薄膜与 Helmholtz 腔耦合结构低频带隙*

陈鑫 姚宏 赵静波† 张帅 贺子厚 蒋娟娜

(空军工程大学基础部, 西安 710051)

(2019 年 5 月 5 日收到; 2019 年 6 月 24 日收到修改稿)

设计了一种含薄膜壁的 Helmholtz 型声子晶体, 该结构利用了空气和薄膜的耦合振动, 一方面将刚性壁转变为柔性壁, 降低了一阶振动时的等效刚度, 使第一带隙下限分别低于同参数下的普通 Helmholtz 型声子晶体和薄膜, 另一方面基于局域共振原理, 由于薄膜的出现和腔口空气通道长度的增加, 使得结构在低频范围内存在多个振动模态, 从而将原有一个带隙扩展为多个带隙. 将该结构带隙上下限分别等效为环形系统和串联系统, 用传递矩阵法和有限元法两种方法计算了其低频带隙范围, 两种方法结果吻合良好. 通过调整参数对带隙调控规律进行了进一步分析, 结果显示, 在低频范围内, 既可以通过改变与腔口空气通道或薄膜相关的参数, 在保证其中某些带隙变化不大的情况下, 单独调整其他带隙; 也可以通过调整内外腔体积, 对所有带隙进行调控.

关键词: Helmholtz 共振腔, 低频带隙, 噪声控制, 声子晶体

PACS: 42.70.Qs, 43.50.+y, 46.40.Ff **DOI:** 10.7498/aps.68.20190673

1 引言

自声子晶体提出以来[1], 其一直是声学领域国内外学者研究重点之一[2–7], 另一方面, Helmholtz 共振腔这种声学器件在声学超材料中有着广泛的应用[8–12]. 近年来, 利用 Helmholtz 共振原理构建的声子晶体及超材料已逐渐由简单叠加结构[13,14]逐渐发展为长开口[15]、多腔[16]、多开口[17,18]、嵌套[19]、多层复合[20]等结构.

由于空气密度的限制, 仅利用空气的振动往往无法进一步提升声子晶体的性能, 与此同时, 薄膜作为一种轻质材料, 其在低频方面也具有较好的隔声性能[21–23]. 能否利用两种结构的耦合, 构建出低频隔声性能更好的声子晶体, 就成为值得探讨的问题. 实际上, 近年来已有关于含薄膜的 Helmholtz 腔仿真研究[24,25], 腔体与薄膜耦合[26–28]以及薄膜与穿孔板-腔耦合[29]等结构的研究出现. 但薄膜与 Helmholtz 腔耦合结构的理论计算与声子晶体带隙研究仍较少.

本文在之前 Helmholtz 腔与固/固型声子晶体的耦合研究[30]基础上, 设计了一种含薄膜壁的 Helmholtz 型声子晶体, 对其带隙机理进行了详细分析, 用传递矩阵法 (transfer matrix method, TMM) 和有限单元法 (finite element method, FEM) 计算了其低频带隙上下限. 该结构第一带隙下限分别低于同参数下的普通 Helmholtz 型声子晶体和薄膜, 且质量小于同尺寸传统 Helmholtz 型声子晶体, 进一步提高了 Helmholtz 腔在小尺寸、轻结构下控制大波长的能力, 提高了其在工程上的应用价值.

2 结构设计及其带隙特性

带薄膜壁的 Helmholtz 结构横截面如图 1 所示, 其晶格常数为 a, 腔体框架边长为 l, 腔壁厚度

* 国家自然科学基金 (批准号: 11504429) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: chjzjb@163.com

为 b, 在腔右侧由悬臂梁形成“W”型开口, 其空气通道总长度为 $l_1 = n \times (l - b) + b$, 宽度为 s, 其中 n 为悬臂梁的个数. 将腔体左侧壁更换为厚度为 b_r 的硅橡胶薄膜, 并在其上黏附有长 h_s、厚 b_s 的铝制质量块, 薄膜受到 y 方向张力 T 的作用. 因框架材料一般为金属, 其声阻抗一般在空气的 10^5 倍以上, 薄膜材料的 10^3 倍以上, 对带隙的影响较小, 故将其设定为固定约束状态.

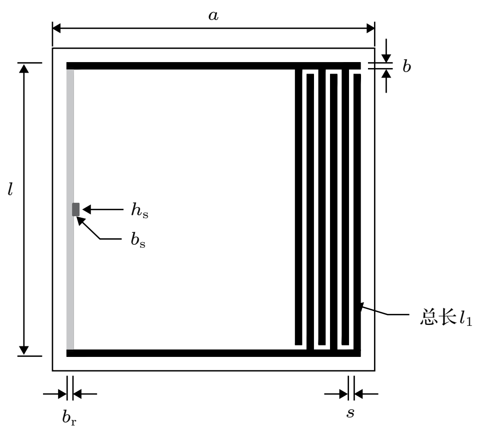

图 1 带薄膜壁的 Helmholtz 结构横截面

Fig. 1. Cross section of Helmholtz resonator structure with a membrane wall.

取 $a = 53$ mm, $l = 50$ mm, $b = 1$ mm, $n = 2$ ($l_1 = 99$ mm), $s = 1$ mm, $b_r = 1$ mm, $h_s = 5$ mm, $b_s = 1$ mm, $T = 1 \times 10^6$ N/m^2, 先将其按照第一布里渊区进行扫描, 再将其沿纵向对 3 个元胞结构进行串联, 分别计算得出其在 1700 Hz 以下的结构能带图和隔声量曲线如图 2 所示. 从图 2 可以看出, 其在 1700 Hz 以下存在 3 个完全带隙 (灰色区域), 分别为 88.40—119.06 Hz, 302.09—533.03 Hz 和 772.31—891.44 Hz (各带隙起止点已在图中标出), 与此同时出现了多个平直带; 其对应隔声量曲线分别在各带隙下限处出现了 40 dB 以上的隔声峰. 若将薄膜也设定为固定约束状态, 则该结构变为普通二维 Helmholtz 结构, 用同样的方法计算得出的结构能带图和隔声量曲线如图 3 所示, 其在 1700 Hz 以下范围只存在 1 个完全带隙 (116.60—318.34 Hz), 最大隔声峰为 36 dB. 同时, 通过 FEM 计算得出其在相同条件下的薄膜基频为 240.59 Hz.

通过以上分析可以发现, 将 Helmholtz 型声子晶体的一个刚性壁换为带分布质量的张紧膜后, 其低频隔声性能得到了提升. 具体表现为: 第一带隙下限得到进一步降低, 且同时低于同条件下的普通 Helmholtz 结构和薄膜结构; 出现了新的隔声峰, 且高度高于原有结构; 虽然第一带隙的宽度减小, 但在低频范围内出现了新的带隙, 使得总带隙宽度得到提升.

3 带隙机理及等效模型

为研究薄膜与 Helmholtz 腔的耦合作用, 取该结构前 3 个带隙起止点处声压场和薄膜振型进行分析, 如图 4 所示, 其中纯灰色部分为薄膜振型 (位移经放大), 右侧图例为声压场数值, 单位为 Pa.

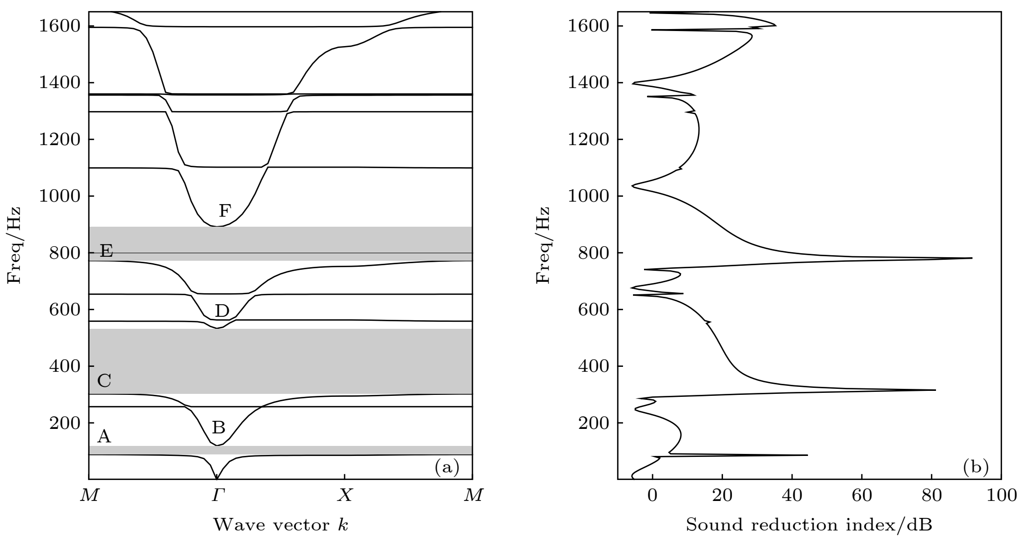

图 2 带薄膜壁的 Helmholtz 结构 (a) 带隙图; (b) 隔声曲线

Fig. 2. Band diagram (a) and transmission spectrum (b) of the Helmholtz resonator structure with a membrane wall.

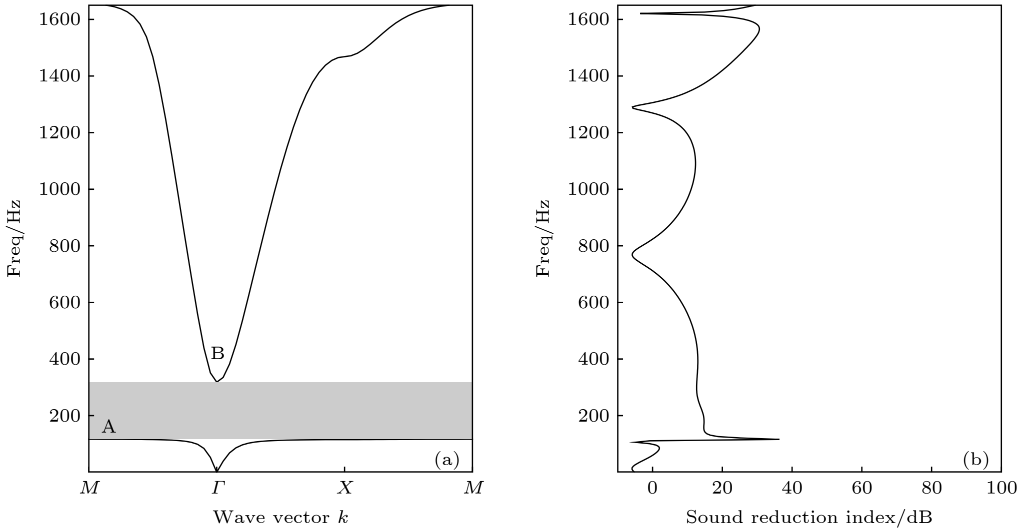

图 3 普通 Helmholtz 结构的 (a) 带隙图和 (b) 隔声曲线

Fig. 3. Band diagram (a) and transmission spectrum (b) of the ordinary Helmholtz resonator structure.

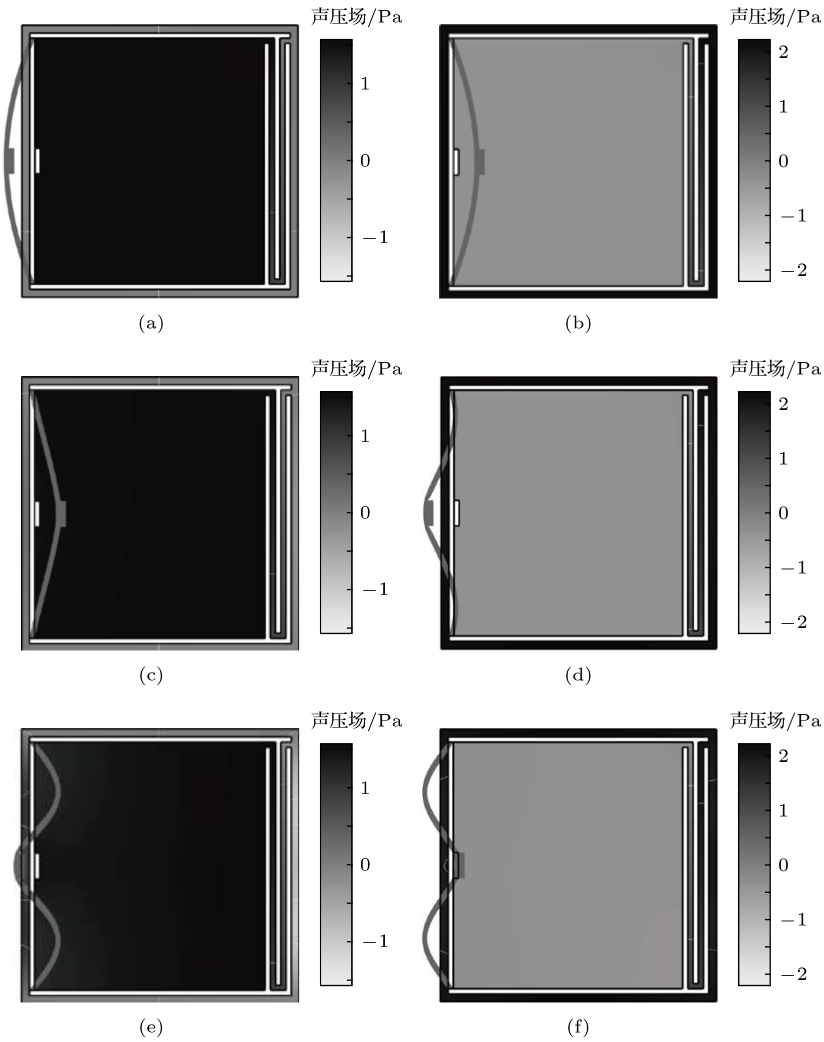

图 4 (a) 模态 A (88.40 Hz)、(b) 模态 B (119.06 Hz)、(c) 模态 C (302.09 Hz)、(d) 模态 D (533.03 Hz)、(e) 模态 E (772.31 Hz)、(f) 模态 F (891.44 Hz) 的薄膜振型和声场压力图

Fig. 4. Vibration mode of the membrane and sound pressure distribution diagrams of point A (88.40 Hz) (a), B (119.06 Hz) (b), C (302.09 Hz) (c), D (533.03 Hz) (d), E (772.31 Hz) (e), and F (891.44 Hz) (f).

从图 4 可以看出, 在模态 A, C, E 处, 结构声压场变化规律完全相同, 均为内腔声压最大, 并通过腔口空气通道逐渐过渡到外腔. 外腔左右两部分声压呈反对称分布, 其中薄膜侧为正, 腔口侧为负, 且这种差异随着带隙阶数的增大而增强, 但外腔声压和均为零. 此时声波被完全局域在内腔中, 振动与外腔无关, 与其对应于带隙下限相匹配. 而在模态 B, D, F 处, 结构声压场分布与前述相反, 内腔声压最小, 且为负值, 通过腔口空气通道过渡至外腔, 外腔声压最大. 此时振动与内腔外腔都有关, 声波可以在腔外传播, 对应于带隙上限.

由于膜的振动是各阶主振型叠加的结果, 通过振型图仅能推断某阶主振型占主要地位, 在后续分析中, 将占主要地位的某阶主振型称为其某阶振动. 从振型图可以看出, 随着频率的升高, 薄膜振动逐渐由低阶转向高阶, 但在带隙上下限处均没有发现反对称振型 (该种振动模态下薄膜上下位移呈反对称分布, 平均位移为零) 的参与.

对于出现多个平直带的原因, 与之前研究得出的结论相同[30], 是由薄膜的反对称振型造成的, 这里不再进行讨论.

另外, 对于模态 A, 可以看出膜与腔口空气做同向振动, 这样实际上减小了内腔空气弹簧刚度, 导致第一带隙下限下降; 与此类似, 模态 B 中内腔空气弹簧刚度增大, 外腔减小, 但由于两者体积变化比例不同, 其总体刚度是减小的, 导致其第一带隙上限也会下降.

经过以上分析可看出, 对于该结构在 1700 Hz 以下产生的多个带隙, 其不同带隙上限或下限处声压场分布规律均是相同的, 只是薄膜振动模态不同, 但各带隙上限和下限的声压场分布规律不同.

在此对上下限分别构建等效系统, 如图 5 所示, 其中 X_1 表示薄膜平均位移; X_2 表示腔口通道内空气质心位移; N_1 和 N_2 分别为内腔、外腔对薄膜的总压力, 采用 TMM 与连续体振动相结合的方法进行计算.

将腔口通道内空气视为均质弹性杆, 其传递矩阵[31] 为

$$\boldsymbol{U}_1=\begin{bmatrix}\cos\dfrac{\omega}{c}l_1 & \dfrac{-\sin\dfrac{\omega}{c}l_1}{\omega c\rho_{\rm a}s}\\ \omega c\rho_{\rm a}s\sin\dfrac{\omega}{c}l_1 & \cos\dfrac{\omega}{c}l_1\end{bmatrix},\tag{1}$$

其中 $m_1=s\rho_{\rm a}l_1$, $\rho_{\rm a}$ 为空气密度, c 为在空气中的声速, ω 为角频率. 设内外腔内空气在振动过程中压强均匀, 则内腔空气传递矩阵为

$$\boldsymbol{U}_2=\begin{bmatrix}\dfrac{l_{\rm r}}{s} & -\dfrac{V_2}{\rho_{\rm a}c^2sl_{\rm r}}\\ 0 & \dfrac{s}{l_{\rm r}}\end{bmatrix},\tag{2}$$

外腔空气的传递矩阵为

$$\boldsymbol{U}_4=\begin{bmatrix}\dfrac{s}{l_{\rm r}} & -\dfrac{V_4}{\rho_{\rm a}c^2sl_{\rm r}}\\ 0 & \dfrac{l_{\rm r}}{s}\end{bmatrix},\tag{3}$$

其中 V_2, V_4 分别表示内腔和外腔体积; $l_{\rm r}=l-2b$, 为薄膜的长度.

对于薄膜的纵向振动, 采用 Rayleigh-Ritz 法[32] 求解, 同时考虑张力和弹性模量的影响, 其强迫振动方程为

$$E_{\rm r}J_{\rm r}\frac{\partial^4y}{\partial x^4}+T\frac{\partial^2y}{\partial x^2}+\rho_{\rm r}b_{\rm r}\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=p(x,t),\tag{4}$$

其中 $E_{\rm r}$ 和 $\rho_{\rm r}$ 分别表示硅橡胶弹性模量和密度; $J_{\rm r}$ 为截面对中性轴的惯性矩; p 为薄膜收到的外力.

取基础函数为 $\varphi_i=1-\cos(2\pi nx/l_{\rm r})$, 这种取法计算简便, 但舍弃了反共振振型, 故不能计算出平直带的振动频率. 考虑薄膜上质量块的分布作用, 此时其等效刚度矩阵和等效质量矩阵中各元素为

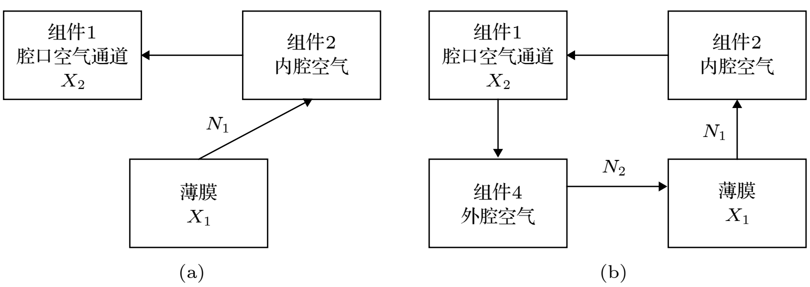

图 5 (a) 带隙下限系统示意图; (b) 带隙上限系统示意图
Fig. 5. (a) System corresponding to starting frequency of band gaps; (b) system corresponding to cut-off frequency of band gaps.

$$
\begin{aligned}
K_{ij} &= E_{\rm r}J_{\rm r}\int_0^{l_{\rm r}}\varphi_i''\varphi_j''{\rm d}x + Tb_{\rm r}\int_0^{l_r}\varphi_i'\varphi_j'{\rm d}x \\
&= \begin{cases} \dfrac{8E_{\rm r}J_{\rm r}i^4\pi^4}{{l_{\rm r}}^3} + \dfrac{2Tb_{\rm r}i^2\pi^{\ 2}}{l_{\rm r}}, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases}
\end{aligned} \tag{5}
$$

$$
M_{ij} = \rho_{\rm r}b_{\rm r}\int_0^{l_{\rm r}}\varphi_i\varphi_j{\rm d}x + \rho_{\rm s}b_{\rm s}\int_{\frac{l_{\rm r}-h_{\rm s}}{2}}^{\frac{l_{\rm r}+h_{\rm s}}{2}}\varphi_i\varphi_j{\rm d}x, \tag{6}
$$

由此可解出特征值矩阵 $\boldsymbol{\varLambda}$ 和其对应的特征向量矩阵 $\boldsymbol{A}$.

振动时, 薄膜在空气的作用下, 相当于受到周期性均布激振力的作用, 设均布力为 $p\sin\omega t$, 则正则广义力为

$$
Q_i\left(t\right) = p\sin\omega t\int_0^{l_{\rm r}}\varphi_i{\rm d}x = l_{\rm r}p\sin\omega t. \tag{7}
$$

此时方程 (4) 可写为

$$
\ddot{\xi} + \boldsymbol{\varLambda}\xi = \boldsymbol{A}^{\rm T}\boldsymbol{Q}\left(t\right), \tag{8}
$$

其解为

$$
\xi_i = \frac{1}{\varLambda_{ii}-\omega^2}B_ip\sin\omega t, \tag{9}
$$

其中 B_i 是 $\boldsymbol{A}^{\rm T}\boldsymbol{Q}(t)$ 的第 i 个元素除以 $p\sin\omega t$ 后的结果. 令 $\eta = \boldsymbol{A}\xi$, 则薄膜在空气作用下的稳态响应为

$$
y(x,t) = p\sin\omega t\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\eta_i, \tag{10}
$$

则其在振动过程中对空气造成的最大体积改变量为

$$
\begin{aligned}
pV\left(\omega\right) &= p\int_0^{l_{\rm r}}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\eta_i{\rm d}x \\
&= p\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{{\varOmega_i}^2-\omega^2}\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha_{ij}l_{\rm r}\right)^2\right],
\end{aligned} \tag{11}
$$

其中 α_{ij} 为 $\boldsymbol{A}$ 中各元素, $\varOmega_i$ 为矩阵 $\boldsymbol{\varLambda}$ 中对角线元素.

通过各传递矩阵及 (11) 式, 可分别对带隙上下限对应的系统进行求解.

对带隙下限, 设传递顺序为内腔-腔口, 则有

$$
\boldsymbol{U}_{\rm down} = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_2, \tag{12}
$$

$$
\begin{bmatrix} X_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{U}_{\rm down}\begin{bmatrix} X_1 \\ N_1 \end{bmatrix}. \tag{13}
$$

并且, 根据薄膜平均位移在 TMM 和 Rayleigh-Ritz 法下计算结果应相同, 可得

$$
X_1l_{\rm r} = \frac{N_1}{l_{\rm r}}V\left(\omega\right). \tag{14}
$$

联立 (13) 和 (14) 式可得

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} U_{\rm down}^{1,1} & U_{\rm down}^{1,2} & -1 \\ U_{\rm down}^{2,1} & U_{\rm down}^{2,2} & 0 \\ -l_{\rm r} & -V\left(\omega\right)/l_{\rm r} & 0 \end{vmatrix} = \\
&\frac{V_2\omega\sin\dfrac{l_1\omega}{c} + V(\omega)c^2\rho_{\rm a}\omega\sin\dfrac{l_1\omega}{c} - cs\cos\dfrac{l_1\omega}{c}}{c} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{15}
$$

其中 $U_{\rm down}^{i,j}$ 表示 $\boldsymbol{U}_{\rm down}$ 中各元素.

同样, 对带隙上限, 设传递顺序为内腔-腔口-外腔, 则有

$$
\boldsymbol{U}_{\rm up} = \boldsymbol{U}_4\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_2, \tag{16}
$$

$$
\begin{bmatrix} X_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{U}_{\rm up}\begin{bmatrix} X_1 \\ N_1 \end{bmatrix}, \tag{17}
$$

$$
X_1l_{\rm r} = \frac{N_2-N_1}{l_{\rm r}}V\left(\omega\right). \tag{18}
$$

联立 (17) 和 (18) 式可得

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} U_{\rm up}^{1,1}-1 & U_{\rm up}^{1,2} & 0 \\ U_{\rm up}^{2,1} & U_{\rm up}^{2,2} & -1 \\ -l_{\rm r} & -V\left(\omega\right)/l_{\rm r} & V\left(\omega\right)/l_{\rm r} \end{vmatrix} = 0, \\
&V_2V_4\omega^2 + \left[\left(V_2+V_4\right)V(\omega)c^2\rho_{\rm a}\omega^2 - c^2s^2\right]\sin\frac{l_1\omega}{c} \\
&- \left[\left(V_2+V_4\right)cs\omega + 2V(\omega)c^3\rho_{\rm a}s\omega\right]\cos\frac{l_1\omega}{c} \\
&+ V(\omega)c^3\rho_{\rm a}s\omega\left(\sin^2\frac{l_1\omega}{c} + \cos^2\frac{l_1\omega}{c}\right) \\
&+ V(\omega)c^3\rho_{\rm a}s\omega = 0,
\end{aligned} \tag{19}
$$

其中 $U_{\rm up}^{i,j}$ 表示 $\boldsymbol{U}_{\rm up}$ 中各元素.

根据 (15) 与 (19) 式可分别计算出带隙下限与带隙上限的频率. 从这两式可以看出, 在低频范围内, 式子左端取得零值的主要因素有式中的 $V(\omega)$ 和其他含 ω 项, 其中 $V(\omega)$ 与薄膜的振动模态有关, 其他含 ω 项均来自于弹性杆传递矩阵. 这说明随着频率的增大, 每当薄膜或腔口空气的振动模态发生改变时, 都将出现一个新的带隙, 亦即产生了一种新的局域共振模态. 另外, 由于两者的耦合性及内外腔空气的作用, 带隙的上下限将不会出现在原固有频率处, 而是发生一定的偏移.

4 低频带隙影响因素研究

为验证理论计算方法的适用性, 并进一步研究带隙形成规律, 用 FEM 和 TMM 计算其带隙上下限频率随参数改变的变化情况, 并取其前三个带隙进行分析. 在此, 除研究的参数外, 其余参数与上文中相同. 从 (15) 和 (19) 式可以看出, 影响该结构带隙的主要参数有 V_2, V_4, l_1, s 以及与薄膜相关的函数 $V(\omega)$, 在此仅有针对性的选取个别参数进行分析, 其中误差项是以 FEM 所得结果作为真实值计算得出.

从上文理论计算可发现, 薄膜受到张力 T、重物质量及分布、薄膜长度 l_r 等因素会并且只会影响薄膜相关的函数 $V(\omega)$, 在此首先选取了重物长度 l_s 作为变量进行分析, 结果如表 1 所列. 同时, 作为比较, 采用 FEM 计算了同条件下附加金属片薄膜的纵向振动固有频率 (不含反共振频率), 结果如表 2 所列. 从表 1 和表 2 可以看出, 增大 l_s, 薄膜一阶固有频率下降, 二阶固有频率增大, 而结构第二、第三带隙变化趋势与之完全相同, 变化幅度也很接近, 而结构第一带隙向低频方向移动, 但变化幅度较小. 该现象说明此结构在 1700 Hz 以下新出现的第二、三带隙分别是由于薄膜出现了前两阶振动模态引起的. 而第一带隙由于仍然对应于腔口空气的振动, 通过增大 l_s 的方式增加等效质量是一种间接的调控方式, 对于该带隙的优化效果并不理想.

另外, 当 l_s 较小时, 两种计算结果接近, 但当 $l_s > 10\times10^{-3}$ m 后, 误差开始显著增大, 这是由于在用 Rayleigh-Ritz 法对薄膜进行处理时, 仅通过 (6) 式对分布质量进行了处理, 而忽略了附加金属片对薄膜等效刚度的影响. 随着 l_s 增大, 这种影响逐渐增大, 导致了误差不断增大.

表 3 显示的是薄膜张力对带隙的影响, 可以看出, 随着薄膜张力的增大, 其各带隙上下限均有增大的趋势, 但第二、三带隙的增长幅度大于第一带隙, 这与上文中所得出第二、三带隙对应于薄膜的振动模态产生和改变相一致. 对于第一带隙, 由于其对应的是腔口空气的振动模态, 可在分析时忽略薄膜质量的影响, 此时随着张力增大, 结构趋向于刚性壁, 其带隙上下限逐渐与无薄膜结构接近. 当

表 1 薄膜附加金属片长度 l_s 对低频带隙的影响

Table 1. Effect of the parameter l_s on low-frequency band gaps.

$l_s/10^{-3}$ m	第一带隙下限		第一带隙上限		第二带隙下限		第二带隙上限		第三带隙下限		第三带隙上限	
	FEM TMM	误差/%	FEM TMM	误差/%	FEM TMM	误差/%	FEM TMM	误差/%	FEM TMM	误差/%	FEM TMM	误差/%
4	89.2 92.5	3.7	121.4 126.7	4.4	314.2 323.0	2.8	557.7 561.2	0.6	790.7 808.3	2.2	900.3 914.7	1.6
6	88.9 92.2	3.6	120.1 125.1	4.2	297.7 303.1	1.8	526.8 522.8	–0.8	789.1 792.4	0.4	905.2 912.2	0.8
8	88.7 91.9	3.5	118.9 123.5	3.9	285.1 287.6	0.9	508.3 497.5	–2.1	795.6 786.8	–1.1	916.1 912.0	–0.5
10	88.6 91.6	3.4	117.9 122.0	3.5	275.6 275.4	–0.1	497.9 480.5	–3.5	815.9 786.0	–3.7	932.5 910.8	–2.3
12	88.5 91.3	3.1	117.2 120.7	3.0	268.4 265.6	–1.0	492.6 469.1	–4.8	843.8 785.3	–6.9	953.9 904.4	–5.2
14	88.5 91.0	2.8	116.7 119.4	2.3	262.9 257.6	–2.0	490.5 461.5	–5.9	878.5 779.9	–11	966.3 887.3	–8.2

表 2 薄膜附加金属片长度 l_s 对薄膜固有频率的影响

Table 2. Effect of the parameter l_s on natural frequency of membrane.

$l_s/10^{-3}$ m	4	6	8	10	12	14
1阶固有频率	252.4	237.9	226.8	218.2	211.6	206.6
2阶固有频率	751.3	782.8	794.0	814.8	843.4	879.1

表 3 薄膜张力 T 对低频带隙的影响

Table 3. Effect of the parameter T on low-frequency band gaps.

$T/10^6$ N·m^{-1}	第一带隙下限		第一带隙上限		第二带隙下限		第二带隙上限		第三带隙下限		第三带隙上限	
	FEM TMM	误差/%	FEM TMM	误差/%	FEM TMM	误差/%	FEM TMM	误差/%	FEM TMM	误差/%	FEM TMM	误差/%
0.5	74.3	3.4	89.3	2.8	259.2	0.7	440.3	–1.2	574.1	0.1	770.1	0.5
	76.8		91.8		261.0		434.9		574.4		774.3	
1.5	96.3	3.4	143.1	4.6	345.5	3.2	589.6	0.2	952.1	2.2	1035.1	1.7
	99.6		149.7		356.7		591.0		973.0		1053.1	
2.5	103.3	2.9	174.6	4.6	415.0	4.2	648.0	0.7	1217.4	2.8	1274.1	2.3
	106.4		182.7		432.6		652.4		1251.0		1303.2	
3.5	106.8	2.7	196.4	4.4	474.9	4.8	691.4	1.1	1434.1	3.0	1478.6	2.5
	109.6		205.0		497.6		698.8		1477.6		1516.1	
4.5	108.8	2.5	212.5	4.1	528.2	5.1	729.6	1.4	1621.6	3.2	1642.5	3.3
	111.5		221.3		555.2		740.1		1673.4		1696.5	
10	113.0	2.1	257.8	3.0	757.3	5.9	907.9	2.7	1645.9	5.8	1741.8	3.1
	115.3		265.6		801.7		932.8		1740.6		1796.2	
100	116.2	1.8	311.0	1.2	1654.1	5.2	1737.3	3.1	2270.8	9.0	2375.3	6.1
	118.3		314.9		1740.4		1791.6		2475.7		2520.3	

张力增大到 10^8 N/m^2 后, 其第一带隙上下限已基本与无薄膜结构一致, 且 1700 Hz 以下已无其他完整带隙.

腔口空气通道长度 l_1 对低频带隙的影响如表 4 所列, 可以看出, 随着 l_1 的增大, 第一带隙上下限均向低频方向移动, 而第二带隙下限变化不大, 这与上文提出的对应关系相符合.

但第二带隙上限也不断下降, 特别是当 l_1 大于 246 mm 后, 第三带隙上下限急剧下降. 从带隙图分析发现, 腔口空气二阶振动对应的带隙 (第四带隙) 随着 l_1 的增大不断向低频方向移动, 压缩了第三带隙及第二带隙上限. 直至 $l_1 = 295$ mm 后, 腔口空气二阶振动对应的带隙下降到薄膜二阶振动对应带隙以下, 成为第三带隙, 如图 6 所示, 腔口空气表现为中间压强最大, 两端最小. 该现象说明随着 l_1 的增大, 腔口空气在 1700 Hz 以下范围内的振动模态增多, 固有频率下降. 实际上, 当 $l_1 =$ 344 mm 时, 该结构在 1700 Hz 以下已有 6 个带隙,

表 4 腔口空气通道长度 l_1 对低频带隙的影响

Table 4. Effect of the parameter l_1 on low-frequency band gaps.

l_1/mm	第一带隙下限		第一带隙上限		第二带隙下限		第二带隙上限		第三带隙下限		第三带隙上限	
	FEM TMM	误差/%	FEM TMM	误差/%	FEM TMM	误差/%	FEM TMM	误差/%	FEM TMM	误差/%	FEM TMM	误差/%
99	88.4	4.4	119.1	5.7	302.1	3.4	533.0	1.3	772.3	3.4	891.4	2.4
	92.3		125.9		312.5		540.0		798.6		912.9	
148	74.5	3.4	101.5	5.1	301.2	3.5	513.3	1.1	772.6	3.4	873.7	2.4
	77.1		106.7		311.7		519.1		798.9		894.4	
197	66.0	2.9	89.9	4.7	301.9	3.5	500.0	1.1	772.4	3.3	836.0	1.9
	67.9		94.1		312.5		505.3		798.2		851.8	
246	60.1	2.6	81.4	4.5	303.2	3.5	488.5	1.0	697.6	1.2	734.1	0.9
	61.7		85.1		313.7		493.3		705.9		740.6	
295	55.8	2.5	75.0	4.3	304.7	3.4	475.7	0.9	587.8	0.7	637.5	0.7
	57.2		78.2		315.2		479.9		591.9		642.3	
344	52.5	2.4	69.8	4.2	306.3	3.4	458.4	0.7	507.5	0.6	558.9	3.1
	53.7		72.7		316.6		461.5		510.8		576.4	

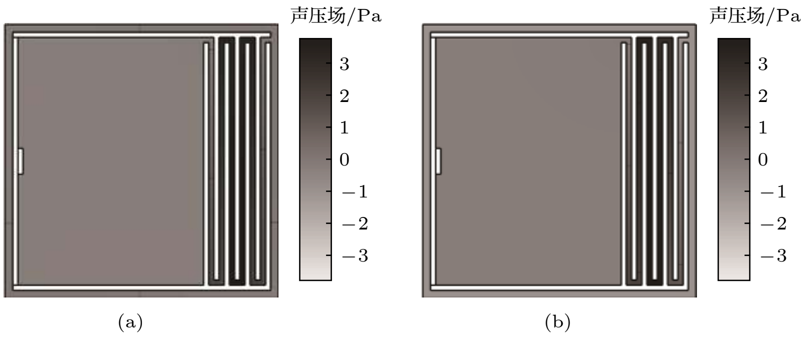

图 6 $l_1 = 295$ mm 时 (a) 第三带隙下限和 (b) 第三带隙上限的声场压力图

Fig. 6. Sound pressure distribution diagrams at starting frequency (a) and cutoff frequency (b) of the 3th band gap when l_1 = 295 mm.

表 5 内腔体积 V_2 对低频带隙的影响

Table 5. Effect of the parameter V_2 on low-frequency band gaps.

$V_2/10^{-4}$ m^3	第一带隙下限		第一带隙上限		第二带隙下限		第二带隙上限		第三带隙下限		第三带隙上限	
	FEM TMM	误差/%	FEM TMM	误差/%	FEM TMM	误差/%	FEM TMM	误差/%	FEM TMM	误差/%	FEM TMM	误差/%
7.07	108.5 115.3	6.3	120.5 127.6	5.8	406.9 411.0	1.0	566.2 571.8	1.0	809.9 825.3	1.9	953.1 964.2	1.2
10.57	103.3 108.3	4.8	121.1 126.8	4.8	361.4 367.2	1.6	558.3 557.8	−0.1	796.5 811.4	1.9	925.4 938.7	1.4
14.07	98.0 102.2	4.2	121.0 126.4	4.4	335.0 341.3	1.9	550.0 549.4	−0.1	790.9 804.9	1.8	913.1 925.8	1.4
17.57	93.3 96.9	3.9	120.9 126.1	4.3	317.7 324.4	2.1	544.4 543.9	−0.1	788.3 801.1	1.6	906.5 918.1	1.3
19.32	91.1 94.5	3.8	120.8 126.0	4.3	311.1 317.9	2.2	542.3 541.8	−0.1	787.4 799.7	1.6	904.1 915.3	1.2

其分别对应于腔口空气一阶振动、薄膜一阶振动、腔口空气二阶振动、薄膜二阶振动、腔口空气三阶振动和腔口空气四阶振动.

由 (15) 式可以看出, 外腔体积 V_4 不影响带隙下限, 而由 (19) 式可以看出, 对带隙上限, 内腔体积 V_2 与外腔体积 V_4 的作用完全相同, 故只对内腔体积 V_2 进行分析, 如表 5 所列. 从表 5 可以看出, 随着 V_2 的增大, 各带隙上下限均向低频方向移动, 这是由于腔体积增加会减小其等效刚度. 另外, 在此减小 V_2 的方式是在内腔中增加刚性填充物, 这种方法会使得内腔形状不规则, 腔内声压不均匀, 导致误差上升. 但即便刚性填充物占内腔比例达到 66% (此时内腔体积为 7.07×10^{-4} m^3), 最大误差仍较小, 说明本文采用的理论计算方法也适用于其他较为复杂结构.

从整体上看, 该种带薄膜壁的 Helmholtz 结构可变参数很多, 且各参数对不同带隙的影响程度不尽相同. 因此, 在低频范围内, 既可以通过改变与腔口空气通道或薄膜相关的参数, 在保证其中某些带隙变化不大的情况下, 单独调整其他带隙; 也可以通过调整内外腔体积, 对所有带隙进行调控.

5 结 论

本文设计了一种含薄膜壁的 Helmholtz 型声子晶体, 建立了系统等效模型, 通过研究发现: 1) 该结构第一带隙下限分别低于同参数下的普通 Helmholtz 型声子晶体和薄膜, 且在 1700 Hz 以下范围内将原有一个带隙扩展为多个带隙; 2) 利用 TMM 与 Rayleigh-Ritz 法相结合的方式可以较为精确地计算出其带隙上下限; 3) 该结构的各带隙分别对应于腔口空气和薄膜的各阶振型, 因此可以通过改变与腔口空气通道或薄膜相关的参数, 在保证其中某些带隙变化不大的情况下, 单独调整其他

带隙; 与此同时, 内外腔体积对所有带隙均有影响, 故可通过调整其体积对所有带隙进行调控. 这些结论对构建 Helmholtz 腔与薄膜耦合声学超材料具有指导意义, 有利于推动低频隔声技术的发展.

参考文献

[1] Kushwaha M S, Halevi P, Dobrzynski L, Djafari-Rouhani B 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 2022

[2] Wang S, Lin S Y 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 024303 (in Chinese) [王莎, 林书玉 2019 物理学报 **68** 024303]

[3] Zhang Z F, Yu D L, Liu J W, Wen J H 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 074301 (in Chinese) [张振方, 郁殿龙, 刘江伟, 温激鸿 2018 物理学报 **67** 074301]

[4] Liao T, Sun X W, Song T, Tian J H, Kang T F, Sun W B 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 214208 (in Chinese) [廖涛, 孙小伟, 宋婷, 田俊红, 康太凤, 孙伟彬 2018 物理学报 **67** 214208]

[5] Li S B, Dou Y H, Chen T N, Wan Z G, Guan Z R 2018 *Mod. Phys. Lett. B* **32** 1850221

[6] Korozlu N, Kaya O A, Cicek A, Ulug B 2018 *J. Acoust. Soc. Am.* **143** 756

[7] Quan L, Ra Di Y, Sounas D L, Alù A 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 254301

[8] Zhao L X, Zhou S X 2019 *Sensors-Basel* **19** 788

[9] Yuan M, Cao Z, Luo J, Pang Z 2018 *AIP Adv.* **8** 85012

[10] Wang Y, Zhu X, Zhang T S, Bano S, Pan H Y, Qi L F, Zhang Z T, Yuan Y P 2018 *Appl. Energ.* **230** 52

[11] Quan L, Qian F, Liu X Z, Gong X F, Johnson P A 2015 *Phys. Rev. B* **92** 104105

[12] Quan L, Zhong X, Liu X, Gong X, Johnson P A 2014 *Nat. Commun.* **5** 3188

[13] Hu X, Chan C T, Zi J 2005 *Phys. Rev. E* **71** 55601

[14] Chalmers L, Elford D P, Kusmartsev F V, Swallowe G M 2009 *Int. J. Mod. Phys. B* **23** 4234

[15] Guan D, Wu J H, Jing L, Gao N, Hou M 2015 *Noise Control Eng. J.* **63** 20

[16] Jiang J, Yao H, Du J, Zhao J 2016 *AIP Adv.* **6** 115024

[17] Jiang J L, Yao H, Du J, Zhao J B, Deng T 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 064301 (in Chinese) [姜久龙, 姚宏, 杜军, 赵静波, 邓涛 2017 物理学报 **66** 064301]

[18] Liu M, Hou Z L, Fu X J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 104302 (in Chinese) [刘敏, 侯志林, 傅秀军 2012 物理学报 **61** 104302]

[19] Bao K, Chen T N, Wang X P, Wang F, Zhang Z H 2016 *J. Xi'an Jiaotong Univ.* **50** 124 (in Chinese) [包凯, 陈天宁, 王小鹏, 王放, 张振华 2016 西安交通大学学报 **50** 124]

[20] Liu C R, Wu J H, Chen X, Ma F Y 2019 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **52** 105302

[21] Ang L Y L, Koh Y K, Lee H P 2017 *Appl. Phys. Lett.* **111** 41903

[22] Wang X, Zhao H, Luo X, Huang Z 2016 *Appl. Phys. Lett.* **108** 41905

[23] Langfeldt F, Gleine W, von Estorff O 2015 *J. Sound Vib.* **349** 315

[24] Zhou R, Wu W G, Wen Y F 2017 *Technical Acoustics* **36** 297 (in Chinese) [周榕, 吴卫国, 闻轶凡 2017 声学技术 **36** 297]

[25] Abbad A, Rabenorosoa K, Ouisse M, Atalla N, Park G 2017 *Proc. SPIE* **10164** 101640P

[26] Langfeldt F, von Estorff O 2016 *Inter-Noise and Noise-Con Congress and Conference Proceedings* **253** 3413

[27] Elayouch A, Addouche M, Herth E, Khelif A 2013 *Appl. Phys. Lett.* **103** 83504

[28] Liu C R, Wu J H, Lu K, Zhao Z T, Huang Z 2019 *Appl. Acoust.* **148** 1

[29] Zhu X, Chen Z, Jiao Y, Wang Y 2018 *J.Vibr. Acoust.* **140** 31014

[30] Chen X, Yao H, Zhao J B, Zhang S, He Z H, Jiang J N 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 084302 (in Chinese) [陈鑫, 姚宏, 赵静波, 张帅, 贺子厚, 蒋娟娜 2019 物理学报 **68** 084302]

[31] Rui X T, Yuan L F, Lu Y Q, He B, Wang G P 2008 *Transfer Matrix Method of Multibody System and Its Applications* (Beijing: Science Press) p425 (in Chinese) [芮筱亭, 贠来峰, 陆毓琪, 何斌, 王国平 2008 多体系统的传递矩阵法及其应用 (北京: 科学出版社) 第425页]

[32] Nie Z H 1989 *Vibration Mechanics* (Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press) p410 (in Chinese) [倪振华 1989 振动力学 (西安: 西安交通大学出版社) 第410页]

Low frequency band gaps of Helmholtz resonator coupled with membrane*

Chen Xin Yao Hong Zhao Jing-Bo† Zhang Shuai
He Zi-Hou Jiang Juan-Na

(Department of Basic Sciences, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

(Received 5 May 2019; revised manuscript received 24 June 2019)

Abstract

In this paper, a phononic crystal is designed using a Helmholtz resonator with a membrane wall, in which the coupled vibration of air and membrane is utilized. The structure of the Helmholtz resonator is a two-dimensional structure. On the basis of the square Helmholtz resonator, a "W"-type outlet is used as a cavity outlet to increase the air quality involved in resonance, and the cavity wall is replaced with a membrane with distribution mass to increase the number of resonance units.

The finite element method is used to calculate the band gaps and transmission loss of sound below 1700 Hz. The results show that the starting frequency of the first band gap of the structure is further reduced. At the same time, it is lower than the starting frequency of ordinary Helmholtz structure and the natural frequency of membrane under the same conditions. Then, a new peak of transmission loss is obtained, and its value is greater than the original structure's. And although the width of the first band gap is reduced, some new band gaps appear in the low-frequency range, so that the total band gap width is improved.

By analyzing the vibration mode of the membrane and sound pressure distribution, it is found that the sum of the sound pressures of the outer cavity is zero at the starting frequencies of the band gaps, and the sound pressure of the inner and outer cavity are respectively positive and negative at the cut-off frequency. With the increase of frequency, the vibration mode of the membrane gradually turns from low-order to high-order, but no anti-symmetric-type mode participation is found at the starting and cut-off frequency.

The components of the structure can be made equivalent to corresponding ones, respectively, i.e. air in the outlet is equivalent to uniform flexible rod, and the air in the inner and outer cavity are equivalent to a spring. So that the structure can be equivalent to a series system consisting of a rod, a spring and a membrane at starting frequency of the band gap, and a loop system consisting of a rod, two springs and a membrane at cut-off frequency. Thus, by the transfer matrix method and the Rayleigh-Ritz method considering the influence of tension and elastic modulus, it is possible to calculate the range of band gap which is extremely close to the result from the finite element method. Through the analysis of the formulas, it can be found that the new band gap is caused by the new vibration mode produced by the membrane or the air in the cavity outlet, and the lower starting frequency of the first band gap is due to the reduction of the equivalent extent of the system by the membrane.

By adjusting the relevant parameters of the membrane and the cavity outlet respectively, it can be found that the band gaps of the structure correspond to the modes of different orders of the air in the cavity outlet and the membrane. In other words, the change of the natural frequency of a certain mode of air in the outlet or membrane only has a greater influence on the corresponding band gap but has less influence on other band gaps, also, the trends of change are the same, and the change values are very close to each other. But, changing the volume of the inner cavity and the outer cavity has a great influence on all the band gaps. Therefore, it is possible to adjust some band gaps through this method.

Keywords: Helmholtz resonance, low-frequency bandgap, noise control, phononic crystal

PACS: 42.70.Qs, 43.50.+y, 46.40.Ff **DOI:** 10.7498/aps.68.20190673

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11504429).

† Corresponding author. E-mail: chjzjb@163.com