, 当光束传输到 $z = 0 \mu\text{m}$ 处, 光线位置均匀分布在同心圆上. 根据图 3(a)—(c) 可知, Cusp 光束在 $z < 0$ 时, 其光斑分布会随着光束传输逐渐会聚. 当光束传输到 $z > 0$ 处, 如图 3(d) 所示, 此时 $z = 100 \mu\text{m}$. 虽然光斑分布与图 3(b) 类似, 但是其光线方向指向光束外部, 表明光束正在发散. 随着传输距离的增大, 箭头长度增加, 光线发散程度越强. 同时 Cusp 光束的光斑尺寸也在增大. 图 3(f) 展示了 Cusp 光束的光线模型. 光线倾斜相互交错, 在束腰附近的包络线为圆形. 随着光束的传输, 光线的包络线逐渐变为近似三角形, 使得光束的光斑呈现自加速特性.

根据以上两个例子可知, 从傅里叶角谱的相位分布推导所得光束的光线模型, 同样能正确描述光波场在空间的演化趋势. 因此对于已知的某个光线模型, 其不仅具备光波场在空间位置域的相位信息, 同时也具备光波场在空间频率域的相位信息.

5 使用光线计算聚焦面处的复振幅分布

平面波正入射聚焦透镜所产生的焦点光场是基础的聚焦光场问题. 本节展示使用光线的方法计算平面波正入射聚焦透镜后的焦面光场分布. 其核心思路为根据光线模型 (9) 式构建出焦面的傅里叶频谱, 然后运用傅里叶逆变换得到焦面的实空间光场分布.

如图 4(a) 所示, 以焦点为原点, 焦面为 xoy 平面, 建立如图所示的三维笛卡尔坐标系. 物镜后瞳的数值孔径为 NA , 物镜满足正弦条件. 设从焦点 $(0, 0)$ 发出的光线方向为 $\mathbf{v}(p, q)$, 由于物镜后瞳尺寸限制, 则光线横向分量 p 与 q 满足 $p^2 + q^2 < NA^2$. 设在光波场焦面处的傅里叶角谱为

$$\tilde{U}(p, q, 0) = \begin{cases} 0, & p^2 + q^2 > NA^2, \\ B(p, q, 0) \exp[ik\Psi(p, q)], & p^2 + q^2 \leq NA^2. \end{cases} \quad (17)$$

根据 (9) 式, 在理想聚焦的情形下, 所有光线都通

过焦点 $(0, 0)$, 可得 $\partial\Psi/\partial p = \partial\Psi/\partial q = 0$. 因此函数 $\Psi(p, q) = C_0$, 其中 C_0 为任意常数, 不妨令 $C_0 = 0$. 函数 $B(p, q, 0)$ 为光线的权重函数, 由于平面波入射透镜, 每根光线具有相同的权重, 因此函数 $B(p, q, 0)$ 为大于零的常数, 不妨令 $B(p, q, 0) = 1$. 我们便可利用光线得到了光场在焦面的傅里叶角谱分布为

$$\tilde{U}(p, q, 0) = \begin{cases} 0, & p^2 + q^2 > NA^2, \\ 1, & p^2 + q^2 \leq NA^2. \end{cases} \quad (18)$$

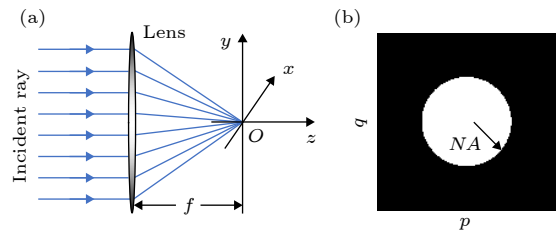


图 4 光锥模型及其焦面的傅里叶角谱 (a) 经过物镜聚焦后的平行光的光线追踪示意图; (b) 使用光线重构得到的焦面上光场的傅里叶角谱

Fig. 4. Ray-cone and its Fourier angular spectrum: (a) Ray tracing model of convergent parallel rays; (b) reconstructed Fourier angular spectrum according to the ray model.

图 4(b) 展示了使用几何光学得到的光场在焦面处的傅里叶角谱分布, 可见焦面处的傅里叶角谱均匀分布在一个半径等于 NA 的圆形区域内. 由于 (18) 式的傅里叶角谱是圆对称的, 因此可以使用贝塞尔变换计算得到焦面上光波场的复振幅分布, 该复振幅为贝塞尔函数的形式 [6,14]. 最终傅里叶逆变换结果与 Debye 方法得到的积分结果一致 [6].

6 光束的高维光线模型

由于光线能够同时反映光波场的位置与频率信息, 因此“真正”的光线模型存在于更高的维度. 例如对于分布在 $z = z_0$ 平面上的二维光波场 $U(x, y, z_0)$, 其光线信息应当为六维函数 $g(I, x, y, z, p, q)$ [4], 其中 I 为光线携带的能量. 若忽略光线包含的能量信息, 纯光线信息至少为五维函数 $g(x, y, z, p, q)$, 同时包含了光线位置与光线方向. 若假设光场沿着 z 轴传输, 则随着光波的传输, 光线不仅在空间域 (xy 坐标) 演化, 还在频率域 (pq 坐标) 中演化. 在已知 $z = z_0$ 平面上的二维光波场, 当光线的空间坐标 x 和 y 确定后, 其光线方向

p 和 q 可以通过 (2) 式确定. 反之, 当光线方向 p 和 q 确定后, 其光线位置 x 和 y 可以通过 (9) 式确定. 此外, 光线位置与光线方向也可通过解光线方程获得.

对于分布在 $z = z_0$ 上的一维光波场 $U(x, z_0)$, 纯光线信息为三维函数 $g(x, z, p)$. 因此, 相对于光波场分布, 光线处于更高的维度. 值得一提的是, 在折射率不变的介质中光线方向不随传输发生变化, 因此均匀介质的频率域光线模型均为相互平行的平行线. 实际上, 在以往的几何光学中, 我们对光线模型的认知其实是高维光线模型 $g(x, y, z, p, q)$ 在空间域 (即 xyz 空间) 内的投影, 由于投影丢弃了光线在空间频率域的信息, 因此会产生几何光学失效的问题^[19].

为了使用图形展示光线的高维信息, 考虑在 xoz 面内的二维光波场, 此时的光线为三维函数 $g(x, z, p)$. 图 5(a) 展示了图 1 中聚焦光线的高维光线模型, 该光线模型分布在 (x, z, p) 三维空间内. 该光线模型在 xoz 面的投影如图 5(b) 所示, 该投影模型即是图 1(b) 中展示的光线光锥模型. 由于投影丢失了一些光线在空间频率域, 使得这些光线“看上去”在焦点相交. 而如图 5(c) 所示, 光线模型在 poz 内的投影是平行的直线, 并不存在焦点. 因此, 尽管 xoz 内无法正确使用光线构建光波场分布, 我们依然能够在 poz 内利用光线构建出光波场分布. 故在解决焦点, 焦散线/面问题时, 人们往往通过光线构建出光波场的傅里叶角谱, 从而进一步

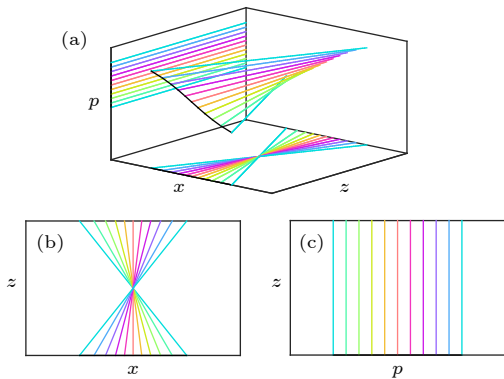


图 5 一维聚焦光束的高维光线模型 (a) 聚焦光束的三维光线模型; (b) 三维光线模型在 xoz 平面内的投影; (c) 三维光线模型在 poz 平面内的投影

Fig. 5. High-dimensional ray model of convergent beam: (a) 3D ray model of convergent beam; (b) projection of 3D ray model in xoz plane; (c) projection of 3D ray model in poz plane.

正确计算出光波场在空间坐标的分布. 需要注意的是图 5(a) 中位于 poz 面内的黑色曲线即是光线的相-空间曲线.

二维 Airy 光束是人们了解与研究 Airy 光束等自加速光束性质的基本对象. 对二维 Airy 光束也可构建其高维光线模型. 二维 Airy 光束的傅里叶角谱为

$$\tilde{U}(p, z) = \exp\left[\frac{1}{3}(a - ik\alpha p)^3\right] \exp\left[-\frac{ikz}{2}p^2\right] \exp(ikz). \quad (19)$$

图 6(a) 展示了二维 Airy 光束构建高维光线模型, 该光线模型在 xoz 面的投影如图 6(b) 所示. 该投影模型即为 Berry 等^[20] 构建的 Airy 波包的世界线模型, 可见光线与抛物线形焦散线相切, 在焦散线附近几何光学失效. 然而如图 6(c) 所示, 由于光束在真空中传输, 光线模型在 poz 内的投影依然是平行的直线, 意味着此时能够通过光线模型正确构建 Airy 光束的傅里叶角谱信息.

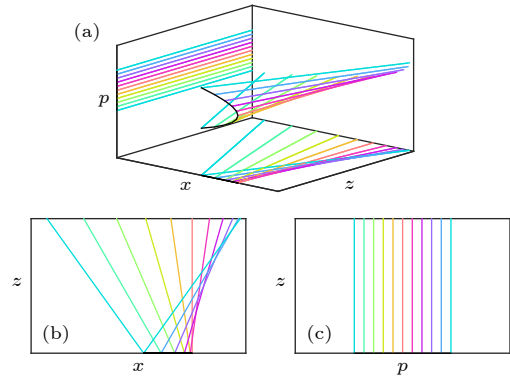


图 6 二维 Airy 光束的高维光线模型 (a) Airy 光束的三维光线模型; (b) 三维光线模型在 xoz 平面内的投影; (c) 三维光线模型在 poz 平面内的投影

Fig. 6. High-dimensional ray model of (1 + 1)D Airy beam: (a) 3D ray model of (1 + 1)D Airy beam; (b) projection of 3D ray model in xoz plane; (c) projection of 3D ray model in poz plane.

在上述两个例子中, 光束均在均匀介质内传输, 因此光线方向不发生改变. 在 poz 平面内, 光线为相互平行的平行线. 而当光束在折射率变化的介质中传输时, 光线方向将会发生变化. 为了展示折射率对高维光线的影响, 以二次梯度折射率波导为例展示在该波导中光线的高维轨迹.

设波导的折射率分布为 $n^2(x) = n_0^2(1 - \alpha^2 x^2)$, 其中 n_0 与 α 为任意非负实数, 该波导的模为厄米-高斯型. 假设入射光场 ($z = 0$) 为一维厄米-高斯光

束, 其初始光线位置 $X(\tau, 0) = X_0 \cos(\tau)$, 光线方向 $P(\tau, 0) = P_0 \sin(\tau)$, 其中 $0 \leq \tau < 2\pi$. 在傍轴近似下解该折射率的光线方程, 可得光线位置 X 与光线方向 P 分别表示为^[21]

$$\begin{aligned} X(\tau, z) &= X_0 \cos\left(\tau - \frac{n_0}{H_0} \alpha z\right), \\ P(\tau, z) &= P_0 \sin\left(\tau - \frac{n_0}{H_0} \alpha z\right), \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} X_0 &= \alpha^{-1} \sqrt{(2m+1)/K}, \\ P_0 &= n_0 \sqrt{(2m+1)/K}, \\ H_0 &= \sqrt{n_0^2 - P^2}, \quad K = kn_0/\alpha, \end{aligned}$$

m 为非负整数. (20) 式即为高维光线模型参数方程. 图 7(a) 展示了该折射率分布下的厄米光束的高维光线模型, 光线在 xpz 坐标系内沿螺旋线轨迹传输. 该光线模型在 xoz 面的投影如图 7(b) 所示, 具有一定的周期性. 光线模型在 poz 面的投影如图 7(c) 所示, 同样具有周期性. 可见, 光波场在折射率变化的波导中具有更为复杂的高维光线结构.

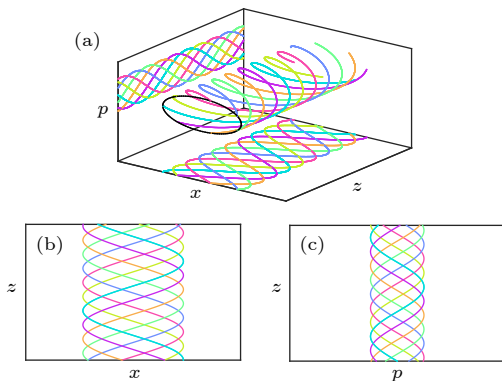


图 7 二维抛物线型波导中的厄米-高斯光束的高维光线模型 (a) 三维光线模型; (b) 三维光线模型在 xoz 平面内的投影; (c) 三维光线模型在 poz 平面内的投影

Fig. 7. High-dimensional ray model of Hermit-Gaussian beam in quadratic gradient-index waveguide: (a) 3D ray model; (b) projection of 3D ray model in xoz plane; (c) projection of 3D ray model in poz plane.

由于焦散线问题不会同时存在于空间域与频率域, 因此当几何光学在空间域遇到焦点或焦散线/面问题时, 可以从频率域着手, 绕开光线在空间位置域的失效, 构建出光波场的傅里叶角谱表达式, 进而使用傅里叶逆变换正确表征出这些位置的光波场分布.

7 结 论

本文基于光波场在实空间的表达形式, 运用傅里叶变换以及稳相近似法推导得到了光波场的傅里叶角谱相位与光线位置的梯度关系. 理论证明光波场的光线模型同时携带了该光波场在实空间域的振幅与相位信息以及傅里叶角谱域的振幅与相位信息. 实空间域的光波场相位梯度为光线方向, 而傅里叶角谱域角谱的相位梯度为光线位置. 由此, 当光波场的光线信息确定后, 在焦点或焦散线/面以外的区域, 既可以使用光线重构光波场的复振幅, 亦可以从傅里叶角谱空间构造得到光波的傅里叶角谱. 而在焦点或焦散线/面附近, 几何光学在实空间失效. 此时, 可以从傅里叶角谱空间入手, 绕过实空间的失效性, 正确构造得到光场的傅里叶角谱. 利用光线模型重构光波场的傅里叶角谱, 可以有效避免几何光学在焦点或焦散线/面附件失效的问题. 实际上, 光波场的光线模型是一座连接了光波场的实空间与傅里叶频谱域的桥梁, 蕴藏了相较于光波场更高维度的信息. 这些信息为研究光线描述光波场的传输提供了新的思路与方法, 有助于人们更好地理解光线的数学物理内涵, 并运用光线设计与构建结构光束场.

参考文献

- [1] Xiao Z X, An L S 2014 *Engineering Optical Design* (Beijing: Publishing House of Electronics Industry) (in Chinese) pp4-7 (in Chinese) [萧泽新, 安连生 2014 工程光学设计 (北京: 电子工业出版社) 第4—7页]
- [2] Wikipedia contributor, “Ray tracing (graphics)” from Wikipedia—TheFreeEncyclopedia. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Ray_tracing_\(graphics\)&oldid=888247514](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Ray_tracing_(graphics)&oldid=888247514) [2019-5-27]
- [3] Zhang Z, Levoy M 2009 *IEEE International Conference on the Computational Photography* San Francisco, CA, USA April 16-17, 2009 pp1-10
- [4] Zhang C P, Wang Q 2016 *Chin. J. Lasers* **43** 0609004 (in Chinese) [张春萍, 王庆 2016 中国激光 **43** 0609004]
- [5] Goodman J W 1968 *Introduction to Fourier Optics* (New York: McGraw-Hill)
- [6] Born M, Wolf E (translated by Yang X S) 2005 *Principle of Optics* (Beijing: Publishing House of Electronics Industry) p 403 (in Chinese) [玻恩 M, 沃耳夫 E 著 (杨葳葳 译) 2005 光学原理 (北京: 电子工业出版社) 第403页]
- [7] McNamara D A, Pistorius C W I, Malherbe J A G 1990 *Introduction to the Uniform Geometrical Theory of Diffraction* (London: Artech House) pp17-27
- [8] Keller J B 1962 *J. Opt. Soc. Am.* **52** 116
- [9] Kaganovsky Y, Heyman E 2010 *Opt. Express* **18** 8440

- [10] Ma L, Wu F T, Huang Q L 2010 *Acta Opt. Sin.* **30** 2417 (in Chinese) [马亮, 吴逢铁, 黄启禄 2010 光学学报 **30** 2417]
- [11] Alonso M A, Dennis M R 2017 *Optica* **4** 476
- [12] Bouchard F, Harris J, Mand H, Boyd R W, Karimi E 2016 *Optica* **3** 351
- [13] Zuo C, Chen Q, Sun J S, Asundi A 2016 *Chin. J. Lasers* **43** 0609002 (in Chinese) [左超, 陈钱, 孙佳嵩, Asundi A 2016 中国激光 **43** 0609002]
- [14] Lü N G, Jin G P, Su X Y 2016 *Fourier Optics* (Beijing: China Machine Press) p73 (in Chinese) [吕乃光, 金国藩, 苏显渝 2016 傅立叶光学 (北京: 机械工业出版社) 第73页]
- [15] Wolf E 1959 *Proc. R. Soc. Lond. A* **253** 349
- [16] Siviloglou G A, Christodoulides D N 2007 *Opt. Lett.* **32** 979
- [17] Barwick S 2010 *Opt. Lett.* **35** 4118
- [18] Gong L, Liu W W, Ren Y X, Lu Y, Li Y M 2015 *Appl. Phys. Lett.* **107** 231110
- [19] Forbes G W, Alonso M A 1998 *Proc. SPIE* **3482** 22
- [20] Berry M V, Balazs N L 1979 *Am. J. Phys.* **47** 264
- [21] Alonso M A, Forbes G W 2002 *Opt. Express* **10** 728

Light rays in Fourier domain*

Zhang Shu-He Shao Meng Zhang Sheng-Zhao Zhou Jin-Hua[†]

(Department of Biomedical Engineering, Anhui Medical University, Hefei 230032, China)

(Received 29 May 2019; revised manuscript received 9 August 2019)

Abstract

Establishing a universal model to characterize the relationship between light rays and optical waves is of great significance in optics. The ray model provides us with an intuitive way to study the propagation of beams as well as their interaction between objects. Traditional ray model is based on the normal of a beam wave front. The normal vector is defined as the direction of ray. However, it fails to describe the relationship between light ray and optical wave in the neighborhood of focus or caustic lines/surface since light ray in those regions are no longer perpendicular to the wavefront. In this work, the ray model of a light beam is built according to its Fourier angular spectrum, where the positions of rays can be determined by the gradient of the phase of the Fourier angular spectrum. On the other hand, the Fourier angular spectrum of a light beam can be reconstructed through the ray model. Using Fourier angular spectra, we construct the ray model of two typical beams including the Airy beam and the Cusp beam. It is hard to construct ray model directly from the optical field of these beams. In this ray model, the information about ray including direction and position involves the propagation properties of light beams such as self-accelerating. In addition, we demonstrate that the optical field of the focused plane wave can be reconstructed by the ray model in Fourier regime, and the optical field in spatial domain can be obtained by inverse Fourier transform. Simulation results are consistent with the results from Debye's method. Finally, the high-dimensional ray model of light beams is elaborated in both spatial and spectral regime. Combined with focused plane wave, Airy beam and rays in quadratic gradient-index waveguide, our results show that the ray model actually carries the information about optical field in both spatial and Fourier domain. Actually, the traditional ray model is just a spatial projection of the high-dimensional ray model. Hence, when traditional ray model fails at the focus or caustic lines/surface, it is able to obtain the spectrum of the corresponding optical field from the Fourier domain, and then obtain the field distribution in spatial domain by inverse Fourier transform.

Keywords: geometrical optics, light ray, high dimension light ray, Fourier angular spectrum

PACS: 42.15.-i, 42.30.Kq, 42.60.Jf

DOI: 10.7498/aps.68.20190839

* Project supported by the Natural Science Foundation of Anhui Province, China (Grant No. 1908085MA14), the Scientific Research Foundation of the Institute for Translational Medicine of Anhui Province, China (Grant No. 2017zhyx25), the Scientific Research of BSKY from Anhui Medical University, China (Grant No. XJ201812), and the Scientific Research of XKJ from Anhui Medical University, China (Grant No. 2018XKJ013).

[†] Corresponding author. E-mail: zhoujinhua@ahmu.edu.cn