# 非对易施瓦西黑洞的热力学及其量子修正*

沈珏 刘成周† 朱宁宁 童一诺 严晨成 薛珂磊

(绍兴文理学院物理系, 绍兴 312000)

(2019 年 7 月 10 日收到; 2019 年 8 月 12 日收到修改稿)

为了探讨量子引力效应对黑洞量子性质的影响, 本文研究了非对易黑洞的热力学及其量子修正. 首先, 利用修正的黑洞热力学第一定律, 对非对易施瓦西黑洞的热力学量进行了计算. 结果表明, 利用修正的热力学第一定律得到的非对易黑洞温度与利用表面引力和隧穿方法得到的温度相同, 而且黑洞熵符合贝肯斯坦-霍金面积定律. 对得到的黑洞热容进行分析, 发现在视界半径与非对易参数满足一定条件时, 热容可以为正值, 非对易黑洞可以具有热力学稳定性. 其次, 讨论了广义不确定原理对非对易施瓦西黑洞热力学的影响, 给出了广义不确定原理修正的黑洞温度、熵和热容表达式, 其中得到的黑洞熵包含面积对数项. 在忽略广义不确定原理效应的情况下, 修正的黑洞熵可以回到贝肯斯坦-霍金面积定律的情况. 同样, 修正的黑洞温度和热容也可以在忽略量子引力效应时回到通常施瓦西黑洞的情况.

**关键词:** 非对易黑洞, 修正的黑洞热力学第一定律, 广义不确定原理, 量子修正

**PACS:** 04.70.Dy, 04.60.Bc, 04.62.+v **DOI:** 10.7498/aps.68.20191054

## 1 引 言

霍金从半经典的量子场论出发, 表明黑洞并非只进不出, 它能向外发出热辐射[1,2]. 这可以描述为: 由于真空量子涨落, 黑洞附近产生正负粒子对, 当负能粒子被黑洞吸收后, 正能粒子可以因视界附近的时空弯曲效应而留在黑洞外, 并可运动到无穷远处, 从而可在视界外观测到黑洞释放了粒子, 这种现象被称为霍金辐射. 霍金辐射确立了黑洞温度的存在和黑洞热力学定律的成立, 从而为黑洞热力学奠定了基础[3,4]. 黑洞热力学体现了广义相对论和量子理论之间深刻的内在联系, 揭示了黑洞的量子性质. 同时, 黑洞热力学也带来了黑洞信息疑难等理论物理的难题[4,5]. 一般认为, 揭示黑洞热力学的本质和解决黑洞热力学疑难需要相对论与量子力学的进一步结合甚至统一.

引力量子化是理论物理面临的巨大挑战, 量子引力理论还有待建立. 存在普朗克长度量级的最小可观测长度是各种量子引力候选理论的普遍预言[6]. 最小长度引发了许多量子引力效应, 其中最引人注目的一个是广义不确定原理 (generalize uncertainty principle, GUP)[7,8]. 当量子引力效应起重要作用时, 由于存在长度和位置不确定度的最小值, 此时海森伯不确定原理不再准确, 需要引入与动量相关的不确定度的附加项. 不确定原理是量子力学中的基本原理, 对广义不确定原理的研究及其应用非常重要和有意义 (其综述可见文献 [9]). 将广义不确定原理引入黑洞热力学, 可以研究黑洞热力学性质的量子修正, 并对黑洞热力学疑难给出可能的解决方案[10–25]. 比如, 广义不确定原理可以克服黑洞视界附近量子态的发散困难, 有助于对黑洞熵统计起源的认识; 广义不确定原理可以影响黑洞视界上粒子的量子隧穿过程, 增加粒子的隧穿概

* 浙江省自然科学基金 (批准号: LY14A030001) 和国家自然科学基金 (批准号: 11373020) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: czlzj20@aliyun.com

 

率, 有助于对黑洞信息疑难的解决; 利用广义不确定原理研究黑洞熵, 可以得到熵的量子修正项, 有助于对黑洞熵量子本质的认识; 利用广义不确定原理研究黑洞辐射, 可以得到普朗克量级的黑洞剩余, 有助于对黑洞信息疑难问题的解决, 并对暗物质给出可能的候选方案.

最小可观测长度效应也引发了对非对易时空(noncommutative spacetimes, NS)的研究[26,27]. 在非对易时空中, 广义相对论的经典时空被具有非对易坐标的几何取代, 从而导致了一种量子修正时空——非对易黑洞(noncommutative black hole, NBH)[28–32]. 非对易黑洞中心存在非奇异的标量曲率, 从而可避免传统黑洞中的时空奇异性和温度发散[33–36]. 非对易黑洞的正规性可以为黑洞热力学疑难的解决提供线索和思路, 相应地, 其热力学的修正效应也得到了许多研究[37–51]. 其中, 通过考察正规黑洞的内能特征, 文献[51]提出, 传统的黑洞热力学第一定律不再适用于能量密度依赖于黑洞质量的正规黑洞; 正规黑洞的内能和热力学第一定律需要修正. 利用文献[51]给出了修正的黑洞热力学第一定律, 文献[23]研究了Hayward正规黑洞热力学的量子修正, 得到了不同方法下黑洞温度结果的一致性, 并验证了贝肯斯坦-霍金面积定律适用性.

此外, 关于最小长度和黑洞热力学的量子修正, 还有许多其他研究和进展, 均增加了对黑洞量子性质的认识[52–63]. 其中, Parikh 和 Wilczek[62,63]给出了一种通过计算视界上粒子的隧穿率来给出霍金辐射的半经典方法. 量子隧穿方法将粒子的隧穿概率与黑洞熵的变化相联系, 给出了霍金辐射偏离黑体谱的结果, 从而可以给出一种可能的解决黑洞信息疑难的方案.

为了研究最小长度效应对黑洞量子性质的影响, 我们研究了非对易黑洞的热力学. 研究中利用热力学第一定律的修正形式, 并考虑广义不确定原理效应. 首先, 我们在非对易施瓦西黑洞中, 利用修正的黑洞热力学第一定律, 计算了黑洞的温度、熵和热容, 给出了具有普遍意义的黑洞温度表达式, 讨论了黑洞的面积定律的适用性和热力学稳定性. 其次, 将广义不确定原理与时空的非对易效应相结合, 讨论了广义不确定原理对非对易施瓦西黑洞热力学的影响, 得到了广义不确定原理修正的黑洞温度、熵和热容. 本文第2节对非对易黑洞做简单介绍; 第3节利用修正的热力学第一定律对非对易施瓦西黑洞的热力学性质进行讨论; 第4节讨论广义不确定原理对非对易黑洞温度、熵和热容的影响; 最后是总结和讨论. 本文将采用 $G=k=c=1$ 的自然单位制.

## 2 非对易黑洞

广义相对论指出, 引力是时空弯曲的表现, 而时空弯曲源于物质与能量. 在对易空间中, 点粒子质量密度通常用质量与狄拉克函数的乘积来表示. 考虑非对易性对引力物体中质量分布的影响, 质量密度不再能用狄拉克函数表示, 而是要用高斯分布替代[28–30]. 相应地, 时空结构的描述将发生变化.

在非对易时空中, 存在空间坐标 $x$ 的非对易关系[26,27]

$$[x_\mu, x_v] = \mathrm{i}\theta_{\mu v}, \tag{1}$$

其中, $\theta$ 为非对易参数, 具有普朗克长度平方的量级. (1)式表示, 空间出现了模糊性, 对易空间中描述位置的几何点将被最小宽度为普朗克长度量级的区域所取代. 因此, 利用狄拉克函数来定义质点密度的方法在非对易空间中不再适用, 而是要用最小宽度为普朗克长度的高斯分布. 对于静态、球对称的点粒子引力源, 其质量分布可用密度 $\rho_\theta$ 表示为[28–30]

$$\rho_\theta = \frac{M}{(4\pi\theta)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4\theta}}, \tag{2}$$

其中 $M$ 为引力源的质量. 可以看到, 在非对易空间中, 取代对易空间中的点粒子, 质量 $M$ 将在整个区域上分布, 其特征尺度为 $\sqrt{\theta}$. 利用质量密度(2)式, 可以求出半径为 $r$ 范围内引力源的总质量为

$$m_\theta(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho_\theta(r')\mathrm{d}r' = \frac{2M}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(3/2, r^2/4\theta\right). \tag{3}$$

其中, 伽马函数 $\gamma\left(3/2, r^2/4\theta\right)$ 的定义为

$$\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t. \tag{4}$$

求解具有非对易质量密度的爱因斯坦方程, 可以得到非对易时空中的黑洞解[28–30]. 在广义相对论中, 对于非对易性的影响, 可以考虑通过保持爱因斯坦场方程左边张量的标准形式, 而在右边引入一个修改后的能量动量张量 $(\boldsymbol{T}_\theta)_\mu^{\ v}$, 并将时间分量

记为 $(T_\theta)^t_t = -\rho_\theta$. 为使度规的时间分量满足 $(g_\theta)_{tt} = -(g_\theta)^{TT}$, 利用能动张量的协变守恒 $(T_\theta)^\nu_\mu$; $\nu = 0$, 能动张量可定义为

$$(\boldsymbol{T}_\theta)^\nu_\mu = \mathrm{diag}\left[-\rho_\theta, -\rho_\theta, p_r - \frac{r}{2}\partial_r\rho_\theta, p_r - \frac{r}{2}\partial_r\rho_\theta\right]. \tag{5}$$

这样, 利用能动张量 (5) 式解爱因斯坦场方程, 可以得到非对易时空中的施瓦西黑洞线元为

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t_s{}^2 + f^{-1}(r)\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varOmega^2, \tag{6}$$

其中, $r$ 为径向坐标, $\mathrm{d}\varOmega^2$ 为单位球面上的度规, 且有[28–30]

$$f(r) = 1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right). \tag{7}$$

可以看出, 在 $r \gg \sqrt{\theta}$ 的大尺度情况下, $\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 非对易度规 (6) 式将回归到标准的施瓦西形式. 这是由于随着 $r$ 的变大, 能动张量的分量会迅速减少到零, 施瓦西真空解将重新适用. 而在 $r \ll \sqrt{\theta}$ 的小尺度下,

$$f(r) \simeq 1 - \frac{Mr^2}{3\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}. \tag{8}$$

这样, 度规 (6) 式将约化为具有宇宙学常数 $\varLambda_\theta = M/(3\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}})$ 的德西特度规, 且该时空的常数标量曲率为[28–30]

$$R_\theta = \frac{4M}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}}. \tag{9}$$

这样, 非对易黑洞可以在 $r = 0$ 处找到一个正常数曲率的德西特核, 不存在曲率奇点. 而且, 这一时空非奇异性可以对黑洞的蒸发等热力学性质产生实质性的影响[33–36]. 而如果忽略时空的非对易性, 令 $\theta \to 0$, 即可通过 (9) 式在 $r = 0$ 处得到时空奇点.

## 3 非对易黑洞的热力学

接下来研究非对易施瓦西黑洞的热力学. 首先, 通过三种方法, 即表面引力法、量子隧穿法和热力学第一定律法来给出非对易黑洞的温度. 将会看到, 由热力学第一定律得到的黑洞温度与其他两种方式所得的不同. 为了解决这一矛盾, 我们采用文献 [51] 给出的修正的黑洞热力学第一定律. 可以看到, 利用修正的黑洞热力学第一定律, 可以得到与表面引力法和量子隧穿法一致的黑洞温度, 并得到符合贝肯斯坦-霍金面积定律的黑洞熵. 进一步, 计算非对易黑洞的热容, 得到非对易施瓦西黑洞可以具有热力学稳定性的结果.

首先, 通过表面引力法给出非对易黑洞 (6) 式的温度. 利用 (6) 式和 (7) 式, 通过 $[(g_\theta)_{tt}]_{r=r_\mathrm{h}} = 0$, 可得黑洞的视界半径为

$$r_\mathrm{h} = \frac{4M}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_\mathrm{h}^2}{4\theta}\right). \tag{10}$$

黑洞视界上的表面引力 $\kappa$ 是一个守恒量, 由视界的几何结构决定, 即

$$\begin{aligned}\kappa &= -\frac{1}{2}\lim_{r\to r_\mathrm{h}}\frac{\partial_r g_{tt}}{\sqrt{-g_{tt}g_{rr}}} = \frac{1}{2}\lim_{r\to r_\mathrm{h}}\partial_r f(r)\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r_\mathrm{h}} - \frac{r_\mathrm{h}^2}{4\theta^{\frac{3}{2}}}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{r_\mathrm{h}^2}{4\theta}}}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_\mathrm{h}^2}{4\theta}\right)}\right].\end{aligned} \tag{11}$$

霍金辐射是黑洞附近的量子效应. 黑洞温度是黑洞视界的特征量, 可由视界上的表面引力得到[2],

$$T_\kappa = \frac{\hbar\kappa}{2\pi} = \frac{\hbar}{4\pi r_\mathrm{h}}\left[1 - -\frac{r_\mathrm{h}^3}{4\theta^{\frac{3}{2}}}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{r_\mathrm{h}^2}{4\theta}}}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_\mathrm{h}^2}{4\theta}\right)}\right]. \tag{12}$$

对于利用表面引力所得到的非对易施瓦西黑洞的温度, 可以看出, 对于大黑洞, 即 $r_\mathrm{h} \gg \sqrt{\theta}$ 时, 温度 $T_\kappa$ 可以回到施瓦西黑洞温度 $T_\mathrm{Sch} = \hbar/(4\pi r_\mathrm{h})$. 但对于小黑洞, $T_\kappa$ 将与 $T_\mathrm{Sch}$ 有明显不同[28–30].

利用霍金辐射的量子隧穿方法同样可以计算黑洞的温度[62,63]. 对于球对称静态时空, 利用 Wenzel-Kramers-Brillouin 近似, 粒子在视界上的辐射率 $\varGamma$ 可以从隧穿粒子作用量 $I$ 的虚部得到[62,63], 即

$$\varGamma \sim \exp\left(-\frac{2\mathrm{Im}I}{\hbar}\right). \tag{13}$$

为了计算粒子在视界上的隧穿作用量, 需要消除线元 (6) 式的坐标奇异性. 因此, 对该线元进行 Painleve 坐标变换[64]

$$\mathrm{d}t_\mathrm{s} = \mathrm{d}t - \frac{\sqrt{1-f(r)}}{f(r)}\mathrm{d}r, \tag{14}$$

从而得到

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + 2\sqrt{1-f(r)}\mathrm{d}t\mathrm{d}r + \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varOmega^2. \tag{15}$$

可以看出, Painleve 坐标线变换可以消除度规在视界上的奇异性.

为了计算无质量粒子在视界上的隧穿率, 需要

给出粒子的径向运动方程. 从 (15) 式可以得到径向零测地线方程为

$$\dot{r} \equiv \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm 1 - \sqrt{1 - f(r)}, \tag{16}$$

其中"+"对应出射粒子, "–"对应入射粒子. 这里, 为了研究视界外的辐射, 我们取"+". 对 (16) 式在视界上进行泰勒展开, 可以得到

$$\dot{r} = \frac{1}{2} f'(r_{\mathrm{h}})(r - r_{\mathrm{h}}) + o(r - r_{\mathrm{h}})^2. \tag{17}$$

粒子隧穿作用量虚部为

$$\mathrm{Im} I = \mathrm{Im} \int_{r_{\mathrm{i}}}^{r_{\mathrm{f}}} p_r \mathrm{d}r = \mathrm{Im} \int_{r_{\mathrm{i}}}^{r_{\mathrm{f}}} \int_0^{p_r} \mathrm{d}p'_r \mathrm{d}r, \tag{18}$$

其中, $r_{\mathrm{i}}$ 和 $r_{\mathrm{f}}$ 表示粒子在隧穿前后的坐标, $p_r$ 为粒子的动量. 应用哈密顿方程

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}P_r} = \frac{\mathrm{d}\omega'}{\mathrm{d}P_r}, \tag{19}$$

并改变 (18) 式的积分次序, 可以得到

$$\mathrm{Im} I = \mathrm{Im} \int_0^{\omega} \int_{r_{\mathrm{i}}}^{r_{\mathrm{f}}} \frac{\mathrm{d}\omega'}{\dot{r}} \mathrm{d}r, \tag{20}$$

其中 $H$ 为系统的哈密顿量, $\omega'$ 表示隧穿粒子的能量. 将粒子径向运动方程 (16) 式代入 (20) 式中, 并取 (17) 式的一级近似, 可以得到

$$\mathrm{Im} I = \mathrm{Im} \int_0^{\omega} \int_{r_{\mathrm{i}}}^{r_{\mathrm{f}}} \frac{2}{f'(r_{\mathrm{h}})(r - r_{\mathrm{h}})} \mathrm{d}r \mathrm{d}\omega' p. \tag{21}$$

利用留数定理, 完成对 $r$ 的积分, 得到

$$\mathrm{Im} I = \int_0^{\omega} \frac{2\pi}{f'(r_{\mathrm{h}})} \mathrm{d}\omega' = \frac{2\pi\omega}{f'(r_{\mathrm{h}})}. \tag{22}$$

将 (22) 式代入 (13) 式, 得到

$$\varGamma \sim \exp\left(-\frac{4\pi\omega}{\hbar f'(r_{\mathrm{h}})}\right). \tag{23}$$

这样, 将 (23) 式与玻尔兹曼因子 $\exp(-\omega/T)$ 相比较, 得到黑洞的温度为

$$T_t = \frac{\hbar f'(r_{\mathrm{h}})}{4\pi} = T_\kappa. \tag{24}$$

可以看到, 通过量子隧穿方法得到的黑洞温度与通过表面引力得到的黑洞温度是相同的.

利用黑洞热力学第一定律也可以计算黑洞温度. 对于无转动无电荷的非对易黑洞, 黑洞热力学第一定律为

$$\delta M = T_{\mathrm{H}} \delta S. \tag{25}$$

其中, $S$ 为黑洞的熵, $T_{\mathrm{H}}$ 为黑洞的热力学温度. 对于非对易黑洞 (6) 式, 其质量可以通过 $f(r_{\mathrm{h}}) = 0$ 表示为

$$M = \frac{\sqrt{\pi} r_{\mathrm{h}}}{4\gamma\left[3/2, r_{\mathrm{h}}^2/(4\theta)\right]}. \tag{26}$$

显然, 当 $r_{\mathrm{h}} \gg \sqrt{\theta}$ 时, $\gamma^2(3/2, r_{\mathrm{h}}^2/(4\theta))$ 近似为 $\sqrt{\pi}/2$, 此时 $M = r_{\mathrm{h}}/2$, 此即为施瓦西黑洞质量表达式.

按照贝肯斯坦-霍金面积定律, 黑洞熵可以表示为

$$S = \frac{A_{\mathrm{h}}}{4\hbar} = \frac{\pi r_{\mathrm{h}}^2}{\hbar}, \tag{27}$$

其中 $A_{\mathrm{h}}$ 为黑洞视界面积. 将 (26) 式和 (27) 式代入 (25) 式, 即可根据热力学第一定律得到非对易施瓦西黑洞的温度为

$$T_{\mathrm{H}} = \frac{\partial M}{\partial S} = \frac{\hbar B(r_{\mathrm{h}}, \theta)}{8\sqrt{\pi} r_{\mathrm{h}} \gamma\left[3/2, r_{\mathrm{h}}^2/(4\theta)\right]}, \tag{28}$$

其中, 参量 $B(r_{\mathrm{h}}, \theta)$ 定义为

$$B(r_{\mathrm{h}}, \theta) \equiv 1 - \frac{r_{\mathrm{h}}^3}{4\theta^{3/2}} \frac{\mathrm{e}^{-r_{\mathrm{h}}^2/(4\theta)}}{\gamma\left[3/2, r_{\mathrm{h}}^2/(4\theta)\right]}. \tag{29}$$

可以看出, 由黑洞热力学第一定律所得出的黑洞温度 (28) 式与表面引力温度 (12) 式和量子隧穿温度 (24) 式并不一致. 如果热力学第一定律是适用的, 那么利用热力学第一定律得到的温度与其他方法得到的温度也应该是一致的. 实际上, 对于包括广义相对论在内的各种引力理论中的大多数黑洞来说, 确实是这样的. 但对于非对易黑洞, 出现了与热力学第一定律有关的矛盾. 一方面, 三种方法给出了两个不同的黑洞温度, 而表面引力与隧穿效应得到了同样的结果. 因此, 我们倾向于由表面引力和隧穿效应所得到的结果, 即由通常的热力学定理得到的温度 (28) 式需要修改. 另一方面, 研究表明, 即使是利用表面引力和隧穿效应所得的霍金温度, 也不能在非对易黑洞中利用热力学第一定律得到满足面积定律的贝肯斯坦-霍金熵[36–39]. 非对易效应只作用于物质源, 而场方程的爱因斯坦张量部分保持不变, 而且非对易性只有在普朗克尺度下才有作用, 因此, 作为视界特征量的黑洞熵, 在非对易黑洞时空中也应该符合贝肯斯坦-霍金面积定律. 这样, 在非对易黑洞中, 认为 (12) 式和 (24) 式是正确的温度表达式, 而且黑洞熵满足面积定律, 则传统的黑洞热力学第一定律需要修改. 对于包括非对易黑洞在内的正规黑洞, 文献 [51] 给出了一种修正的热力学第一定律. 利用该修正的热力学第一定律, 可以避免正规黑洞中与通常的热力学第一定

律有关的矛盾.

文献 [51] 从考察黑洞的内能入手, 认为正规黑洞的内能不应与黑洞的质量直接等同, 而应存在一个修正因子. 实际上, 弯曲时空中的能量本来就对理论模式和定义方法有较复杂的依赖性, 是需要进行研究的课题[65]. 这样, 考虑黑洞内能的修改, 则修正后的黑洞热力学第一定律应为[51]

$$F\left(M, r_{\mathrm{h}}\right) \delta M=T_{\mathrm{h}} \delta S, \tag{30}$$

这里, $F\left(M, r_{\mathrm{h}}\right)$为内能修正因子, 且

$$F\left(M, r_{\mathrm{h}}\right)=\left(1+4 \pi \int_{r_{\mathrm{h}}}^{\infty} r^{2} \frac{\partial T_{0}^{0}}{\partial M} \mathrm{d} r\right), \tag{31}$$

其中, $T_0^0$是与能量密度有关的能动张量分量. 如果$T_0^0$不依赖于黑洞的质量, 能量密度将不再影响度规, 修正项就会消失.

对于非对易施瓦西黑洞 (6) 式, 由 (5) 式可见

$$T_{0}^{0}=-\rho_{\theta}=-\frac{M}{(4 \pi \theta)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{r_{\mathrm{h}}^{2}}{4 \theta}}. \tag{32}$$

因此, 可以得到非对易黑洞的内能修正因子为

$$F(M, r_{\mathrm{h}})=\frac{2}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_{\mathrm{h}}^{2}}{4 \theta}\right). \tag{33}$$

这样, 将修正因子 (33) 式代入 (30) 式, 并应用面积定律, 可以通过修正后的热力学第一定律得到黑洞的温度为

$$T_{\mathrm{h}}=F(M, r_{\mathrm{h}}) T_{\mathrm{H}}=\frac{\hbar}{4 \pi r_{\mathrm{h}}}\left[1-\frac{r_{\mathrm{h}}^{3}}{4 \theta^{\frac{3}{2}}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{r_{\mathrm{h}}^{2}}{4 \theta}}}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_{\mathrm{h}}^{2}}{4 \theta}\right)}\right]. \tag{34}$$

显然, 这是与 (12) 式一样的结果. 这就是说, 由修正的黑洞热力学第一定律得到的非对易黑洞温度, 与利用表面引力法和量子隧穿法得到的黑洞温度是一致的, 即有

$$T_{\mathrm{h}}=T_{\kappa}=T_{t}. \tag{35}$$

另外, 根据修正的热力学第一定律, 可以得到非对易施瓦西黑洞的热力学熵为

$$S=\int \frac{F\left(M, r_{\mathrm{h}}\right)}{T_{\mathrm{h}}} \mathrm{d} M. \tag{36}$$

将 (33), (34) 和 (26) 式代入 (36) 式, 计算可得

$$S=\int \frac{2 \pi r_{\mathrm{h}}}{\hbar} \mathrm{d} r_{\mathrm{h}}=\frac{\pi r_{\mathrm{h}}^{2}}{\hbar}=\frac{A}{4 \hbar}. \tag{37}$$

这样, 利用修正的热力学第一定律, 验证了在非对易施瓦西黑洞中黑洞熵满足面积定律.

接下来, 计算非对易施瓦西黑洞的热容, 以讨论时空非对易性对黑洞热力学稳定性的影响. 黑洞的定体热容定义为

$$C_{v}=T \frac{\partial S}{\partial T}=T \frac{\partial S}{\partial r_{\mathrm{h}}}\left(\frac{\partial T}{\partial r_{\mathrm{h}}}\right)^{-1}. \tag{38}$$

对于施瓦西黑洞, 将温度 $(T_{\mathrm{h}})_{\mathrm{Scw}}=h/(8\pi M)$与熵 (37) 代入 (38) 式, 则有

$$(C_{v})_{\mathrm{Sch}}=-2 \pi r_{\mathrm{h}}^{2} / \hbar. \tag{39}$$

施瓦西黑洞的热容为负, 表示该热力学系统不稳定[4]. 施瓦西黑洞会随着霍金辐射变得更小, 同时温度更高, 这会加剧黑洞的辐射从而使得辐射无法被阻止, 而且当黑洞半径趋近于零时, 会出现辐射爆炸.

对于非对易施瓦西黑洞 (6) 式, 将温度 (34) 与熵 (37) 式代入 (38) 式, 可得

$$C_{v}=\frac{\dfrac{2 \pi r_{\mathrm{h}}}{\hbar}\left[\dfrac{1}{r_{\mathrm{h}}}-\dfrac{r_{\mathrm{h}}^{2}}{4 \theta^{3/2}} \dfrac{\mathrm{e}^{-r_{\mathrm{h}}^{2}/(4 \theta)}}{\gamma\left(3/2, r_{\mathrm{h}}^{2}/(4 \theta)\right)}\right]}{-\dfrac{1}{r_{\mathrm{h}}^{2}}-\dfrac{\mathrm{e}^{-r_{\mathrm{h}}^{2}/4 \theta}}{4 \theta^{3/2}}\left\{\dfrac{2 r_{\mathrm{h}}-\dfrac{r_{\mathrm{h}}^{3}}{2 \theta}+r_{\mathrm{h}}^{2} \mathrm{e}^{-r_{\mathrm{h}}^{2}/(4 \theta)}\left[\dfrac{r_{\mathrm{h}}^{2}/(2 \theta)-1}{2 \theta^{1/2}}-\dfrac{\sqrt{\pi} r_{\mathrm{h}}}{8 \theta \sqrt{1-\mathrm{e}^{-r_{\mathrm{h}}^{2}/(4 \theta)}}}\right]}{\gamma^{2}\left(3/2, r_{\mathrm{h}}^{2}/(4 \theta)\right)}\right\}}. \tag{40}$$

这是一个较复杂的热容公式, 但当$\theta \to 0$时, 该式可以给出 (39) 式的结果. 这就是说, 忽略非对易效应, (40) 式即为施瓦西黑洞的热容. 比如, 对于大质量黑洞, 当$r_{\mathrm{h}}/\sqrt{\theta} \to \infty$时, (40) 式可回到施瓦西黑洞的热容 (39) 式.

另外, 为了方便对黑洞热力学性质的讨论, 可以对黑洞温度进行近似处理[28–30]. 在 ${r_{\mathrm{h}}}^2/4\theta \gg 1$ 的情况下, 将$\gamma^2(3/2, r_{\mathrm{h}}^2/(4\theta))$展开至$\mathrm{e}^{-r_{\mathrm{h}}^2/4\theta}/\theta^{3/2}$的同阶项, 可以将非对易施瓦西黑洞的温度 (34) 式改写为

$$T_{\rm h} \simeq \frac{\hbar}{4\pi r_{\rm h}}\left[1-\frac{r_{\rm h}^3}{2\sqrt{\pi}\theta^{3/2}}{\rm e}^{-r_{\rm h}^2/(4\theta)}\right]. \tag{41}$$

可以看出, 对于大质量黑洞, 非对易施瓦西黑洞低于同质量的施瓦西黑洞温度 $(T_{\rm h})_{\rm Scw}=\hbar/(8\pi M)$. 这是非对易黑洞与通常黑洞的一个热力学差异. 而且, 当 $r_{\rm h}\ll\sqrt{\theta}$ 时, 非对易黑洞与 de-Sitter 时空相符[28–30], 而此时施瓦西黑洞的温度会趋于发散. 不过, 当黑洞的大小符合 $r_{\rm h}/\sqrt{\theta}\to\infty$ 时, 非对易施瓦西黑洞的温度可以回到施瓦西黑洞的温度.

对于大质量黑洞, 将温度 (41) 式与熵 (37) 式代入 (38) 式, 可得到较为简单的热容公式

$$C_v=-\frac{2\pi r_{\rm h}^2}{\hbar}\left[1+\frac{6r_{\rm h}^3\theta{\rm e}^{-r_{\rm h}^2/4\theta}-r_{\rm h}^5{\rm e}^{-r_{\rm h}^2/4\theta}}{r_{\rm h}^3\left(r_{\rm h}^2-4\theta\right){\rm e}^{-r_{\rm h}^2/4\theta}-4\sqrt{\pi}\theta^{5/2}}\right]. \tag{42}$$

与 (40) 式一致, 该式也可以在大黑洞极限情况下, 回到施瓦西黑洞的热容 (39) 式.

如果黑洞热容为正, 则黑洞有可能与外界达到热力学平衡. 现在我们考察非对易黑洞热容为正的可能性. 为方便, 定义

$$\mu\equiv\frac{r_{\rm h}^2}{4\theta}. \tag{43}$$

在 (42) 式中令 $C_V>0$, 可以得到

$$\begin{cases}\dfrac{4}{\sqrt{\pi}}\mu^{3/2}<{\rm e}^{\mu},\\[2ex] \dfrac{8}{\sqrt{\pi}}\mu^{3/2}\left(\mu-1\right)>{\rm e}^{\mu}.\end{cases} \tag{44}$$

解不等式 (44), 可以近似得到 $1.54<\mu<5.63$. 这样, 结合 (43) 式, 可以看到, 当黑洞半径满足

$$2.483<r_{\rm h}/\sqrt{\theta}<4.747 \tag{45}$$

时, 非对易施瓦西黑洞的热容大于零, 黑洞可以具有热力学的稳定性. 也就是说, 处于这一尺度范围内的非对易施瓦西黑洞, 可以与外界达到热力学平衡, 黑洞可以在热浴中稳定存在. 显然, 这是非对易施瓦西黑洞不同于施瓦西黑洞的热力学性质.

## 4 广义不确定原理对黑洞热力学的影响

为了进一步讨论黑洞热力学的量子修正, 我们考虑广义不确定原理对非对易黑洞相关热力学量的影响. 考虑引力的量子效应, 海森伯不确定原理 $\Delta p\Delta x\geqslant\hbar$ 可被推广为如下形式的广义不确定原理[6–10]:

$$\Delta x\Delta p\geqslant\hbar\left(1+\frac{\lambda^2 l_{\rm p}^2}{\hbar^2}\Delta p^2\right), \tag{46}$$

其中, $\Delta x$ 与 $\Delta p$ 分别为坐标与动量不确定度, $l_{\rm p}=\sqrt{\hbar}$ 为普朗克长度, $\lambda$ 是无量纲的量子引力参数, 具有普朗克长度量级. (46) 式可以写成

$$\Delta p\geqslant\frac{\hbar\Delta x}{2\lambda^2 l_{\rm p}^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{4\lambda^2 l_{\rm p}^2}{\Delta x^2}}\right). \tag{47}$$

考虑到通常 $l_{\rm p}\ll\Delta x$, 对上式进行泰勒展开, 保留到 $l_{\rm p}^2/\Delta x^2$ 的二次项, 得到

$$\Delta p\geqslant\frac{\hbar}{\Delta x}\left(1+\frac{\lambda^2 l_{\rm p}^2}{\Delta x^2}\right). \tag{48}$$

利用海森伯不确定原理, 可以给出粒子的能量 $\omega\geqslant\hbar/\Delta x$[66]. 这样, 考虑 (48) 式给出的广义不确定原理, 粒子能量的修正值为

$$\omega_{\rm GUP}\geqslant\omega\left(1+\frac{\lambda^2 l_{\rm p}^2}{\Delta x^2}\right). \tag{49}$$

然后, 将 (49) 式代入 (23) 式, 得到广义不确定原理修正下的粒子隧穿概率为[20–23]

$$\varGamma\sim\exp\left(-\frac{4\pi\omega_{\rm GUP}}{\hbar f'(r_{\rm h})}\right)=\exp\left[-\frac{4\pi\omega}{\hbar f'(r_{\rm h})}\left(1+\frac{\lambda^2 l_{\rm p}^2}{\Delta x^2}\right)\right]. \tag{50}$$

将 (50) 式与玻尔兹曼因子 $\exp\left(-\omega/T\right)$ 比较, 可得

$$T_{\rm GUP}=\frac{\hbar f'(r_{\rm h})}{4\pi}\left(1+\frac{\lambda^2 l_{\rm p}^2}{\Delta x^2}\right)^{-1}. \tag{51}$$

取辐射粒子的位置不确定度为 $\Delta x\simeq 2r_{\rm h}$[19], 且将 (24) 式和 (35) 式代入上式, 可得广义不确定原理修正的黑洞温度为

$$T_{\rm GUP}=T_{\rm h}\left(1+\frac{\lambda^2 l_{\rm p}^2}{4r_{\rm h}^2}\right)^{-1}. \tag{52}$$

可以看到, 黑洞的温度出现了与广义不确定原理相关的修正因子, 而且有

$$T_{\rm GUP}<T_{\rm h}, \tag{53}$$

即广义不确定原理体现的量子引力效应降低了黑洞的温度. 如果忽略广义不确定原理的修正效应, 令 $\lambda\to 0$, 则有 $T_{\rm GUP}=T_{\rm h}$. 同样, 对于大质量黑洞, 考虑到 $\lambda^2 l_{\rm p}^2/(4r_{\rm h}^2)$ 为小量, 广义不确定原理对黑洞温度的影响可以忽略. 但对于小质量黑洞, (52) 式表明, $T_{\rm GUP}$ 可以与 $T_{\rm h}$ 有明显不同, 这也许有可能给

广义不确定原理带来可观测效应和相应检验.

现在, 考虑到广义不确定原理对黑洞温度的影响, 利用修正的热力学第一定律 (30) 式, 非对易施瓦西黑洞的熵可以表示为

$$S_{\mathrm{GUP}}=\int \frac{F\left(M, r_{\mathrm{h}}\right)}{T_{\mathrm{GUP}}} \mathrm{d} M. \tag{54}$$

将 (26) 式, (33) 式和 (52) 式代入 (54) 式, 计算得

$$S_{\mathrm{GUP}}=\int \frac{2 \pi r_{\mathrm{h}}}{\hbar}\left(1+\frac{\lambda^2 l_{\mathrm{p}}^2}{4 r_{\mathrm{h}}^2}\right) \mathrm{d} r_{\mathrm{h}}. \tag{55}$$

忽略积分常数, 计算结果可以表示为

$$S_{\mathrm{GUP}}=\frac{\pi}{\hbar}\left(r_{\mathrm{h}}^2+\frac{\lambda^2 l_{\mathrm{p}}^2}{2} \ln r_{\mathrm{h}}\right)=\frac{A}{4 \hbar}+\frac{\lambda^2}{4 \pi} \ln \frac{A}{\hbar}. \tag{56}$$

这样就得到了广义不确定原理影响下的非对易施瓦西黑洞熵. 其中, 第一项是贝肯斯坦-霍金熵, 第二项是与广义不确定原理效应有关的黑洞熵的量子修正, 该修正为黑洞面积的对数. 忽略广义不确定原理效应, 令 $\lambda \rightarrow 0$, 则黑洞熵可以回到 (37) 式的面积定律. 而考虑到 $\lambda$ 具有普朗克长度量级, 可以看出, 在大黑洞情况下, $r_{\mathrm{h}} \gg \lambda l_{\mathrm{p}}$, (56) 式中起主导作用的是第一项, 可以体现黑洞熵正比于黑洞面积. 而在黑洞半径接近普朗克长度时, 广义不确定原理对黑洞熵的影响不可以被忽略, 熵与面积不再成正比. 另外, 这里的修正熵 (56) 式与相关研究结果是相符合的[19–23].

考虑广义不确定原理效应, 黑洞的热容公式 (38) 可以写为

$$(C_V)_{\mathrm{GUP}}=T_{\mathrm{GUP}} \frac{\partial S_{\mathrm{GUP}}}{\partial T_{\mathrm{GUP}}}. \tag{57}$$

将 (56) 式和 (52) 式代入 (57) 式得

$$(C_V)_{\mathrm{GUP}}=\frac{\dfrac{\pi}{\hbar}\left(2 r_{\mathrm{h}}+\dfrac{\lambda^2 l_{\mathrm{p}}^2}{2 r_{\mathrm{h}}}\right)}{\dfrac{1}{T_{\mathrm{h}}} \dfrac{\partial T_{\mathrm{h}}}{\partial r_{\mathrm{h}}}+\left(1+\dfrac{\lambda^2 l_{\mathrm{p}}^2}{4 r_{\mathrm{h}}^2}\right)\left[\dfrac{\partial\left(1+\dfrac{\lambda^2 l_{\mathrm{p}}^2}{4 r_{\mathrm{h}}^2}\right)}{\partial r_{\mathrm{h}}}\right]^{-1}}. \tag{58}$$

再将 (34) 式代入 (58) 式, 可以得到进一步的计算结果为

$$\begin{aligned}
(C_V)_{\mathrm{GUP}}= & \frac{\pi}{\hbar}\left[2 r_{\mathrm{h}}+\lambda^2 l_{\mathrm{p}}^2 /(2 r_{\mathrm{h}})\right]\left[\frac{1}{r_{\mathrm{h}}}-\frac{r_{\mathrm{h}}^2}{4 \theta^{3/2}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{r_{\mathrm{h}}^2}{4 \theta}}}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_{\mathrm{h}}^2}{4 \theta}\right)}\right] \\
& \times\left(-\frac{1}{r_{\mathrm{h}}^2}-\frac{\mathrm{e}^{-r_{\mathrm{h}}^2 /(4 \theta)}}{4 \theta^{3/2}}\left\{\frac{2 r_{\mathrm{h}}-\frac{r_{\mathrm{h}}^3}{2 \theta}+r_{\mathrm{h}}^2 \mathrm{e}^{-r_{\mathrm{h}}^2 /(4 \theta)}\left[\frac{r_{\mathrm{h}}^2 /(2 \theta)-1}{2 \theta^{1/2}}-\frac{\sqrt{\pi} r_{\mathrm{h}}}{8 \theta \sqrt{1-\mathrm{e}^{-r_{\mathrm{h}}^2 /(4 \theta)}}}\right]}{\gamma^2(3/2, r_{\mathrm{h}}^2 /(4 \theta))}\right\}\right. \\
& \left.+\frac{2 \lambda^2 l_{\mathrm{p}}^2}{4 r_{\mathrm{h}}^3+r_{\mathrm{h}} \lambda^2 l_{\mathrm{p}}^2}\left[\frac{1}{r_{\mathrm{h}}}-\frac{r_{\mathrm{h}}^2}{4 \theta^{3/2}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{r_{\mathrm{h}}^2}{4 \theta}}}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_{\mathrm{h}}^2}{4 \theta}\right)}\right]\right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{59}$$

此即广义不确定原理影响下的非对易施瓦西黑洞的热容. 可以看出, 当令 $\lambda \rightarrow 0$ 时, $(C_V)_{\mathrm{GUP}}$ 可以回到 (40) 式, 即与不考虑广义不确定原理修正效应的热容结果一致. 然后, 再令 $\theta \rightarrow 0$ 时, 可以得到施瓦西黑洞的热容 (39) 式.

另外, 在 (59) 式中, 直接令 $\theta \rightarrow 0$, 可以得到

$$(C_V)_{\mathrm{GUP}}=-\frac{2 \pi}{\hbar} \frac{\left(r_{\mathrm{h}}^2+\lambda^2 l_{\mathrm{p}}^2 / 4\right)^2}{r_{\mathrm{h}}^2-\lambda^2 l_{\mathrm{p}}^2 / 4}, \tag{60}$$

此为考虑广义不确定原理效应时的施瓦西黑洞热容. 然后, 再令 $\lambda \rightarrow 0$, (60) 式也可以回到施瓦西黑洞的热容 (39) 式. 这是与相关研究相符合的结果[25].

## 5 总结与讨论

本文研究了具有正规性的非对易黑洞的热力学性质. 首先, 我们分别利用表面引力、隧穿效应

与黑洞热力学第一定律计算了非对易施瓦西黑洞的温度. 结果表明, 由表面引力与隧穿效应所得的黑洞温度相同, 而由传统热力学第一定律所得的黑洞温度与上述两种方法所得的温度不一致. 文献[51] 提出, 对于包括非对易黑洞在内的一类正规黑洞, 由于时空质量分布与经典黑洞有所不同, 热力学第一定律应进行相应修正. 利用文献 [51] 给出的黑洞热力学第一定律的修正形式, 并应用黑洞面积定律, 我们得到了与其他两种方法一致的黑洞温度. 这样, 在非对易施瓦西黑洞中, 利用三种不同的方法, 均得到了一样的黑洞温度. 而且, 该温度表达式表明, 非对易黑洞的温度比相应的施瓦西黑洞温度低. 不过, 对于大质量黑洞, 非对易黑洞温度与施瓦西黑洞温度的差异会消失. 随后, 利用修正的黑洞热力学第一定律, 计算了非对易施瓦西黑洞的熵, 结果验证了非对易黑洞符合贝肯斯坦-霍金面积定律. 然后, 根据得到的温度和熵, 并利用修正的热力学第一定律, 得到了非对易施瓦西黑洞的热容. 对热容结果进行分析, 近似得到在视界半径与非对易参数满足一定条件时, 非对易施瓦西黑洞的热容可以为正值. 这是与传统施瓦西黑洞的负热容不同的热力学性质. 这表明, 非对易黑洞有可能与外界达到热力学平衡, 黑洞可以在一定尺度范围内稳定存在. 而在大质量极限下, 非对易施瓦西黑洞的热容会回到施瓦西黑洞的情况.

其次, 我们考虑广义不确定原理体现的量子引力效应, 并利用修正的黑洞热力学第一定律, 对非对易施瓦西黑洞的热力学进行了进一步研究. 结果表明, 广义不确定原理对黑洞温度、熵和热容均带来进一步的量子修正. 广义不确定原理进一步降低了黑洞的温度. 对于微观黑洞来说, 这一温度差异有可能带来观测上的区别, 并可能对广义不确定原理的量子引力效应进行检验. 广义不确定原理为黑洞熵提供了一个面积对数的修正项. 而在大黑洞极限下, 对数项影响可以忽略, 黑洞熵符合面积定律. 当黑洞减小至接近普朗克尺度时, 量子引力效应不能被忽略, 黑洞熵不再符合面积定律. 对于广义不确定原理影响下的黑洞热容, 可以看到, 忽略广义不确定原理效应, 黑洞热容回到之前的非对易黑洞热容, 再忽略非对易效应, 黑洞热容回到传统施瓦西黑洞情况. 而在修正的热容公式中, 如果直接忽略非对易效应, 则可得到广义不确定原理影响下的施瓦西黑洞热容, 再忽略广义不确定原理效应, 也可得到传统施瓦西黑洞热容.

黑洞热力学是量子引力效应的重要应用和探测领域, 特别是在量子修正黑洞中. 广义不确定原理在描述黑洞的量子性质中起着重要的作用. 本文的研究可推广到带电荷和带角动量的非对易黑洞中. 另外, 在此基础上, 研究非对易黑洞蒸发的量子修正, 以及相关的辐射剩余和信息疑难等问题, 也应是值得继续的工作.

## 参考文献


[1] Hawking S W 1974 *Nature* **248** 30

[2] Hawking S W 1975 *Commun. Math. Phys.* **43** 199

[3] Bekenstein J D 1973 *Phys. Rev. D* **7** 2333

[4] Wald R M 2001 *Living Rev. Rel.* **4** 6

[5] Cai R G, Cao L M 2016 *Chin. Sci. Bull.* **61** 2083 (in Chinese) [蔡荣根, 曹利明 2016 科学通报 **61** 2083]

[6] Garay L J 1995 *Int. J. Mod. Phys. A* **10** 145

[7] Maggiore M 1993 *Phys. Lett. B* **304** 65

[8] Kempf A, Mangano G, Mann R B 1995 *Phys. Rev. D* **52** 1108

[9] Tawfik A, Diab A 2014 *Int. J. Mod. Phys. D* **23** 1430025

[10] Chang L N, Minic D, Okamura N, Takeuchi T 2002 *Phys. Rev. D* **65** 125028

[11] Li X 2002 *Phys. Lett. B* **540** 9

[12] Liu C Z 2008 *Sci. China Ser. G: Phys. Mech. Astron.* **51** 113

[13] Gangopadhyay S, Dutta A, Faizal M 2015 *EPL* **112** 20006

[14] Li H L, Song D W, Li W 2019 *Gen. Relat. Gravit.* **51** 20

[15] Chen D, Wu H, Yang H 2013 *Adv. High. Energy Phys.* **43** 24126

[16] Zhao R, Zhang S L 2006 *Phys. Lett. B* **641** 318

[17] Majumder B 2011 *Phys. Lett. B* **703** 402

[18] Banerjee R, Ghosh S 2010 *Phys. Lett. B* **688** 224

[19] Medved A J M, Vagenas E C 2004 *Phys. Rev. D* **70** 124021

[20] Anacleto M A, Brito F A, Passos E 2015 *Phys. Lett. B* **749** 181

[21] Yoon M, Ha J, Kim W 2007 *Phys. Rev. D* **76** 047501

[22] Anacleto M A, Bazeia D, Brito F A, Mota-Silva J C 2016 *Adv. High. Energy Phys.* **11** 8465759

[23] Maluf R V, Neves J C S 2018 *Phys. Rev. D* **97** 104015

[24] Casadio R, Nicolini P, da Rocha R 2018 *Class. Quant. Grav.* **35** 185001

[25] Myung Y S, Kim Y W, Park Y J 2007 *Phys. Lett. B* **645** 393

[26] Witten E 1996 *Nucl. Phys. B* **460** 335

[27] Szabo R J 2003 *Phys. Rept.* **378** 207

[28] Nasseri F 2005 *Gen. Relat. Gravit.* **37** 2223

[29] Nicolini P, Smailagic A, Spallucci E 2006 *Phys. Lett. B* **632** 547

[30] Lopez-Dominguez J C, Obregon O, Sabido M, Ramirez C 2006 *Phys. Rev. D* **74** 084024

[31] Chaichian M, Tureanu A, Zet G 2008 *Phys. Lett. B* **660** 573

[32] Kobakhidze A 2009 *Phys. Rev. D* **79** 047701

[33] Nicolini P 2005 *J. Phys. A* **38** L631

[34] Gruppuso A 2005 *J. Phys. A* **38** 2039

[35] Cai R G, Wang A 2010 *Phys. Lett. B* **686** 166

[36] Nicolini P, Smailagic A, Spallucci E 2006 *ESA Spec. Publ.* **637** 547

[37] Nozari K, Fazlpour B 2007 *Mod. Phys. Lett. A* **22** 2917

[38] Banerjee R, Majhi B R, Samanta S 2008 *Phys. Rev. D* **77**

124035
[39] Baneriee R, Majhi B R, Modak S K 2009 *Class. Quant. Grav.* **26** 085010
[40] Nozari K, Mehdipour S H 2008 *Class. Quant. Grav.* **25** 175015
[41] Myung Y S, Kim Y W, Park Y J 2007 *JHEP* **0702** 012
[42] Kim W, Son Edwin J, Yoon M 2008 *JHEP* **0804** 042
[43] Vakili B, Khosravi N, Sepangi H R 2009 *Int. J. Mod. Phys. D* **18** 159
[44] Buric M, Madore J 2008 *Eur. Phys. J. C* **58** 347
[45] Huang W H, Huang K W 2009 *Phys. Lett. B* **670** 416
[46] Nozari K, Mehdipour S H 2009 *JHEP* **0903** 061
[47] Nozari K, Islamzadeh S 2013 *Astrophys. Space. Sci.* **347** 299
[48] Mehdipour S H, Keshavarz A 2012 *Europhys. Lett.* **9** 10002
[49] Sharif M, Javed W 2011 *Can. J. Phys.* **89** 1027
[50] Faizal M, Amorim R G G, Ulhoa S C 2015 *Int. J. Mod. Phys. D* **27** 1850053
[51] Ma M S, Zhao R 2014 *Class. Quantum. Grav.* **31** 24
[52] Casadio R, Micu O, Nicolini P 2015 *High. Energy Phys.* **178** 293
[53] Ali A F, Nafie H, Shalaby M 2012 *Europhys. Lett.* **100** 20004
[54] Liu Z Y, Ren J R 2014 *Commun. Theor. Phys.* **62** 819
[55] Mu B, Wang P, Yang H 2015 *Adv. High. Energy Phys.* **2015** 1
[56] Ma H, Li J 2017 *Chin. Phys. B* **26** 60401
[57] Chen N S, Zhang J Y 2015 *Chin. Phys. B* **24** 020401
[58] Ibungochouba S T 2015 *Chin. Phys. B* **24** 70401
[59] Ye B B, Chen J H, Wang Y J 2017 *Chin. Phys. B* **26** 90202
[60] Liu C Z, Deng Y J, Luo Y C 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 060401（in Chinese）[刘成周, 邓岳君, 骆叶成 2018 物理学报 **67** 060401]
[61] Wu D, Zhu X D, Wu S Q 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 180401（in Chinese）[吴迪, 朱晓丹, 吴双清 2014 物理学报 **63** 180401]
[62] Parikh M K, Wilczek F 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5042
[63] Parikh M K 2004 *Int. J. Mod. Phys. D* **13** 2351
[64] Painleve P 1921 *C. R. Acad. Sci.* (Paris) **173** 677
[65] Liu L, Zhao Z 2004 *General Relativity* (Beijing: Higher Education Press) p109 (in Chinese) [刘辽, 赵峥 2004 广义相对论(北京: 高等教育出版社) 第109页]
[66] Camellia G A, Arzano M, Procaccini A 2014 *Phys. Rev. D* **70** 107501

# Thermodynamics and its quantum correction of non-commutative Schwarichild black hole*

Shen Jue Liu Cheng-Zhou† Zhu Ning-Ning Tong Yi-Nuo
Yan Chen-Cheng Xue Ke-Lei

(*Department of Physics*, *Shaoxing University*, *Shaoxing* 312000, *China*)

( Received 10 July 2019; revised manuscript received 12 August 2019 )

**Abstract**

Black hole thermodynamics establishes a deep and satisfying link to gravity, thermodynamics, and quantum theory. And, the thermodynamic property of black hole is essentially a quantum feature of gravity. In this paper, in order to study the influence of the quantum gravity effect on the quantum properties of black hole, we study the thermodynamics and its quantum correction to a non-commutative black hole. First of all, the temperature of the non-commutative Schwarichild black hole is calculated by using three different methods: surface gravity, tunneling effects and the first law of black hole thermodynamics. It is found that the same hole temperature is obtained by means of the surface gravity and tunneling effects. However, by using the first law of black hole thermodynamics, different results are derived from the first two methods. Therefore, we incline to the result obtained by surface gravity and tunneling effects, and the temperature obtained by the thermodynamic law needs modifying. That is, for the non-commutative black hole, there is a contradiction to the first law of thermodynamics. To calculate the temperature and other thermodynamic quantities for the non-commutative Schwarichild black hole, we use the corrected first law of black hole thermodynamics proposed in the literature. It is found that the black hole temperature derived by the corrected first law is the same as the temperature obtained by the surface gravity and the tunneling model, and the black hole entropy still follows Beckenstein-Hawking area law. Also, the heat capacity of the black hole is obtained and analyzed. It is seen that when the horizon radius and non-commutative parameter satisfy the particular conditions, the heat capacity is positive and the non-commutative black holes are thermodynamically stable. This is a different result from that of the usual Schwarichild black hole. Further, by studying the influence of generalized uncertainty principle on non-commutative black hole thermodynamics, the quantum corrections from generalized uncertainty principle for temperature, entropy and heat capacity of the non-commutative Schwarzschild black hole are given. It is found that with considering this quantum gravity effect, the obtained black hole entropy contains the item of are alogarithm. If the effect of the generalized uncertainty principle is neglected, the corrected black hole entropy can return to that in the usual case of Beckenstein-Hawing area law. Similarly, the corrected black hole temperature and heat capacity can also return to their counterparts in the case of usual Schwarzschild black hole when this quantum gravity effect is ignored.

**Keywords:** noncommutative black holes, corrected first law of black hole thermodynamics, generalize uncertainty principle, quantum corrections

**PACS:** 04.70.Dy, 04.60.Bc, 04.62.+v **DOI:** 10.7498/aps.68.20191054

* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Pvovince, China (Grant No. LY14A030001) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11373020).

† Corresponding author. E-mail: czlzj20@aliyun.com