热传导系数跳跃的三维非 Fourier 温度场分布的奇摄动双参数解*

包立平 1)† 李文彦 1) 吴立群 2)

1) (杭州电子科技大学理学院, 杭州 310018)

2) (杭州电子科技大学机械学院, 杭州 310018)

(2019 年 1 月 25 日收到; 2019 年 9 月 11 日收到修改稿)

应用非 Fourier 热传导定律构建了温度场模型, 即一类在无界域上的三维奇摄动双曲抛物方程的初边值问题. 随着温度急剧变化, 热传导系数发生跳跃, 相应可以用非线性的具有间断系数的奇摄动双参数双曲方程表示. 通过奇摄动双参数展开方法, 得到了该问题的渐近解. 首先应用奇摄动方法得到该问题的展开式, 通过对解做出估计以及古典解的存在唯一性定理给出了内解和外解的存在性、唯一性. 其次, 由奇摄动理论, 得到该类奇摄动双曲方程进行了初始层矫正, 得到了解关于时间的导数的估计. 并且通过用 Fourier 变换确定了热传导系数跳跃的位置表达式, 从而得到了解的形式渐近展开式. 最后通过余项估计, 得到了渐近解的一致有效性, 从而得到了热传导系数间断的温度场的分布.

关键词: 热传导方程, 间断系数, 一致有效估计, 双参数

PACS: 44.05.+e, 44.10.+i, 44.90.+c **DOI:** 10.7498/aps.68.20190144

1 引 言

随着超短脉冲激光加热、金属快速凝固等现代高新技术的发展, 热作用的周期时间短到皮秒以至飞秒量级的超急速, 超常规热传导规律的研究越来越引起人们的重视.

在许多实际物理问题中, 会遇到含有间断系数的扩散问题, 例如, 热传导过程中在不同温度下, 热传导系数会出现间断[1], 从而这些物理问题的数学模型就归结于间断系数问题. 如何有效和准确地求解它们仍然是一个很大的挑战. 虽然许多学者针对这类问题的数值求解做了大量的研究工作, 但是使用经典的有限元方法求解很难获得高精度的数值解. 关建飞等[1] 和沈中华等[2] 用 Fourier 热传导定律描述了板状金属材料中脉冲激光激发的超声波, 并用有限元方法进行了数值模拟. 对于常规条件下的非稳态热传导问题, 人们经常采用 Fourier 热传导定律来描述热流密度与温度梯度之间的关系, 也足够精确, 但是延伸到温度急剧变化的场合, 由于经典 Fourier 热传导定律是准平衡假设, 假定热播传播速度为无限大的热扩散行为, 就在应用中产生了问题, 实验表明温度传播速度是有限的热波行为, 因此应用非 Fourier 热传导定律更合适. 文献 [3, 4]分别报道了铁、钢铝合金等材料中的实验结果, 表明了热传播中的非 Fourier 性质. 李金娥等[5] 建立了一个双层材料层合板瞬态加热情况下的非 Fourier 热传导分析模型, 用向后差分法得到了温度场的数值解. 张浙等[6] 对非傅里叶热传导的性质、模型、模型的求解及应用与实验等几个方

* 国家自然科学基金 (批准号: 51775154) 和浙江省重点自然科学基金 (批准号: LZ15E050004) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: baolp@hdu.edu.cn

面的研究进展做了较详尽的概括与评述, 并指出了今后需要着重研究的方向. 我们采用非 Fourier 热传导定律来构建模型, 考虑由于温度急剧变化热传导系数出现跳跃的情况, 得到了非线性的具有间断系数的奇摄动双曲方程. 文献 [7] 讨论了一类二阶拟线性双曲型偏微分方程的 H_1-Galerkin 混合有限元方法, 分析了两种有限元方法, 分别证明了连续问题和离散问题解的存在唯一性. 对一维空间问题做出了误差估计, 讨论了 H_1-Galerkin 混合有限元方法在二元和三元空间问题中的推广, 通过数值例子验证了数值方法的可行性. Amirov[8] 构造了新的积分来表示具有分段常导系数和间断条件的 Sturm-Liouville 方程的基本解, 研究了边值问题的重要谱性质. Farrel 等[9] 和 Silva[10] 研究了具有间断源项的半线性微分方程奇摄动问题. 上述文献都是通过数值模拟的方法得到相关结果. Teixeria 等[11] 研究了一类微分方程系数出现间断时, 利用爆破技术对非光滑动力系统进行正则化. 文献 [12—15] 讨论了具有间断系数的微分方程的稳定性、正则性. 文献 [16] 研究了一类具有非 线性初边值条件的奇摄动问题的 n 维拟线性双曲抛物方程, 文献 [17] 研究了一类具有变动边界的初边值问题的奇摄动拟线性双曲抛物方程, 两者均给出了有效解的存在性. 文献 [18] 讨论了非 Fourier 温度场分布的奇摄动解. 文献 [19] 用数值方法研究了具有界面耦合的 Frenkel-Kontorova (FK) 晶格的热传导. 文献 [20] 通过应用数值分析方法详细分析了引起多个人工神经网络发生的内在物理机制. 以上文献均是用数值模拟的方法研究的. 文献 [21] 应用数值分析方法研究了随着偏压的增大, 即绝对负迁移率现象 (ANM), 其平均速度会减小, 并且详细讨论了 ANM 任意段产生的内在物理机制和条件. 文献 [22] 研究了具有耦合位移的对称 FK 晶格的热传导, 通过数值计算得出耦合位移对控制热流起着至关重要的作用. 但文献 [16,17] 的模型并未出现系数间断的情况. 文献 [12—15] 只是涉及了间断系数, 并没有确定位置关系. 迄今为止, 尚未见到关于具有间断系数的奇摄动双曲方程的研究的报道, 特别是未见关于间断位置未定的情形的报道.

本文考虑脉冲激光作用于材料表面基于热弹机制产生的温度场. 过去通常用 Fourier 热传导定律描述由激光激发的温度场, 但由于激光作用的周期非常短, 在瞬态热传导过程中 (特别是某些极端情况, 如激光加热等), 热量传递具有和经典热传导理论所认为的扩散行为完全不同的物理机制, 物理机制的差异反映在描述物理行为的数学表达式上, 就是说以经典的 Fourier 定律为基础建立起来的热传导理论, 已不能对这种情况下的热量传递规律做出合理的解释, 因此用 Fourier 热传导定律来描述就存在问题. 所以我们采用非 Fourier 热传导定律构造模型, 克服了这一问题. 由于温度急剧变化, 热传导系数出现跳跃, 得到了非线性的具有间断系数的奇摄动双曲方程, 应用奇摄动双参数展开法得到该问题的展开式, 并且通过给出最大模估计得到了内外解的存在唯一性, 进而通过 Fourier 变换确定了热传导系数跳跃的位置关系, 从而得到了解的形式渐近展开式. 其次通过余项估计, 得到了渐近解的一致有效性, 从而得到了完整温度场的分布. 为非 Fourier 热传导在非均匀材料领域中的应用研究提供参考依据.

2 模型建立

现在做如下的假设:

$[H_1]f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)$ 是已知的任意阶连续可微函数, 记

$$
\begin{aligned}
&f_3 = f_{1x} + f_{1y} + f_{1z},\\
&|f_1| \leqslant M\mathrm{e}^{-\frac{r}{r_0^2}+kt+\frac{z}{h}},\\
&|f_3| \leqslant M\mathrm{e}^{-\frac{r}{r_0^2}+kt+\frac{z}{h}},\\
&|\Delta f_1| \leqslant M\mathrm{e}^{-\frac{r}{r_0^2}+kt+\frac{z}{h}},\\
&|f_2| \leqslant M\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{r_0^2}+kt+\frac{z}{h}},
\end{aligned}
$$

其中 M 是正整数.

$[H_2]f(r)$ 及 $g(t)$ 是脉冲激光的空间分布, 可以表示成

$$
f(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad g(t) = \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right),
$$

式中, r_0 是激光辐照的光斑半径, t_0 是脉冲激光的上升时间.

$[H_3]u(x,y,z,t)$ 表示 t 时刻的温度分布; ρ, c, k 分别表示密度、热容量和热扩散系数. 记 $m =$

$k/(\rho c)$.

$[H_4]C^{2k+\alpha,k+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)$为 Banach 空间,

$Q_T=\bar{\Omega}\times[0,T]$, $\Omega=R^2\times(0,h)$.

$Q_T=\Omega\times[0,T]$, $\Omega=[0,R]\times[0,R]$,

$\Omega_1=[0,r^*]\times[0,z^*]$, $\Omega_2=[0,r^*]\times[z^*,h]$,

$\Omega_3=[0,r^*]\times[z^*,h]$, $\Omega_4=[0,r^*]\times[0,z^*]$,

$\Omega_5=[0,r^*]\times[0,z^*]$, $Q_{1t}=\Omega_1\times[0,t^*]$,

$Q_{2t}=\Omega_2\times[0,t^*]$, $Q_{3t}=\Omega_3\times[t^*,t]$,

$Q_{4t}=\Omega_4\times[t^*,\varphi^{-1}(r,z)]$, $Q_{5t}=\Omega_5\times[\varphi^{-1}(r,z),t]$,

在Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4,上, $k(u)=k_1$, 在Ω_5上, $k(u)=k_2(\mu u)$, $\Omega_1\cap\Omega_2\cap\Omega_3\cap\Omega_4\cap\Omega_5=\Omega$.

$[H_5]$ $k(u)$为热传导系数,

$$k(u)=\begin{cases}k_1, & u<C,\\ k_2(\mu u), & u>C,\end{cases}$$

k_1, C为常数, k_2导数连续, μ是小参数. 假设热传导系数在$T=C$处满足$z^*=\varphi(x,y,t^*,\varepsilon)=0$, 其中$t^*<t<T$, t^*为发生跳跃的时间, 其中

$$\varphi(x,y,t,\varepsilon)=\varphi_0(x,y,t)+\varepsilon\varphi_1(x,y,t)+\cdots+\varepsilon^n\varphi_n(x,y,t)+\cdots$$

$z=\varphi(x,y,t,\varepsilon)$待定.

根据非 Fourier 热传导理论, 温度场$u(x,y,z,t)$满足以下偏微分方程

$$\varepsilon\frac{\partial^2u(x,y,z,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}=\nabla\cdot(k(u)\nabla u),\quad(1)$$

其初始条件和边界条件为

$$\begin{aligned}-k\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial z}\Big|_{z=0}&=I_0(1-R)f(r)g(t),\\ \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial z}\Big|_{z=h}&=0,\\ u(x,y,z,0)&=f_1(x,y,z),\\ u_t(x,y,z,t)|_{t=0}&=f_2(x,y,z),\end{aligned}$$

式中, R是样品表面的反射率; h是样品的厚度; I_0是单脉冲激光的辐照能量. 令$m=k_1$, 把问题(1)改写为

$$l^{(-)}\begin{cases}\varepsilon\dfrac{\partial^2u^{(-)}(x,y,z,t)}{\partial t^2}+\dfrac{\partial u^{(-)}(x,y,z,t)}{\partial t}=m\Delta u^{(-)}(x,y,z,t), & \\ -k\dfrac{\partial u^{(-)}(x,y,z,t)}{\partial z}\Big|_{z=0}=I_0(1-R)f(r)g(t), & 0<t<t^*,\\ \dfrac{\partial u^{(-)}(x,y,z,t)}{\partial z}\Big|_{z=h}=0, & 0<t<t^*,\\ u^{(-)}(x,y,z,t)|_{z=\varphi(x,y,t,\varepsilon)}=C, & t^*<t<T,\\ u^{(-)}(x,y,z,0)=f_1(x,y,z), & 0<t<T,\\ u_t^{(-)}(x,y,z,t)|_{t=0}=f_2(x,y,z), & 0<t<T.\end{cases}\quad(2)$$

$$l^{(+)}\begin{cases}\varepsilon u_{tt}^{(+)}+u_t^{(+)}=\dfrac{1}{\rho c}\nabla(k_2\nabla u^+),\\ u^{(+)}(x,y,z,t)|_{z=\varphi(x,y,t,\varepsilon)}=C,\\ \qquad t^*<t<T,\\ u^{(+)}(x,y,z,t)_z|_{z=h}=0,\\ \qquad t^*<t<T.\end{cases}\quad(3)$$

3 形式展开

分别对 (2) 式和 (3) 式构造形式渐近解.

首先对 (2) 式做正则展开, 得到

$$\bar{u}(x,y,z,t,\varepsilon)=\bar{u}_0^{(-)}(x,y,z,t)+\varepsilon\bar{u}_1^{(-)}(x,y,z,t)+\varepsilon^2\bar{u}_2^{(-)}(x,y,z,t)+\cdots$$

比较ε的同次幂系数, 可得:

$$\begin{cases}\bar{u}_{0t}^{(-)}=m\Delta\bar{u}_0^{(-)},\\ \bar{u}_0^{(-)}(x,y,z,t)|_{t=0}=f_1,\\ -k\bar{u}_{0z}^{(-)}(x,y,z,t)|_{z=0}=I_0(1-R)f(r)g(t),\\ \qquad 0<t<t^*,\\ \bar{u}_0^{(-)}(x,y,z,t)|_{z=\varphi_0(x,y,t)}=C, \quad t^*<t<T,\\ \bar{u}_{0z}^{(-)}(x,y,z,t)|_{z=h}=0, \quad 0<t<T.\end{cases}\quad(4)$$

$$\begin{cases} \bar{u}_{1t}^{(-)} = m\Delta u_1^{(-)} - u_{0tt}^{(-)}, \\ \bar{u}_1^{(-)}(x,y,z,t)|_{t=0} = 0, \\ \bar{u}_{1z}^{(-)}(x,y,z,t)|_{z=0} = 0, & 0 < t < t^*, \\ \bar{u}_1^{(-)}(x,y,z,t)|_{z=\varphi_1(x,y,t)} \\ = -H_1^{(-)}(x,y,\varphi_0(x,y,t),t), & t^* < t < T, \\ \bar{u}_{1z}^{(-)}(x,y,z,t)|_{z=h} = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{5}$$

$$\cdots$$

$$\begin{cases} \bar{u}_{nt}^{(-)} = m\Delta u_n^{(-)} - u_{n-1tt}^{(-)}, \\ \bar{u}_n^{(-)}(x,y,z,t)|_{t=0} = -P_{n-1}|_{t=0}, & 0<t<t^*, \\ \bar{u}_{nz}^{(-)}(x,y,z,t)|_{z=0} = 0, & 0<t<t^*, \\ \bar{u}_n^{(-)}(x,y,z,t)|_{z=\varphi_n(x,y,t)} \\ = -H_n^{(-)}(x,y,\varphi(x,y,t),t) & t^*<t<T, \\ \bar{u}_{nz}^{(-)}(x,y,z,t)|_{z=h} = 0, & 0<t<T, \end{cases} \tag{6}$$

其中 $H_n^{(-)}(t,\varphi(t))$ 是与 $\varphi_0(x,y,t)$, $\varphi_1(x,y,t)$, $\varphi_2(x,y,t),\cdots,\varphi_{n-1}(x,y,t)$ 和 $\bar{u}_0^{(-)},\cdots,\bar{u}_{n-1}^{(-)}$ 相关的已知函数.

现给出 (2) 式的合成展开式:

$$\begin{aligned} & u(x,y,z,t,\varepsilon) \\ = & \bar{u}^{(-)}(x,y,z,t,\varepsilon) + \varepsilon p(x,y,z,t,\varepsilon)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}}, \\ & p \approx \sum_{j=0}^{\infty} p_j\varepsilon^j, \quad \bar{u}^{(-)} \approx \sum_{i=0}^{\infty} \bar{u}_i^{(-)}\varepsilon^i. \end{aligned} \tag{7}$$

将 (7) 式代入到 (2) 式中, 比较 ε 的同次幂系数, 可得

$$\begin{cases} p_{0t} = -m\Delta p_0, \\ p_0|_{t=0} = \bar{u}_{0t}^{(-)}|_{t=0} - f_2, \\ p_{0z}|_{z=0} = 0, \\ p_0|_{z=\varphi_0(x,y,t)} = 0, \\ p_{0z}|_{z=h} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

$$\cdots$$

$$\begin{cases} p_{nt} = -m\Delta p_n + p_{n-1tt}, \\ p_n|_{t=0} = \bar{u}_{nt}^{(-)}|_{t=0} + p_{n-1t}|_{t=0}, \\ p_{nz}|_{z=0} = 0, \\ p_n|_{z=\varphi_n(x,y,t)} = 0, \\ p_{nz}|_{z=h} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

对 (3) 式做正则展开, 得到:

$$\begin{aligned} u^{(+)}(x,y,z,t,\varepsilon) = & \sum_{i,j=0}^{n} \bar{u}_{ij}^{(+)}\varepsilon^i\mu^j \\ = & \bar{u}_{00}^{(+)}(x,y,z,t) + \varepsilon\mu\bar{u}_{11}^{(+)}(x,y,z,t) \\ & + \cdots + \varepsilon^k\mu^l\bar{u}_{kl}^{(+)}(x,y,z,t) + \cdots, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} k_2(\mu\bar{u}^{(+)}) = & k(0) + k'(0)\mu\bar{u}^{(+)}(x,y,z,t) + \cdots \\ = & \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!}k^m(0)\mu^m\bar{u}^{(+)m}. \end{aligned} \tag{11}$$

将 (10), (11) 式代入到 (3) 式中, 可得

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=0}^{n} \varepsilon^{i+1}\mu^j\bar{u}_{ijtt}^{(+)} + \sum_{i,j=0}^{n} \varepsilon^i\mu^j\bar{u}_{ijt}^{(+)} = \frac{1}{\rho c}k_2(0)\sum_{i,j=0}^{n} \varepsilon^i\mu^j\bar{u}_{ijr}^{(+)} + \frac{1}{\rho c}\cdot\frac{1}{r}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m!}k_2^{(m)}(0)\mu^m\bar{u}^{(+)m}\cdot\sum\bar{u}_{ijr}^{(+)}\varepsilon^i\mu^i \\ & + \frac{1}{\rho c}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m!}k_2^{(m)}(0)\mu^{(+)m}m\sum_{\sum p_{ij}=m-1}\frac{(m-1)!}{\prod p_{ij}!}\prod\bar{u}_{ij}^{(+)p_{ij}}\mu^{jp_{ij}}\varepsilon^{ip_{ij}}\cdot\left(\sum\bar{u}_{ijr}^{(+)}\varepsilon^i\mu^j\right)^2 \\ & + \frac{1}{\rho c}k_2(0)\sum_{i,j=0}^{N}\varepsilon^i\mu^j\bar{u}_{ijrr}^{(+)} + \frac{1}{\rho c}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m!}k_2^{(m)}(0)\mu^m\sum_{\sum p_{ij}=m}\frac{m!}{\prod p_{ij}!}\prod\bar{u}_{ij}^{p_{ij}}\mu^{jp_{ij}}\varepsilon^{ip_{ij}}\cdot\left(\sum\bar{u}_{ijrr}^{(+)}\varepsilon^i\mu^j\right) \\ & + \frac{1}{\rho c}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m!}k_2^{(m)}(0)\mu^m m\sum_{\sum p_{ij}=m-1}\frac{(m-1)!}{\prod p_{ij}!}\prod\bar{u}_{ij}^{(+)p_{ij}}\mu^{jp_{ij}}\varepsilon^{ip_{ij}}\cdot\left(\sum\bar{u}_{ijz}^{(+)}\varepsilon^i\mu^j\right)^2 \\ & + \frac{1}{\rho c}k_2(0)\sum_{i,j=0}^{N}\varepsilon^i\mu^j\bar{u}_{ijzz}^{(+)} + \frac{1}{\rho c}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m!}k_2^{(m)}(0)\mu^m\sum_{\sum p_{ij}=m}\frac{m!}{\prod p_{ij}!}\prod\bar{u}_{ij}^{(+)p_{ij}}\mu^{jp_{ij}}\varepsilon^{ip_{ij}}\cdot\left(\sum\bar{u}_{ijzz}^{(+)}\varepsilon^i\mu^j\right). \end{aligned} \tag{12}$$

讨论 (12) 式中的 $\varepsilon^k\mu^l$ 项的系数 $p_{k,l}$ 只能为 0. 因为 $\mu^{m+\sum jp_{ij}+2j}=\mu^l$ $(1\leqslant m\leqslant l)$ 即

$$m+\sum_{i,j=0}^{k,l} jp_{ij}+2j=l. \tag{13}$$

(13) 式可变形为 $m+\sum\limits_{i,j=0}^{k-1,l-1} jp_{ij}+lp_{k,l}+2j=l$, 易得 $p_{k,l}$ 为 0.

同理, ε 的次数为

$$\sum ip_{ij}+2i=k. \tag{14}$$

(14) 式可变形为 $\sum\limits_{i,j=0}^{k-1,l-1} ip_{ij}+kp_{k,l}+2i=k$, 易得 $p_{k,l}$ 为 0.

比较 $\varepsilon\mu$ 的同次幂系数, 可得 (3) 式的展开式为

$$\begin{cases}\bar{u}_{00t}^{(+)}=\dfrac{1}{\rho c}\cdot\dfrac{1}{r}k_2(0)\bar{u}_{00r}^{(+)}+\dfrac{1}{\rho c}k_2(0)\bar{u}_{00rr}^{(+)}\\ \qquad +\dfrac{1}{\rho c}k_2(0)\bar{u}_{00zz}^{(+)},\\ \bar{u}_{00z}^{(+)}|_{z=\varphi_0(x,y,t)}=C, \qquad t^*<t<T,\\ \bar{u}_{00z}^{(+)}|_{z=h}=0, \qquad t^*<t<T.\end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases}\bar{u}_{k-1,ltt}^{(+)}+\bar{u}_{klt}^{(+)}=\dfrac{1}{\rho c}\cdot\dfrac{1}{r}k_2(0)\bar{u}_{klr}^{(+)}+\dfrac{1}{\rho c}\cdot\dfrac{1}{r}\sum\limits_{m=1}^{N}\dfrac{1}{m!}k_2^{(m)}(0)\sum\limits_{\sum p_{ij}=m}\dfrac{m!}{\prod p_{ij}!}\prod\limits^{k-1,l-1}\bar{u}_{ij}^{(+)p_{ij}}\cdot\sum\limits^{k-1,l-1}\bar{u}_{ijr}^{(+)}\\ \qquad +\dfrac{1}{\rho c}\sum\limits_{m=1}^{N}\dfrac{1}{m!}k_2^{(m)}(0)m\sum\limits_{\sum p_{ij}=m-1}\dfrac{(m-1)!}{\prod\limits^{k-1,l-1}p_{ij}!}\prod\limits^{k-1,l-1}\bar{u}_{ij}^{(+)p_{ij}}\cdot\left(\sum\limits^{k-1,l-1}\bar{u}_{ijr}\right)^{(+)2}+\dfrac{1}{\rho c}k_2(0)\bar{u}_{klrr}^{(+)}\\ \qquad +\dfrac{1}{\rho c}\sum\limits_{m=1}^{N}\dfrac{1}{m!}k_2^{(m)}(0)\sum\limits_{\sum p_{ij}=m}\dfrac{m!}{\prod\limits^{k-1,l-1}p_{ij}!}\prod\limits^{k-1,l-1}\bar{u}_{ij}^{(+)p_{ij}}\cdot\sum\limits^{k-1,l-1}\bar{u}_{ijrr}^{(+)}\\ \qquad +\dfrac{1}{\rho c}\sum\limits_{m=1}^{N}\dfrac{1}{m!}k_2^{(m)}(0)m\sum\limits_{\sum p_{ij}=m-1}\dfrac{(m-1)!}{\prod\limits^{k-1,l-1}p_{ij}!}\prod\limits^{k-1,l-1}\bar{u}_{ij}^{(+)p_{ij}}\cdot\left(\sum\limits^{k-1,l-1}\bar{u}_{ijz}\right)^{(+)2}+\dfrac{1}{\rho c}k_2(0)\bar{u}_{klzz}^{(+)}\\ \qquad +\dfrac{1}{\rho c}\sum\limits_{m=1}^{N}\dfrac{1}{m!}k_2^{(m)}(0)\sum\limits_{\sum p_{ij}=m}\prod\limits^{k-1,l-1}\bar{u}_{ij}^{(+)p_{ij}}\cdot\sum\limits^{k-1,l-1}\bar{u}_{ijzz}^{(+)},\\ \bar{u}_{k,lz}^{(+)}|_{z=\varphi_k(x,y,t)}=-H_k^{(+)}(x,y,\varphi_k(x,y,t),t), \quad t^*<t<T,\\ \bar{u}_{k,lz}^{(+)}|_{z=h}=0, \quad t^*<t<T,\end{cases}$$

其中 $H_k^{(+)}(t,\varphi(x,y,t))$ 是与 $\varphi_0(x,y,t),\varphi_1(x,y,t),\varphi_2(x,y,t),\cdots,\varphi_{k-1}(x,y,t)$ 和 $\bar{u}_1^{(+)},\cdots,\bar{u}_{k-1}^{(+)}$ 相关的已知函数.

我们给出如下定理.

定理 1 考虑下述线性方程在 $Q_T=\bar{\varOmega}\times(0,T)$, $\varOmega=R^2\times(0,h)$ 的初边值问题,

$$\begin{cases}u_t=m\Delta u+g,\\ u(x,y,z,t)|_{t=0}=h_1,\\ u_z(x,y,z,t)|_{z=0}=h_2,\\ u_z(x,y,z,t)|_{z=h}=h_3.\end{cases} \tag{16}$$

若满足 $|g|\leqslant M\mathrm{e}^{-\frac{r}{r_0^2}+kt+\frac{z}{h}}$, 且 $g\in C^{1,2}(Q_T)$, $|h_1|\leqslant M\mathrm{e}^{-\frac{r}{r_0^2}+kt+\frac{z}{h}}$, $|h_2|\leqslant M\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{r_0^2}+kt+\frac{z}{h}}$, $|h_3|\leqslant M\mathrm{e}^{-\frac{r}{r_0^2}+kt+\frac{z}{h}}$, $h_2,h_3\in C^{3,\frac{3}{2}}(Q_T)$, 其中 M 为正整数, 则 u 存在唯一, 且满足估计式 $|u|\leqslant D\mathrm{e}^{-\frac{r}{r_0^2}+kt+\frac{z}{h}}$, 其中 D 满足

$$D=\begin{cases}\dfrac{M}{k+\dfrac{m}{r_0^2}-\dfrac{1}{h^2}}, & (x,y,z,t)\in Q_T\backslash\partial_p Q_T,\\ hM\mathrm{e}^{\frac{1}{4r_0^2}}+1, & (x_1,y_1,z_1,t_1)\in\partial_p Q_T|_{z=0},\\ hM, & (x_1,y_1,z_1,t_1)\in\partial_p Q_T|_{z=h},\\ M\mathrm{e}^{kT}, & (x_1,y_1,z_1,t_1)\in\partial_p Q_T|_{t=0}.\end{cases}$$

证明 上述估计式已在文献 [18] 中证明, 在此不详述. 下面证明存在唯一性.

考虑 (1) 在 $Q_{T_k}=\bar{\varOmega}_k\times(0,T)$ 上的初边值问题, 其中 $\varOmega_k\subset\varOmega$ 是一个有界域. 因为 $g\in C^{1,2}(Q_{T_k})$,

$h_2, h_3 \in C^{3,\frac{3}{2}}(\Omega_{T_k})$, 满足文献 [15] 中定理 8.3.1 的条件, 则 (1) 在 Q_{T_k} 上的初边值问题存在唯一的解 $u \in C^{3,\frac{3}{2}}(Q_{T_k})$. 因为 $|u| \leqslant D\mathrm{e}^{-\frac{r}{r_0^2}+kt+\frac{z}{h}} \leqslant D\mathrm{e}^{kT+1}$, 即 D 有界, $|g| \leqslant M\mathrm{e}^{-\frac{r}{r_0^2}+kt+\frac{z}{h}} \leqslant M\mathrm{e}^{kT+1}$, 所以与边界 k 的选取无关, 则在无界域上该问题的解存在且唯一. 同理, 可得 (3) 式的解的存在唯一性. 证毕.

推论 问题 (8)—(13) 的解存在唯一, 且满足 $|u_n| \leqslant D\mathrm{e}^{-\frac{r}{r_0^2}+kt+\frac{z}{h}}$, $|p_n| \leqslant D\mathrm{e}^{-\frac{r}{r_0^2}+kt+\frac{z}{h}}$, $|u_{ntt}| \leqslant D\mathrm{e}^{-\frac{r}{r_0^2}+kt+\frac{z}{h}}$, $|p_{ntt}| \leqslant D\mathrm{e}^{-\frac{r}{r_0^2}+kt+\frac{z}{h}}$.

根据定理可得 (4)—(15) 式的解的存在唯一性, 不再赘述.

4 热传导系数跳跃位置

定理 2 热传导系数 $k(u)$ 在 $u = C$ 处发生跳跃的位置 $z = \varphi(x,y,t,\varepsilon) = \varphi_0(x,y,t,\varepsilon) + \varepsilon\varphi_1(x,y,t,\varepsilon) + \cdots \varepsilon^n\varphi_n(x,y,t,\varepsilon) + \cdots$ 满足

$$\varphi_0 = -\int_{t^*}^{\infty} u_{0z}^{-1}(x,y,\varphi_0)u_{0t}(x,y,\varphi_0)\mathrm{d}t, \tag{17}$$

$$\begin{cases} u_{0z}(x,y,\varphi_0)\varphi_{nt} + u_{0zz}(x,y,\varphi_0)\varphi_n \\ \quad + u_{0tz}\varphi_n = G(x,y,\varphi_0,\varphi_1,\cdots), \\ \varphi_n(x,y,t^*) = 0, \end{cases} \tag{18}$$

G 是由 φ_0, …, φ_{n-1} 决定的已知函数.

证明 考虑在 $[0,T]\times[0,h]\times R^2$ 上的温度场分布

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t} = m\Delta u(x,y,z,t), \tag{19}$$

其初始条件和边界条件为

$$-k_1\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial z}\Big|_{z=0} = I_0(1-R)f(r)g(t),$$

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial z}\Big|_{z=h} = 0,$$

$$u(x,y,z,0) = f_1(x,y,z),$$

$$u_t(x,y,z,t)|_{t=0} = f_2(x,y,z).$$

对 (19) 式的 x, y 进行 Fourier 变换, 可得到

$$\begin{cases} \varepsilon\tilde{\tilde{u}}_{tt} + \tilde{\tilde{u}}_t = \dfrac{k_1}{\rho c}\lambda^2\tilde{\tilde{u}} + \dfrac{k_1}{\rho c}\eta^2\tilde{\tilde{u}} + \dfrac{k_1}{\rho c}\tilde{\tilde{u}}_{zz}, \\ \tilde{\tilde{u}}|_{t=0} = \tilde{\tilde{f}}_1(\lambda,\eta,z), \\ \tilde{\tilde{u}}_t|_{t=0} = \tilde{\tilde{f}}_2(\lambda,\eta,z), \\ \tilde{\tilde{u}}_z|_{z=0} = \tilde{\tilde{h}}_1(\lambda,\eta), \\ \tilde{\tilde{u}}_z|_{z=h} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

将 $\tilde{\tilde{u}} = \sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\tilde{\tilde{u}}_i$ 代入 (20) 式, 比较 ε 的同次幂系数可得

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{u}}_{0t} = m(\lambda^2+\eta^2)\tilde{\tilde{u}}_0 + m\tilde{\tilde{u}}_{0zz}, \\ \tilde{\tilde{u}}_0|_{t=0} = \tilde{\tilde{f}}_1(\lambda,\eta,z), \\ \tilde{\tilde{u}}_{0z}|_{z=0} = \tilde{\tilde{h}}_1(\lambda,\eta), \\ \tilde{\tilde{u}}_{0z}|_{z=h} = 0. \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{u}}_{n-1tt} + \tilde{\tilde{u}}_{nt} = m(\lambda^2+\eta^2)\tilde{\tilde{u}}_n + m\tilde{\tilde{u}}_{nzz}, \\ \tilde{\tilde{u}}_n|_{t=0} = -\tilde{\tilde{p}}_n|_{t=0}, \\ \tilde{\tilde{u}}_{nz}|_{z=0} = 0, \\ \tilde{\tilde{u}}_{nz}|_{z=h} = 0. \end{cases}$$

所以

$$\tilde{\tilde{u}}_0 = \tilde{\tilde{v}} + \tilde{\tilde{w}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\mathrm{e}^{m(\lambda^2+\eta^2-n^2)t}\cos nz + \frac{-\tilde{\tilde{h}}_1(\lambda,\eta,t)}{2h}z^2 + \tilde{\tilde{h}}_1(\lambda,\eta)z,$$

其中 $C_n = \dfrac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f\mathrm{d}z}{\prod \mathrm{e}^{m(\lambda^2+\eta^2-n^2)t}\left[\dfrac{1}{m(\lambda^2+\eta^2-n^2)} - m(\lambda^2+\eta^2-n^2)\right]}$, $f = -\tilde{\tilde{w}}_t + m(\lambda^2+\eta^2)\tilde{\tilde{w}} + m\tilde{\tilde{w}}_{zz}$. 可求得 $\tilde{\tilde{u}}_n = \sum C_n\mathrm{e}^{m(\lambda^2+\eta^2-n^2)t}\cos(nz)$, 其中 $C_n = \dfrac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f\mathrm{d}z}{\prod \mathrm{e}^{m(\lambda^2+\eta^2-n^2)t}\left[\dfrac{1}{m(\lambda^2+\eta^2-n^2)} - m(\lambda^2+\eta^2-n^2)\right]}$, $f = -\tilde{\tilde{u}}_{n-1tt}$. 化简得

$$u_0=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{m(\lambda^2+\eta^2-n^2)t}\cos nz+\frac{-\tilde{\tilde{h}}_1(\lambda,\eta,t)}{2h}z^2+\tilde{\tilde{h}}_1(\lambda,\eta)z\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\lambda, \tag{21}$$

$$u_n=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum C_n\mathrm{e}^{m(\lambda^2+\eta^2-n^2)t}\cos nz\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\lambda, \tag{22}$$

$$u(x,y,\varphi(x,y,t),t,\varepsilon)=C, \tag{23}$$

$$u_t+u_z\varphi_t=0, \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,t)=&\ \varphi_0(x,y,t)+\varepsilon\varphi_1(x,y,t)+\cdots\\&+\varepsilon^n\varphi_n(x,y,t)+\cdots,\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{N}u_{nt}(x,y,\varphi_0)\varepsilon^n\\&+\sum_{n=0}^{N}u_{ntz}(x,y,\varphi_0)\varepsilon^n\cdot\sum_{n=1}^{N}\varphi_n\varepsilon^n+\cdots\\&+\left[\sum_{n=0}^{N}u_{nz}(x,y,\varphi_0)\varepsilon^n+\sum_{n=0}^{N}u_{nzz}(x,y,\varphi_0)\varepsilon^n\right.\\&\left.\times\sum_{n=0}^{N}\varphi_n\varepsilon^n+\cdots\right]\sum_{n=0}^{N}\varphi_{nt}\varepsilon^n=0,\end{aligned} \tag{26}$$

$u_{0t}(x,y,\varphi_0)+u_{0z}(x,y,\varphi_0)\varphi_{0x}=0$, $\varphi_0(x,y,t^*)=0$, $u_{0z}(x,y,\varphi_0)\varphi_{nt}+u_{0zz}(x,y,\varphi_0)\varphi_n+u_{0tz}\varphi_n=G(x,y,\varphi_0,\varphi_1,\cdots)$, $\varphi_n(x,y,t^*)=0$则确定了热传导系数发生跳跃的位置关系. 证毕.

由定理2可知, 热传导系数的跳跃点位置是由问题(17)所决定的, 由条件[H5], 在t^*时刻, $\varphi(x,y,t^*,\varepsilon)=0$, 这是在$z=0$平面上的位置, 此后随着温度的变化, 位置由(17)式决定. 跳跃点位置$z=\varphi(x,y,\varepsilon)$是一个曲面, 将整个空间分割成$u>C$和$u<C$两个部分. 在$u<C$时, 热传导系数为$k_1$, 而在$u>C$时, 热传导系数为$k_2(\mu u)$. 在空间$\Omega$中, 温度场是连续的, 但温度场在跳跃位置上的变化率比较大.

5 余项估计

定理3 (1)式的余项

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\ \bar{u}_0+\varepsilon\bar{u}_1+\cdots+\varepsilon^N\bar{u}_N+\varepsilon p_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}}+\cdots\\&+\varepsilon^N p_{N-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}}+\varepsilon^{N+1}R,\end{aligned}$$

满足$\|R\|_{L^2(Q_T)}+\|\nabla R\|_{L^2(Q_T)}+\|R_t\|_{L^2(Q_T)}\leqslant M$.

证明 (1)式经过极坐标变换后可得

$$\begin{aligned}&\varepsilon u_{tt}+u_t\\=&\ \frac{1}{\rho c}\frac{1}{r}k(\mu u)u_r+\frac{1}{\rho c}k(\mu u)_r u_r+\frac{1}{\rho c}k(\mu u)u_{rr}\\&+\frac{1}{\rho c}k(\mu u)_z u_z+\frac{1}{\rho c}k(\mu u)u_{zz},\end{aligned} \tag{27}$$

考虑(1)式的余项

$$\begin{aligned}&u(x,y,z,t)\\=&\ \bar{u}_0+\varepsilon\bar{u}_1+\cdots+\varepsilon^N\bar{u}_N+\varepsilon p_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}}+\cdots\\&+\varepsilon^N p_{N-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}}+\varepsilon^{N+1}R.\end{aligned} \tag{28}$$

将(26)式代入到(25)式中, 可得

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits_{i,j=0}^{n}\varepsilon^{i+1}\mu^j\bar{u}_{ijtt}^{(+)}+\sum\nolimits_{i,j=0}^{n}\varepsilon^i\mu^j\bar{u}_{ijt}^{(+)}+\varepsilon^{N+2}R_{tt}+\varepsilon^{N+1}R_t\\=&\ \frac{1}{\rho c}\frac{1}{r}\sum\nolimits_{m=0}^{N}\frac{1}{m!}k_2^m(0)\mu^m\left(\sum\nolimits_{i,j=0}^{N}\varepsilon^i\mu^j\bar{u}_{ij}+\varepsilon^{N+1}R\right)^m\left(\sum\nolimits_{i,j=0}^{N}\varepsilon^i\mu^j\bar{u}_{ijr}+\varepsilon^{N+1}R_r\right)\\&+\frac{1}{\rho c}\sum\nolimits_{m=0}^{N}\frac{1}{m!}k_2^m(0)\mu^m m\left(\sum\nolimits_{i,j=0}^{N}\varepsilon^i\mu^j\bar{u}_{ij}+\varepsilon^{N+1}R\right)^{m-1}\cdot\left(\sum\nolimits_{i,j=0}^{N}\varepsilon^i\mu^j\bar{u}_{ijr}+\varepsilon^{N+1}R_r\right)^2\\&+\frac{1}{\rho c}\sum\nolimits_{m=0}^{N}\frac{1}{m!}k_2^m(0)\mu^m\left(\sum\nolimits_{i,j=0}^{N}\varepsilon^i\mu^j\bar{u}_{ij}+\varepsilon^{N+1}R\right)^m\left(\sum\nolimits_{i,j=0}^{N}\varepsilon^i\mu^j\bar{u}_{ijrr}+\varepsilon^{N+1}R_{rr}\right)\\&+\frac{1}{\rho c}\sum\nolimits_{m=0}^{N}\frac{1}{m!}k_2^m(0)\mu^m m\left(\sum\nolimits_{i,j=0}^{N}\varepsilon^i\mu^j\bar{u}_{ij}+\varepsilon^{N+1}R\right)^{m-1}\cdot\left(\sum\nolimits_{i,j=0}^{N}\varepsilon^i\mu^j\bar{u}_{ijz}+\varepsilon^{N+1}R_z\right)^2\\&+\frac{1}{\rho c}\sum\nolimits_{m=0}^{N}\frac{1}{m!}k_2^m(0)\mu^m\left(\sum\nolimits_{i,j=0}^{N}\varepsilon^i\mu^j\bar{u}_{ij}+\varepsilon^{N+1}R\right)^m\left(\sum\nolimits_{i,j=0}^{N}\varepsilon^i\mu^j\bar{u}_{ijzz}+\varepsilon^{N+1}R_{zz}\right),\end{aligned} \tag{29}$$

可得

$$\varepsilon R_{2tt}+R_{2t}-m\Delta R=-2\bar{u}_{Ntt}-p_{Ntt}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}},\ R_z|_{z=h}=0,\ R_z|_{z=\varphi(x,y,t)}=C,\ R|_{t=0}=0,\ R_t|_{t=0}=0,\tag{30}$$

(28) 式中, 记 $f=-2\bar{u}_{Ntt}-p_{Ntt}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}}$, 由推论可得 $|\bar{u}_{Ntt}|\leqslant M\mathrm{e}^{kT}$, $|p_{Ntt}|\leqslant M\mathrm{e}^{kT}$. 所以 $\displaystyle\int_{Q_T}f^2\mathrm{d}Q_T\leqslant\frac{4}{k}M\mathrm{e}^{kT}$, 显然 $\displaystyle\int_{Q_T}f^2\mathrm{d}Q_T$ 有界.

(28) 式左右同乘 $2R_t$, 并在 $Q_T=Q_{1T}\bigcup Q_{2T}\bigcup Q_{3T}\bigcup Q_{4T}\bigcup Q_{5T}$ 上积分, 可得

$$\int_{Q_T}2\varepsilon R_tR_{tt}\mathrm{d}Q_T+\int_{Q_T}2R_t^2\mathrm{d}Q_T-\int_{Q_T}2mR_t\Delta R\mathrm{d}Q_T=\int_{Q_T}2fR_t\mathrm{d}Q_T,\tag{31}$$

其中,

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T}2\varepsilon R_tR_{tt}\mathrm{d}Q_T=\int_{Q_{1t}}2\varepsilon R_tR_{tt}\mathrm{d}Q_{1t}+\int_{Q_{2t}}2\varepsilon R_tR_{tt}\mathrm{d}Q_{2t}+\int_{Q_{3t}}2\varepsilon R_tR_{tt}\mathrm{d}Q_{3t}+\int_{Q_{4t}}2\varepsilon R_tR_{tt}\mathrm{d}Q_{4t}\\&+\int_{Q_{5t}}2\varepsilon R_tR_{tt}\mathrm{d}Q_{5t}=\int_0^{r^*}\int_0^{t^*}\int_0^{z^*}\varepsilon(R_t^2)_t\mathrm{d}Q_{1t}+\int_0^{r^*}\int_0^{t^*}\int_{z^*}^{h}\varepsilon(R_t^2)_t\mathrm{d}Q_{2t}+\int_0^{r^*}\int_{t^*}^{t}\int_{z^*}^{h}\varepsilon(R_t^2)_t\mathrm{d}Q_{3t}\\&+\int_0^{r^*}\int_{t^*}^{\varphi^{-1}(r,z)}\int_0^{z^*}\varepsilon(R_t^2)_t\mathrm{d}Q_{4t}+\int_0^{r^*}\int_{\varphi^{-1}(r,z)}^{t}\int_0^{z^*}\varepsilon(R_t^2)_t\mathrm{d}Q_{5t}=\int_0^{r^*}\int_0^{z^*}\varepsilon(R_t^2)_t\mathrm{d}z\mathrm{d}r,\end{aligned}\tag{32}$$

(29) 式的 $\displaystyle-\int_{Q_T}2mR_t\Delta R\mathrm{d}Q_T=-2m\int_{Q_T}divR_t\nabla R\mathrm{d}Q_T+2m\int_{Q_T}\nabla R_t\nabla R\mathrm{d}Q_T=m\int_{Q_T}|\nabla R|_t^2\mathrm{d}Q_T$,

$$\begin{aligned}&m\int_{Q_T}|\nabla R|_t^2\mathrm{d}Q_T=m\int_{Q_{1t}}|\nabla R|_t^2\mathrm{d}Q_{1t}+m\int_{Q_{2t}}|\nabla R|_t^2\mathrm{d}Q_{2t}+m\int_{Q_{3t}}|\nabla R|_t^2\mathrm{d}Q_{3t}+m\int_{Q_{4t}}|\nabla R|_t^2\mathrm{d}Q_{4t}\\&+m\int_{Q_{5t}}|\nabla R|_t^2\mathrm{d}Q_{5t}=m\int_0^{r^*}\int_0^{t^*}\int_0^{z^*}|\nabla R|_t^2\mathrm{d}Q_{1t}+m\int_0^{r^*}\int_0^{t^*}\int_{z^*}^{h}|\nabla R|_t^2\mathrm{d}Q_{2t}+m\int_0^{r^*}\int_{t^*}^{t}\int_{z^*}^{h}|\nabla R|_t^2\mathrm{d}Q_{3t}\\&+m\int_0^{r^*}\int_{t^*}^{\varphi^{-1}(r,z)}\int_0^{z^*}|\nabla R|_t^2\mathrm{d}Q_{4t}+m\int_0^{r^*}\int_{\varphi^{-1}(r,z)}^{t}\int_0^{z^*}|\nabla R|_t^2\mathrm{d}Q_{5t}=m\int_0^{r^*}\int_0^{h}|\nabla R|_t^2\mathrm{d}z\mathrm{d}r,\end{aligned}\tag{33}$$

将 (30), (31) 式代入到 (29) 式, 化简可得

$$\int_0^{r^*}\int_0^{h}\varepsilon R_t^2(r,z,t)\mathrm{d}z\mathrm{d}r+\int_{Q_T}R_t^2\mathrm{d}Q_T+m\int_0^{r^*}\int_0^{h}|\nabla R(r,z,t)|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}r\leqslant\int_{Q_T}f^2\mathrm{d}Q_T,$$

其中

$$f^2=-2u_{Ntt}^2-2\varepsilon^2p_{Ntt}^2\mathrm{e}^{-\frac{2t}{\varepsilon}}.\tag{34}$$

由 $\displaystyle\int_{Q_T}R_t^2\mathrm{d}Q_T\leqslant\int_{Q_T}f^2\mathrm{d}Q_T$, 记 $\displaystyle L=\int R^2\mathrm{d}\varOmega$, 有

$$\int_{Q_T}(R^2)_t\mathrm{d}Q_T=2\int_{Q_T}RR_t\mathrm{d}Q_T\leqslant\int_{Q_T}R^2\mathrm{d}Q_T+\int_{Q_T}R_t^2\mathrm{d}Q_T,$$

$$L\leqslant\int_0^tL\mathrm{d}t+\int_{Q_T}R_t^2\mathrm{d}Q_T\leqslant\int_0^tL\mathrm{d}t+\int_{Q_T}f^2\mathrm{d}Q_T,$$

记 $\displaystyle v=\int_0^tL\mathrm{d}t$, 根据 Gronwall 不等式, 可得 $\displaystyle\int_{Q_T}R^2\mathrm{d}Q_T\leqslant\|f\|^2(\mathrm{e}^T-1)$. 因为 $\displaystyle\int_0^{r^*}\int_0^h|\nabla R|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}r\leqslant||f||^2$, 所以 $\displaystyle\int_{Q_T}|\nabla R|^2\mathrm{d}Q_T=\int_0^t\int_{Q_T}|\nabla R|^2\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}t\leqslant\int_0^t||f||^2\mathrm{d}t=T||f||^2$ 有界, 则 $\displaystyle\int|\nabla R|^2\mathrm{d}Q_T$ 有界. 根据文献 [17,23], 可得余项 R 在区域 Q 上一致成立下面的估计式 $||R||_{L^2(Q_T)}+||\nabla R||_{L^2(Q_T)}+||R_t||_{L^2(Q_T)}\leqslant M$. 因此 R 有界, 即 (26) 式一致有效. 证毕.

6 结束语

采用非 Fourier 热传导定律来构造温度场模型, 即一类在无界域上的三维奇摄动双曲抛物方程的初边值问题, 通过奇摄动分析, 得到该问题的形式渐近解, 通过对解做出估计以及古典解的存在唯一性定理给出了内解和外解的存在性、唯一性. 其次对该类奇摄动双曲方程进行了初始层矫正, 得到了解关于时间的导数的估计. 由于出现了热传导系数间断的情形, 而间断的位置未定, 从而产生了自由边界问题, 采用双参数展开法、Fourier 变换确定了热传导系数跳跃的位置表达式, 得到了渐近展开式, 克服了高维无界域上的自由边界问题, 从而得到了解的形式渐近展开式. 最后通过余项估计, 得到了渐近解的一致有效性, 从而得到了热传导系数间断的温度场的分布. 通过本文的分析, 可以看到温度场在 $t=0$ 附近有一个极薄的初始层, 温度场是连续的, 而导数则有一个明显的变化. 与以往工作比较可得, 初始层呈现角层现象, 即温度场的变化是 $O(\varepsilon)$ 阶, 而导数则是 $O(1)$ 阶, 在热传导系数的跳跃位置两侧, 我们应用双参数奇摄动方法, 得到了温度场的渐近表达式. 当热传导系数为常数时, 温度场由常系数线性双曲方程表达, 从而可以求得解. 但当热传导系数不为常数时, 温度场则由非线性双曲方程表达, 求解就相当困难. 而双参数奇摄动渐近展开则将问题转化为一系列的常系数双曲方程, 从而可以得到渐近解析解, 是本文的创新之处. 热传导系数跳跃位置是另一个困难所在. 当热传导系数是跳跃的情形, 本文实际上是关于双曲方程的自由边界问题. 因此确定热传导系数跳跃的位置就具有重要意义. 我们应用 Fourier 变换和奇摄动渐近展开, 得到了热传导系数跳跃位置的表达式, 从而可以确定其位置. 到目前为止, 还较少看到这方面的结果.

参考文献

[1] Guan J F, Shen Z H, Xu B Q, et al. 2005 *Photoelectronics and Laser* **16** 231 (in Chinese) [关建飞, 沈中华, 许伯强 等 2005 光电子·激光 **16** 231]

[2] Shen Z H, Xu B Q, Ni X W, et al. 2004 *China Laser* **31** 1275 (in Chinese) [沈中华, 许伯强, 倪晓武 等 2004 中国激光 **31** 1275]

[3] Tzou D Y 1995 *Int. J. Heat. Mass. Transf.* **38** 3231

[4] Tzou D Y 1995 *ASME J. Heat. Mass. Transf.* **117** 8

[5] Li J E, Wang B L, Chang D M 2011 *J. Solid Mechanics* **s1** 248 (in Chinese) [李金娥, 王保林, 常冬梅 2011 固体力学学报 **s1** 248]

[6] Zhang Z, Liu D Y 2000 *Progress in Mechanics* **30** 446 (in Chinese) [张浙, 刘登瀛 2000 力学进展 **30** 446]

[7] Liu Y, Li H, He S 2010 *Numer. Math. A: J. Chin. Univ.* **171** 1

[8] Amirov R 2014 *Inter. Conference on Non. Differential and Difference Equations May* **2** 7

[9] Farrell P A, O' Riordan E, Shishkin G I 2005 *Math. Computation* **74** 1759

[10] Teixeira M A, Silva P R D 2012 *Physica D: Non. Phenomena* **241** 1948

[11] Teixeira M A 2012 *Perturbation Theory for Non-smooth Systems* (New York: Springer) pp32–49

[12] Lin J 2011 *J. Wuhan University* (Science Edition) **57** 109 (in Chinese) [林娟 2011 武汉大学学报(理学版) **57** 109]

[13] Xing M 2005 *J. Math. Phys.* **25** 685 (in Chinese) [兴梅 2005 数学物理学报 **25** 685]

[14] Tan Q J, Leng Z J 2008 *Math. Research. Rev.* (English Edition) **4** 41

[15] Llibre J, Silva P R D, Teixeira M A 2006 *J. Dyn. Differ. Equ.* **19** 309

[16] Kang L C 1989 *Math. Annual Series A* (Chinese Edition) **13** 529 (in Chinese) [康连城 1989 数学年刊 A辑 (中文版) **13** 529]

[17] Kang L C 1992 *Appl. Math. Mechanics* **13** 135 (in Chinese) [康连城 1992 应用数学和力学 **13** 135]

[18] Bao L P, Li W Y, Wu L Q 2019 *Appl. Math. Mech.* **40** 536 (in Chinese) [包立平 , 李文彦, 吴立群 2019 应用数学和力学 **40** 536]

[19] Zhang J Q, Nie L R, Chen C Y, et al. 2016 *AIP Advances* **6** 075212

[20] Chen R, Nie L, Chen C 2018 *Chaos* **28** 053115

[21] Chen R, Nie L, Chen C, et al. 2017 *J. Stat. Mech Theory. E* **14** 013201

[22] Nie L, Yu L, Zheng Z, et al. 2013 *Phys. Rev.* 062142

[23] Wu Z Q, Yin J X, Wang C M 2003 *Introduction to Elliptic and Parabolic Equations Fristplace* (Beijing: Science Press) (in Chinese) pp152–184 (in Chinese) [伍卓群, 尹景学, 王春明 2003 椭圆与抛物型方程引论 (北京: 科学出版社) 第152— 184页]

Singularly perturbed solutions of a class of non-Fourier temperature field distribution*

Bao Li-Ping [1)†] Li Wen-Yan [1)] Wu Li-Qun [2)]

1) (School of Science, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China)

2) (School of Science, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China)

(Received 25 January 2019; revised manuscript received 11 September 2019)

Abstract

Thermoelastic coupling model excited by laser is of great significance in engineering. To study the thermoelastic coupling model, the distribution of temperature field must be determined firstly. Because the laser excitation time is short (usually femtosecond), the traditional Fourier heat conduction law is no longer suitable. Therefore, it is necessary to establish the distribution of temperature field by using the non-Fourier heat conduction law. Previous studies on the temperature field model mostly use numerical analysis and computer simulation to discuss its numerical solution, but few can directly solve the analytical solution of the model. Up to now, there are few reports about using singularly perturbed analysis method to solve the asymptotic solution of temperature field model and determine the jumping position of heat conductivity coefficient. In this paper, a temperature field model is constructed by using the non-Fourier heat conduction law, i.e. a class of singularly perturbed hyperbolic equations with small parameters in an unbounded domain. The nonlinear singularly perturbed two-parameter hyperbolic equations with discontinuous coefficients are obtained when the heat conduction coefficients jump due to sharp temperature changes. By using the singularly perturbed biparametric expansion method, the asymptotic solution of the problem is obtained. First, the expansion of the problem is obtained by using singularly perturbed method. The existence and uniqueness of the internal and external solutions are obtained by estimating the maximum modulus of the internal and external solutions and the maximum modulus estimates of the time derivatives, and the formal asymptotic expansion of the solutions is obtained. Secondly, the singularly perturbed hyperbolic equation is corrected by the singular perturbation theory, and the derivative of the solution is estimated. The position expression of the jump of the thermal conductivity coefficient is determined by the Fourier transform, and the seam method is used to connect the seams of the two sides of the jump position of the thermal conductivity coefficient, thus the form asymptotic expansion of the solution is obtained. Finally, the uniform validity of the asymptotic solution is obtained by estimating the residual term, and the distribution of the temperature field with discontinuous heat conduction coefficient is obtained. In this paper, we have synthetically applied the knowledge of ordinary differential equations, partial differential equations, mathematical and physical equations, nonlinear acoustics, mathematical analysis, singular perturbation theory and so on, which enriched the study of non-Fourier temperature field model.

Keywords: heat conduction equation, discontinuous coefficient, uniformly valid estimate, two parameters

PACS: 44.05.+e, 44.10.+i, 44.90.+c **DOI:** 10.7498/aps.68.20190144

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51775154) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. LZ15E050004).

† Corresponding author. E-mail: baolp@hdu.edu.cn