异质弱相依网络鲁棒性研究*

韩伟涛 伊鹏† 马海龙 张鹏 田乐

(中国人民解放军战略支援部队信息工程大学, 信息技术研究所, 郑州 450000)

(2019 年 5 月 19 日收到; 2019 年 7 月 9 日收到修改稿)

传统研究认为网络间相依边的引入使网络鲁棒性大幅降低, 但现实相依网络的鲁棒性往往优于理论结果. 通过观察现实相依网络的级联失效过程, 发现节点不会因相依节点失效而损失所有连接边, 且由于网络节点的异质性, 每个节点的连接边失效概率也不尽相同. 针对此现象, 提出一种异质弱相依网络模型, 与传统网络逾渗模型不同, 本文认为两个弱相依节点的其中一个失效后, 另一个节点的连接边以概率 γ 失效而不是全部失效, 并且不同节点连接边失效概率 γ 会因节点的异质性而不同. 通过理论分析给出模型基于生成函数的逾渗方程, 求解出任意随机分布异质对称弱相依网络的连续相变点. 仿真结果表明方程的理论解与随机网络逾渗模拟值相符合, 网络鲁棒性随着弱相依关系异质程度的增大而提高.

关键词: 相依网络, 级联失效, 逾渗, 相变

PACS: 64.60.ah, 64.60.aq, 89.75.–k, 89.90.+n **DOI:** 10.7498/aps.68.20190761

1 引 言

现实生活中许多网络系统都可以用复杂网络进行建模分析, 包括互联网、社交网络、物联网、食物链等[1–3]. 这些复杂网络系统的健壮与否对人们的生产生活起着至关重要的作用. 学者对真实复杂网络的进一步研究发现, 多个网络系统之间往往存在相互依赖的关系, 即某个网络中某些节点需要依赖于其他网络的节点才能正常工作[4–6], 例如, 电力系统需要互联网传递维持正常运转的配置消息, 食肉动物需要捕食其他物种补充生存所需能量. 学术界通常使用逾渗模型分析复杂相依网络的鲁棒性[7–10], 随机从相依网络中移除 $1-p$ 比例的节点会触发逾渗过程, 多个网络间的节点会因相依关系而发生级联失效, 即使移除少部分节点仍可能导致整个相依网络的崩溃.

近些年来, 学者们提出了多种模型用于研究现实复杂网络的鲁棒性, 这些模型研究了网络中各种连接边和依赖边对网络鲁棒性造成的影响, 包括 l-hop 逾渗、靴襻逾渗、k-核逾渗等[11–15]. 除了真实存在的相依边, 还有学者研究了相依群对复杂网络鲁棒性的影响, 群内节点互相存在依赖关系, 其中一个节点失效可能会导致整个相依群完全失效, 研究者发现相依群规模会对网络鲁棒性造成较大影响[16–18]. 为了解释真实相依网络鲁棒性优于理论分析结果的现象, 有学者提出了部分依赖相依网络模型[19–21], 该模型认为每个网络只有部分节点依赖于其他网络, 随着相互依赖比例的减少, 网络鲁棒性会增加. Liu 等[22] 提出了一种能够缓解级联失效程度的网络模型, 该模型中被依赖节点失效不会导致依赖节点的全部连接边失效, 但作者只考虑了同质网络, 即所有连接边失效概率是相同的, 实际网络的复杂性决定了这种同质网络一般是不存在的. Kong 等[23] 研究了单个网络存在异质弱相依边的情况, 但并未考虑多个相依网络的情况.

* 国家重点研发计划 (批准号: 2017YFB0803204, 2018YFB0804002)、国家自然科学基金 (批准号: 61872382, 61802429) 和广东省重点领域研发计划 (批准号: 2018B010113001) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yipengndsc@163.com

在现实的相依网络中, 异质弱相依边是普遍存在的. 例如, 某个电子元器件工厂需要另一个化工厂的原材料维持生产, 当化工厂关闭后, 电子元器件工厂仍可以生产部分种类的产品, 因为其本身可制造部分原材料供自身使用, 但实际社会生产供应链是复杂的, 某些工厂依赖的上游供应商倒闭后, 由于异质弱相依关系的存在, 即使是同类的工厂失去的产能也是不同的. 基于此现象, 提出一种异质弱相依网络模型, 其中弱相依指的是当两个相互依赖节点的其中一个失效后, 另一个节点的连接边以概率 γ 失效而不是全部失效, 此外, 为了更好地描述现实网络节点异质性, 本模型中任意节点因弱相依失效导致的连接边失效概率 γ 也互不相同. 本文利用生成函数方法给出异质弱相依网络的逾渗方程, 并解出任意随机分布异质对称弱相依网络的连续相变点. 仿真结果验证了本文理论解与随机网络逾渗模拟值的一致性, 通过对两种不同 γ 分布的异质对称弱相依网络逾渗分析可知, 相依网络鲁棒性会随着网络弱相依关系的异质性增大而提高.

本文的内容主要包括: 第 2 部分理论分析异质弱相依网络模型的巨分量方程和相变点; 第 3 部分仿真验证本文模型理论框架有效性并讨论本文研究成果; 第 4 部分对全文进行总结.

2 理论分析

本文利用生成函数方法分析相依网络的鲁棒性[24]. 随机网络的度分布和余度分布生成函数分别为 $G_0(x)=\sum_k P(k)x^k$, $G_1(x)=\sum_k kP(k)x^{k-1}/\langle k\rangle$, 其中 $P(k)$ 为网络中任取一个节点度为 k 的概率, $\langle k\rangle$ 表示网络的平均度. 在单个网络中, 对于一个度为 k 的节点, 只要它有一条边通向巨分量, 该节点就属于巨分量. 令 f 为沿任意一条边到达的节点位于巨分量的概率, 则任取一个度为 k 的节点位于巨分量的概率为 $1-(1-f)^k$, 因此网络中任意节点位于巨分量的概率均值为 $\sum_k P(k)\left[1-(1-f)^k\right]$. 若初始随机攻击导致 $1-p$ 比例节点失效, 在以上概率均值的基础上乘以 p, 可得随机攻击后任意节点位于巨分量的概率

$$\mu_\infty=p\sum_k P(k)\left[1-(1-f)^k\right]=p\left[1-G_0(1-f)\right]. \tag{1}$$

(1) 式中的 f 可通过以下方法求解, 沿一条边到达的节点度为 k, 只要它剩余的 k-1 条边有一条通向巨分量, 该节点就属于巨分量, 概率为 $1-(1-f)^{k-1}$, 在整个网络上求关于余度分布的概率均值可得 $f=\sum_k P(k)k[1-(1-f)^{k-1}]/\langle k\rangle$, 考虑到随机攻击导致 $1-p$ 比例节点失效, 那么 f 满足自洽方程

$$f=p\sum_k\frac{P(k)k}{\langle k\rangle}[1-(1-f)^{k-1}]=p\left[1-G_1(1-f)\right]. \tag{2}$$

任意节点位于巨分量的概率可通过求解 (1) 与 (2) 式得到.

为了便于后文分析, 首先考虑同质弱相依网络. 当网络某节点失效后, 其相依节点的连接边以概率 γ 失效, 在整个网络中, 弱相依导致的连接边失效概率 γ 对于任意节点是相同的, 这样的网络称为同质弱相依网络. 本模型初始攻击导致的相依失效与传统模型相同, 即初始攻击随机移除 A 网络 $1-p$ 节点, 对应 B 网络对应 $1-p$ 节点也失效. 随后发生级联失效过程直至网络不再有新的节点失效, 该过程中节点间依赖关系是弱相依的. 最终状态 A 网络任意节点位于巨分量概率取决于以下两种情况: (E_1) 该节点及其弱相依节点都在巨分量中; (E_2) 该节点的弱相依节点失效导致它的每条连接边以概率 γ 失效, 但该节点仍位于巨分量. 两种概率的表达式 $P(E_1)$ 和 $P(E_2)$ 分别为

$$P(E_1)=p[1-G_{A0}(1-f_A)][1-G_{B0}(1-f_B)], \tag{3}$$

$$P(E_2)=p\left[1-G_{A0}(1-f_A+\gamma f_A)\right]G_{B0}(1-f_B). \tag{4}$$

利用概率的加法规则求得 μ_∞^A 为

$$\mu_\infty^A=P(E_1+E_2)=P(E_1)+P(E_2). \tag{5}$$

把 (3) 和 (4) 式代入 (5) 式可得

$$\begin{aligned}\mu_\infty^A=&p[1-G_{A0}(1-f_A)][1-G_{B0}(1-f_B)]\\&+pG_{B0}(1-f_B)\left[1-G_{A0}(1-f_A+\gamma f_A)\right].\end{aligned} \tag{6}$$

类似地, B 网络巨分量大小为

$$\begin{aligned}\mu_\infty^B=&p[1-G_{B0}(1-f_B)][1-G_{A0}(1-f_A)]\\&+pG_{A0}(1-f_A)\left[1-G_{B0}(1-f_B+\gamma f_B)\right].\end{aligned} \tag{7}$$

求解 (6) 和 (7) 式需要得到 f_A 和 f_B 的自洽方程, A 网络沿着任意边抵达巨分量概率 f_A 也包含两种情况: (E_3) 沿着这条边到达的节点及其弱相依节点都在巨分量中; (E_4) 沿着这条边抵达的节点的弱相依节点失效导致它的每条连接边以概率 γ 失效, 但该节点仍位于巨分量. 两种情况的概率方程

分别为

$$P(E_3)=p[1-G_{A1}(1-f_A)][1-G_{B0}(1-f_B)], \quad (8)$$

$$P(E_4)=p(1-\gamma)\left[1-G_{A1}(1-f_A+\gamma f_A)\right]G_{B0}(1-f_B). \quad (9)$$

利用概率的加法规则求得 f_A 为

$$f_A=P(E_3+E_4)=P(E_3)+P(E_4). \quad (10)$$

将 (8) 和 (9) 式代入 (10) 式可得

$$\begin{aligned}f_A=&p[1-G_{A1}(1-f_A)][1-G_{B0}(1-f_B)]\\&+p(1-\gamma)\left[1-G_{A1}(1-f_A+\gamma f_A)\right]G_{B0}(1-f_B).\end{aligned} \quad (11)$$

同理可知 f_B 为

$$\begin{aligned}f_B=&p[1-G_{B1}(1-f_B)][1-G_{A0}(1-f_A)]\\&+p(1-\gamma)\left[1-G_{B1}(1-f_B+\gamma f_B)\right]G_{A0}(1-f_A).\end{aligned} \quad (12)$$

接着分析异质弱相依网络. 当网络某节点失效后, 其对应依赖节点的连接边仍以某概率失效, 但从整个网络层面来讲, 不同节点因相依节点失效导致的连接边失效概率不完全相同, 而是服从一定的概率分布, 这种网络称作异质弱相依网络. 假设存在弱相依关系节点的边失效概率取值范围是 $\gamma=\{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\cdots\}$, 任意节点边失效概率 $p(\gamma)$ 服从分布 $\{p_{\gamma_1},p_{\gamma_2},p_{\gamma_3},\cdots\}$, 则新的 μ_∞ 和 f 值可通过对 $p(\gamma)$ 求概率均值得到, 即 $\mu_\infty=\sum_\gamma p(\gamma)\mu_{\infty,\gamma}$, $f=\sum_\gamma p(\gamma)f_\gamma$, 如下:

$$\begin{aligned}\mu_\infty^A=&p[1-G_{A0}(1-f_A)][1-G_{B0}(1-f_B)]\\&+pG_{B0}(1-f_B)\sum_\gamma p(\gamma)\\&\times\left[1-G_{A0}(1-f_A+\gamma f_A)\right],\end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}\mu_\infty^B=&p[1-G_{B0}(1-f_B)][1-G_{A0}(1-f_A)]\\&+pG_{A0}(1-f_A)\sum_\gamma p(\gamma)\\&\times\left[1-G_{B0}(1-f_B+\gamma f_B)\right],\end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}f_A=&p[1-G_{A1}(1-f_A)][1-G_{B0}(1-f_B)]\\&+pG_{B0}(1-f_B)\sum_\gamma p(\gamma)(1-\gamma)\\&\times\left[1-G_{A1}(1-f_A+\gamma f_A)\right],\end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}f_B=&p[1-G_{B1}(1-f_B)][1-G_{A0}(1-f_A)]\\&+pG_{A0}(1-f_A)\sum_\gamma p(\gamma)(1-\gamma)\\&\times\left[1-G_{B1}(1-f_B+\gamma f_B)\right].\end{aligned} \quad (16)$$

通过联立求解 (13)—(16) 式可得随机攻击后异质弱相依网络的巨分量规模. 当 γ 取值唯一时, 模型退化为同质弱相依网络; 当 $\gamma=0$ 时, 模型退化为传统相依网络.

理论分析任意度分布的异质弱相依网络复杂度较高, 本文考虑对称网络以简化分析. 假设对称相依网络具有相同的度分布和余度分布, 即 $G_{A0}(x)=G_{B0}(x)=G_0(x)$, $G_{A1}(x)=G_{B1}(x)=G_1(x)$, 所以 (13)—(16) 式简化为

$$\begin{aligned}\mu_\infty=&p[1-G_0(1-f)]^2+pG_0(1-f)\\&\times\sum_\gamma p(\gamma)\left[1-G_0(1-f+\gamma f)\right],\end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}f=&p[1-G_1(1-f)][1-G_0(1-f)]+pG_0(1-f)\\&\times\sum_\gamma p(\gamma)(1-\gamma)\left[1-G_1(1-f+\gamma f)\right].\end{aligned} \quad (18)$$

显然 (18) 式在 $f=0$ 存在平凡解, 表明相依网络不存在巨分量. 在相变点处, 若 (18) 式存在正数解, 意味着该相变为连续相变. 为了解出相变点 $p_{c,\gamma}$, 对 (18) 式两边求关于 f 的偏导, 可得

$$\begin{aligned}1=&p_cG_1'(1-f)[1-G_0(1-f)]\\&+p_cG_0'(1-f)[1-G_1(1-f)]\\&-p_cG_0'(1-f)\sum_\gamma p(\gamma)(1-\gamma)\left[1-G_1(1-f+\gamma f)\right]\\&+p_cG_0(1-f)\sum_\gamma p(\gamma)(1-\gamma)^2G_1'(1-f+\gamma f),\end{aligned} \quad (19)$$

其中 $G'(x)=\partial G(x)/\partial x$. 观察 (19) 式可知, 难以利用解析方法求出非连续相变点 $p_{c,\gamma}^{\mathrm{I}}$, 但可采用数值方法分析 $p_{c,\gamma}^{\mathrm{I}}$ 值. 对于连续相变, $f_{c,\gamma}=0$, 代入 (19) 式可得

$$p_{c,\gamma}^{\mathrm{II}}=\frac{1}{G_1'(1)\sum_\gamma p(\gamma)(1-\gamma)^2}. \quad (20)$$

为了便于进一步简化分析, 假设相依网络为对称的 Erdös-Rényi (ER)[25] 同质网络, 即任意节点连接边失效概率均为 γ, 且网络的度分布和余度分布生成函数相同, $G_0(x)=G_1(x)=\mathrm{e}^{-\langle k\rangle(1-x)}$, 则 (20) 式可简化为

$$p_c^{\mathrm{II}}=\frac{1}{(1-\gamma)^2\langle k\rangle},\ \gamma<\gamma_c, \quad (21)$$

(21) 式只在 $\gamma<\gamma_c$ 有效, 若 $\gamma>\gamma_c$, 网络不存在连

续相变. 在点 $\gamma = \gamma_c$ 处, 会出现相依网络连续与非连续相变的交汇点, 所以当 $\gamma = \gamma_c$ 时, 两种相变存在相同的 f_c 值, 即 $f_c = 0$. 因此可以对 (19) 式两边求关于 f 的偏导并将 $f = 0$ 代入得到 γ_c 的取值, 如下:

$$(1-\gamma_c)^3 G_1''(1) + 2\left[(1-\gamma_c)^2 - 1\right] G_0''(1) = 0. \quad (22)$$

因 ER 网络 $G_1''(1) = G_0''(1)$, 所以 (22) 式简化为

$$(1-\gamma_c)^3 + 2(1-\gamma_c)^2 - 2 = 0. \quad (23)$$

通过求解 (23) 式可知 $\gamma_c = 0.16071$. 此外, 对于其他异质相依网络, 仍然可以采用以上方法求 γ_c, 但复杂度较高且最终解可能不具备较为简洁的形式.

3 仿真与讨论

首先考虑同质对称弱相依网络, 图 1 和图 2 分别为 ER 和 scale-free (SF)[26] 对称弱相依网络的逾渗仿真结果. 图中给出了巨分量 μ_∞ 和级联失效迭代次数 (number of iterative, NOI) 与初始保留节点比例 p 的关系. 从图 1 和图 2 可以看出仿真结果与理论分析拟合. 随着 γ 值的减小, 相变点 p_c 逐渐减小的同时网络鲁棒性有所提升. 对于非连续相变, NOI 曲线在相变点处存在尖峰, 连续相变的 NOI 曲线一直比较平缓.

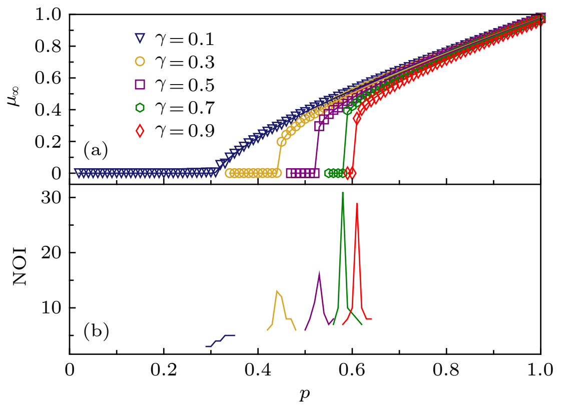

图 1 同质对称 ER 弱相依网络对于不同 γ 值的巨分量 μ_∞ 与 p 对应关系 (网络节点数为 200000, 平均度为 4) (a) 巨分量大小 μ_∞ 与 p 对应关系, 空心标记表示仿真结果, 实线是根据 (17) 和 (18) 式得到的理论值; (b) 级联失效迭代次数

Fig. 1. Simulation results of μ_∞ versus p for homogeneous symmetric interdependent ER networks for different γ (each network has 200000 nodes, average degree is 4). (a) The size of the giant component μ_∞ versus p. The symbols represent the simulation results, and the solid lines show the corresponding analytical predictions of Eqs. (17) and (18). (b) Number of iterative failures.

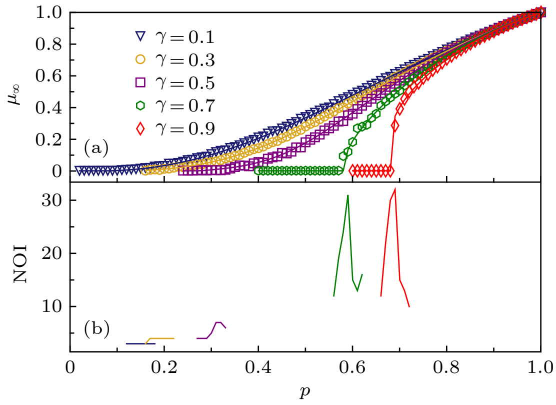

图 2 同质对称 SF 弱相依网络对于不同 γ 的巨分量 μ_∞ 与 p 对应关系 (网络节点数为 20000, 平均度为 4, $\lambda = 2.6$) (a) 巨分量大小 μ_∞ 与 p 对应关系, 空心标记表示仿真结果, 实线是根据 (17) 式和 (18) 式得到的理论值; (b) 级联失效迭代次数

Fig. 2. Simulation results of μ_∞ versus p for homogeneous symmetric interdependent SF networks for different γ (each network has 200000 nodes, average degree is 4, $\lambda = 2.6$). (a) The size of the giant component μ_∞ versus p. The symbols represent the simulation results, and the solid lines show the corresponding analytical predictions of Eqs. (17) and (18). (b) Number of iterative failures.

下面通过图形示意方法讨论逾渗相变点数值解, 令 $D(f) = \text{rhs} - f$, 其中 rhs 表示 (18) 式等号右边的部分, 显然 $D(0) = 0$, 即 $D(f)$ 在 0 点处与 f 轴相交. 随着初始保留节点比例 p 的增大, $D(f)$ 曲线会逐渐上升, 直到 p 增大到相变点, $D(f)$ 曲线会第一次与 f 轴相切, 此时的 p 即为相变点 p_c. 图 3 和图 4 分别为同质 ER, SF 弱相依网络的逾渗数值解示意图, 图中给出了 $D(f)$ 与 f 的对应关系. 从图 3 和图 4 可以看出, 当 $p = p_c$ 时, $D(f)$ 曲线会与图 f 轴相切, 并且连续相变的切点为 0 (图 3(a)、图 4(a)), 非连续相变的切点大于 0 (图 3(b)、图 4(b)).

图 5 给出了根据 (21) 和 (23) 式求出的不同平均度同质对称 ER 弱相依网络相变点 p_c 与 γ 对应关系. 从图 5 可以看出, 对于同质对称 ER 相依网络, γ_c 取值唯一且与网络度分布无关, 这与前文理论分析结果一致. 此外, 随着平均度的增加, p_c 随之减少, 意味着网络中更多的连接边可使网络更加鲁棒.

接下来考虑异质对称弱相依网络. 为了便于仿真分析, 首先考虑一种较为简单的 γ 分布情况, 即 $\gamma = \{\bar{\gamma} - \Delta\gamma, \bar{\gamma} + \Delta\gamma\}$ 且 $p(\gamma) \sim \{q, 1-q\}$, 表示网路中任取节点的弱相依节点失效后, 其连接边失效概率为 $\bar{\gamma} - \Delta\gamma$ 的概率为 q, 连接边失效概率为

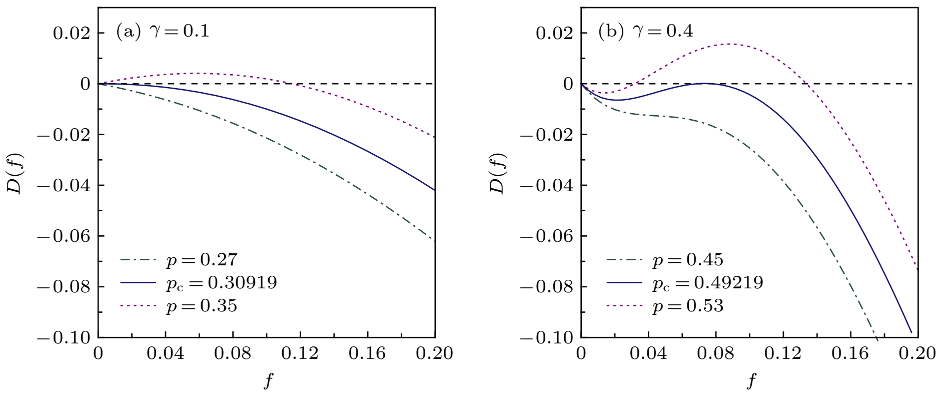

图 3 同质对称 ER 弱相依网络对于不同 γ 值的数值解示意图 (网络平均度为 4; 在相变点 p_c 处, $D(f)$ 曲线与 f 轴相切) (a) $\gamma = 0.1$; (b) $\gamma = 0.4$

Fig. 3. Graphical solutions of homogeneous symmetric interdependent ER networks percolation transition for different γ: (a) $\gamma = 0.1$; (b) $\gamma = 0.4$. The average degree is 4. At the transition point p_c, the curve of $D(f)$ tangents to f axis.

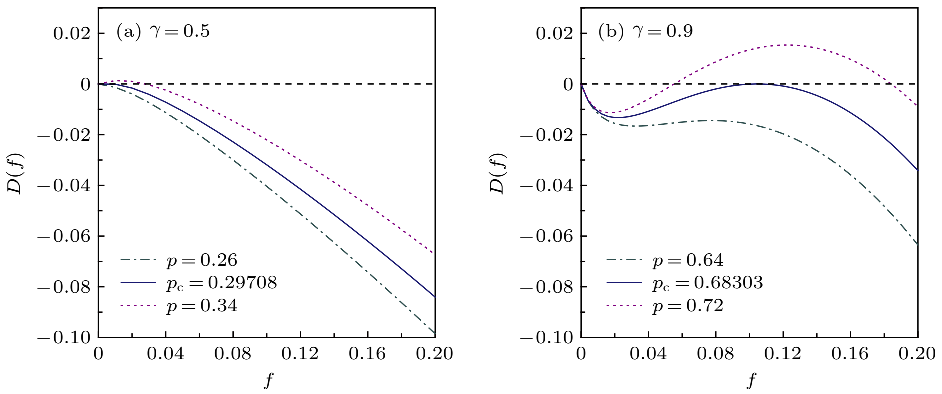

图 4 同质对称 SF 弱相依网络对于不同 γ 值的数值解示意图 (网络平均度为 4, $\lambda = 2.6$; 在相变点 p_c 处, $D(f)$ 曲线与 f 轴相切) (a) $\gamma = 0.5$; (b) $\gamma = 0.9$

Fig. 4. Graphical solutions of homogeneous symmetric interdependent SF networks percolation transition for different γ: (a) $\gamma = 0.5$; (b) $\gamma = 0.9$. The average degree is 4, $\lambda = 2.6$. At the transition point p_c, the curve of $D(f)$ tangents to f axis.

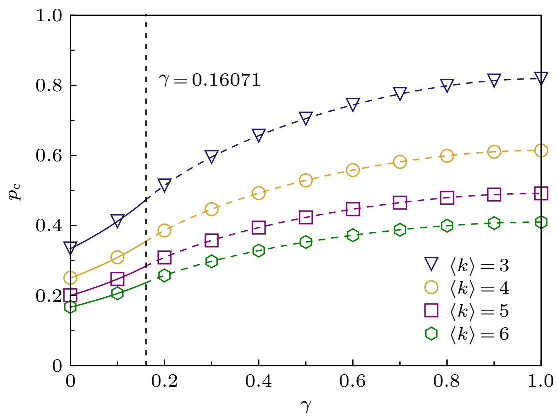

图 5 不同平均度同质对称 ER 弱相依网络相变点 p_c 与 γ 对应关系, 其中网络的节点数为 200000; 空心标记为仿真结果; 理论值分别通过实线和短划线表示, 其中实线为连续相变, 短划线为非连续相变; 垂直的点状线为连续相变和非连续相变的边界

Fig. 5. Simulation results of p_c versus γ for homogeneous symmetric interdependent ER networks with different $\langle k\rangle$, each network has 200000 nodes. The symbols represent the simulation results. The corresponding analytical predictions are shown by lines, solid lines and dashed lines represent continuous and discontinuous phase transitions, respectively. The vertical dotted line is the boundary of continuous and discontinuous regions.

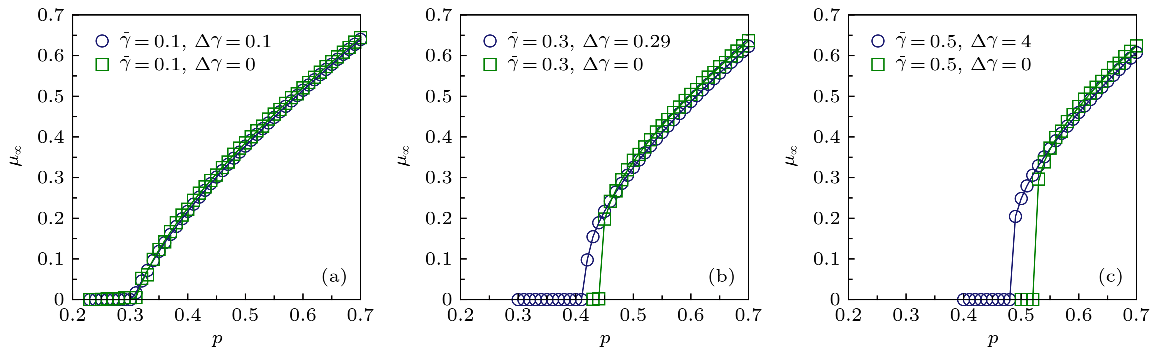

图 6　不同简单 γ 分布的同质和异质 ER 弱相依网络的仿真结果, 其中网络节点数为 200000, 平均度是 4, $q=0.5$; 空心标记表示仿真结果, 实线是理论分析值

Fig. 6. Simulation results of heterogeneous and homogeneous symmetric ER interdependent networks with different γ distributions, each network has 200000 nodes, average degree is 4, $q=0.5$. The symbols represent the simulation results, and the solid lines show the corresponding analytical predictions.

$\bar{\gamma}+\Delta\gamma$ 的概率为 $1-q$. 图 6 给出了不同简单 γ 分布的同质 ($\Delta\gamma=0$) 和异质 ($\Delta\gamma\neq 0$) ER 相依网络的仿真结果. 从图 6 可以看出, 在相同 γ 概率均值的情况下, 异质性的引入会减小 p_c 并提高网络的鲁棒性.

图 7 是简单 γ 分布异质对称 ER 弱相依网络相变点与 $\Delta\gamma$ 值对应关系的仿真结果, 图中连续相

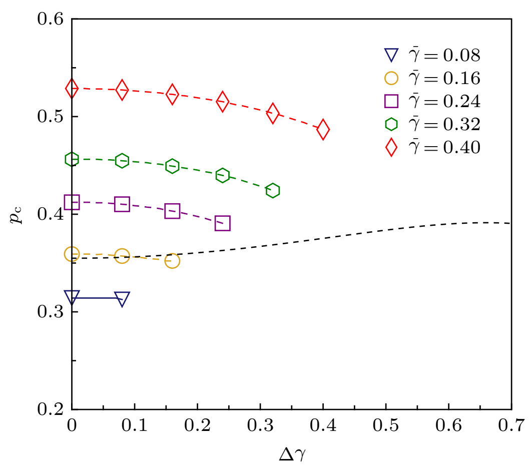

图 7　简单 γ 分布异质对称 ER 弱相依网络相变点 p_c 与 $\Delta\gamma$ 值的仿真结果, 其中网络节点数为 200000, 平均度是 4, $q=0.5$; 空心标记表示仿真值, 短划线和实线分别表示非连续相变与连续相变的理论值, 点状线是连续相变和非连续相变的分界线

Fig. 7. Simulation results of critical point p_c of simple heterogeneous symmetric ER interdependent networks versus $\Delta\gamma$, each network has 200000 nodes, average degree is 4, $q=0.5$. The symbols represent the simulation results. The corresponding analytical predictions are shown by lines, solid lines and dashed lines represent continuous and discontinuous phase transitions, respectively. The dotted line is the boundary of continuous and discontinuous regions.

变与非连续相变分界线与 (23) 式求解方法类似, 通过对 (19) 式两边求 f 的偏导, 再将 $f_c=0$ 代入得到

$$\sum_{\gamma} p(\gamma)(1-\gamma)^3+2\sum_{\gamma} p(\gamma)(1-\gamma)^2-2=0, \quad (24)$$

联立 (20) 和 (24) 式可解出相变分界点与 $\Delta\gamma$ 的对应关系, 如图 7 所示. 从图 7 可以看出, 随着 $\Delta\gamma$ 增大, 网络的相变点 p_c 逐渐减小, 网络的鲁棒性有所提升. 当 $\bar{\gamma}=0.16$ 时, $\Delta\gamma$ 值的增大使网络逾渗相变从非连续变为连续. 更大 $\Delta\gamma$ 值意味着网络弱相依关系的异质性越强, 同时会使网络抵抗随机攻击的能力提高.

对于更一般的异质网络, 本文假设 $p(\gamma)$ 服从于以下特殊高斯分布

$$p(\gamma)=\begin{cases}\alpha\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(\gamma-\bar{\gamma})^2}{2\sigma^2}}, & \sigma\neq 0\\ \delta(\gamma-\bar{\gamma}), & \sigma=0\end{cases}, \quad (25)$$

其中 $\bar{\gamma}$ 是均值, σ^2 是方差, α 为归一化调节参数. 当 $\sigma=0$ 时, 异质网络退化为同质网络, 所有节点的 $p(\gamma)$ 相同. 图 8 给出了连接边失效概率服从高斯分布的异质 ER 相依网络仿真结果. 从图 8 可以看出, 随着高斯分布方差增大, 网络相变点 p_c 逐渐减小, 网络鲁棒性相应提高. 方差越大意味着网络异质程度越高, 因此, 网络异质程度与网络鲁棒性是正相关的, 这也从一定程度上解释了真实复杂网络抗毁性能优于理论结果的事实, 该结论与图 7 的仿真结果一致.

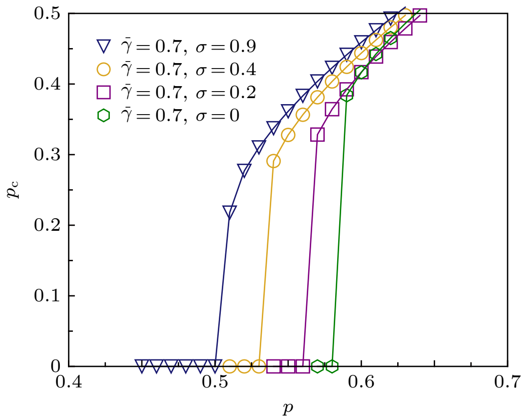

图 8 连接边失效概率服从高斯分布的异质对称 ER 弱相依网络巨分量 μ_∞ 与 p 的对应关系, 其中高斯分布的均值 $\bar{\gamma}$ 为 0.7, σ 分别为 0.9, 0.4, 0.2; 根据 (25) 式, $\sigma = 0$ 时 $p(\gamma) = \delta(\gamma - \bar{\gamma})$; 空心标记为仿真结果, 实线为理论分析值

Fig. 8. Simulation results of μ_∞ versus p for heterogeneous symmetric ER interdependent networks with Gaussian distributions of connectivity link failure probability. The average value $\bar{\gamma}$ are set as 0.7, σ are set as 0.9, 0.4, 0.2, respectively. According to Eq. (25), $p(\gamma) = \delta(\gamma - \bar{\gamma})$ when $\sigma = 0$. The symbols represent the simulation results, and the solid lines show the corresponding analytical predictions.

4 结 论

现实复杂网络之间往往存在相依关系, 传统理论分析结果表明, 相依关系的引入大幅度降低了网络抵抗攻击的能力, 但现实网络并未因少量节点遭到攻击而发生严重的级联失效, 其鲁棒性往往优于传统理论结果, 因此本文提出一种异质弱相依网络模型以解释此现象. 与传统相依网络不同, 在异质弱相依网络中, 当某节点的相依节点失效后, 该节点的连接边以概率 γ 失效而不是全部失效, 此外, 因为每个节点存在差异性, 不同节点的连接边失效的概率也不尽相同. 本文给出了异质弱相依网络模型的逾渗方程, 求出关于任意随机网络的理论连续相变点 $p^{\mathrm{II}}_{\mathrm{c},\gamma}$, 分析了同质对称 ER 弱相依网络连续与非连续相变分界点 γ_c. 仿真结果表明, 逾渗方程的理论解与随机网络逾渗模拟结果相符合, 网络鲁棒性会随着 γ 值的降低而提高. 另外, 通过对两种不同 γ 分布的分析可知, 网络弱相依关系的异质程度越高鲁棒性就越强. 本文研究成果对如何理解现实复杂相依网络的高鲁棒性具有一定的指导意义.

参考文献

[1] Albert R, Barabási A 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 47
[2] Dorogovtsev S N, Goltsev A V, Mendes J F 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 1275
[3] Boccaletti S, Bianconi G, Criado R, Del Genio C I, Gómez-Gardenes J, Romance M, Sendina-Nadal I, Wang Z, Zanin M 2014 *Phys. Rep.* **544** 1
[4] Buldyrev S V, Parshani R, Paul G, Stanley H E, Havlin S 2010 *Nature* **464** 1025
[5] Shao J, Buldyrev S V, Havlin S, Stanley H E 2011 *Phys. Rev. E* **83** 36116
[6] Gao J X, Buldyrev S V, Havlin S, Stanley H E 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 195701
[7] Albert R, Jeong H, Barabási A 2000 *Nature* **406** 378
[8] Cohen R, Erez K, Ben-Avraham D, Havlin S 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 4626
[9] Callaway D S, Newman M E, Strogatz S H, Watts D J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5468
[10] Li M, Wang B H 2014 *Chin. Phys. B* **23** 076402
[11] Shang Y, Luo W, Xu S 2011 *Phys. Rev. E* **84** 31113
[12] Baxter G J, Dorogovtsev S N, Goltsev A V, Mendes J F 2011 *Phys. Rev. E* **83** 51134
[13] Gao J, Zhou T, Hu Y 2015 *Sci. Rep.* **5** 14662
[14] Azimi-Tafreshi N, Gómez-Gardenes J, Dorogovtsev S N 2014 *Phys. Rev. E* **90** 32816
[15] Yuan X, Dai Y, Stanley H E, Havlin S 2016 *Phys. Rev. E* **93** 062302
[16] Parshani R, Buldyrev S V, Havlin S 2011 *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **108** 1007
[17] Wang Z, Zhou D, Hu Y 2018 *Phys. Rev. E* **97** 032306
[18] Wang H, Li M, Deng L, Wang B H 2018 *Physica A* **502** 195
[19] Parshani R, Buldyrev S V, Havlin S 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 48701
[20] Zhou D, Gao J X, Stanley H E, Havlin S 2013 *Phys. Rev. E* **87** 52812
[21] Dong G, Gao J X, Tian L, Du R, He Y 2012 *Phys. Rev. E* **85** 16112
[22] Liu R R, Li M, Jia C X 2016 *Sci. Rep.* **6** 35352
[23] Kong L, Li M, Liu R R, Wang B H 2017 *Phys. Rev. E* **95** 032301
[24] Newman M E, Strogatz S H, Watts D J 2001 *Phys. Rev. E* **64** 26118
[25] Erdős P, Rényi A 1959 *Publ. Math.* **62** 90
[26] Barabási A, Albert R 1999 *Science* **286** 509

Robustness of interdependent networks with heterogeneous weak inter-layer links*

Han Wei-Tao Yi Peng † Ma Hai-Long Zhang Peng Tian Le

(*Institute of Information Technology, PLA Strategic Support Force Information Engineering University, Zhengzhou* 450000, *China*)

(Received 19 May 2019; revised manuscript received 9 July 2019)

Abstract

The robustness of complex networks plays an important role in human society. By further observing the networks on our planet, researchers find that many real systems are interdependent. For example, power networks rely on the Internet to transfer operation information, predators have to hunt for herbivores to refuel themselves, etc. Previous theoretical studies indicate that removing a small fraction of nodes in interdependent networks leads to a thorough disruption of the interdependent networks. However, due to the heterogeneous weak inter-layer links, interdependent networks in real world are not so fragile as the theoretical predictions. For example, an electronic components factory needs raw materials which are produced by a chemical factory. When the chemical factory collapses, the electronic components factory will suffer substantial drop in the production, however, it can still survive because it can produce some other raw materials by itself to sustain its production of some products. What is more, because of the heterogeneity on real industry chains, different electronic components factories produce different kinds of products, which still guarantees the diversity of electronic goods on the whole. In this paper, we develop a framework to help understand the robustness of interdependent networks with heterogeneous weak inter-layer links. More specifically, in the beginning, a fraction of $1-p$ nodes are removed from network A and their dependency nodes in network B are removed simultaneously, then the percolation process begins. Each connectivity link of a node with weak inter-layer dependency is removed with a probability γ after the failure of its counterpart node. The γ values for different nodes are various because of heterogeneity. At the end, the nodes can survive as long as one of the remaining connectivity links reaches the giant component. We present an analytical solution for solving the giant component size and analyzing the crossing point of the phase transition of arbitrary interdependent random networks. For homogeneous symmetric Erdös-Rényi networks, we solve the continuous transition point and the critical point of γ. The simulation results are in good agreement with our exact solutions. Furthermore, we introduce two kinds of γ distributions to analyze the influence of heterogeneous weak inter-layer links on the robustness of interdependent networks. The results of both distributions show that with the increase of heterogeneity, the transition point p_c decreases and the networks become more robust. For the first simple γ distribution, we also find the percolation transition changes from discontinuous one to continuous one by improving the heterogeneity. For the second Gaussian γ distribution, a higher variance makes the interdependent networks more difficult to collapse. Our work explains the robustness of real world interdependent networks from a new perspective, and offers a useful strategy to enhance the robustness by increasing the heterogeneity of weak inter-layer links of interdependent networks.

Keywords: interdependent networks, cascading failures, percolation, phase transition

PACS: 64.60.ah, 64.60.aq, 89.75.–k, 89.90.+n **DOI:** 10.7498/aps.68.20190761

* Project supported by the National Key Research and Development Program of China (Grant Nos. 2017YFB0803204, 2018YFB0804002), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61872382, 61802429), and the Research and Development Program in Key Areas of Guangdong Province, China (Grant No. 2018B010113001).

† Corresponding author. E-mail: yipengndsc@163.com