

## 一维谐振子束缚的自旋轨道耦合玻色气体\*

李志强<sup>1)3)</sup> 王月明<sup>2)3)†</sup>

1) (山西大学理论物理研究所, 太原 030006)

2) (山西大学物理电子工程学院, 太原 030006)

3) (量子光学与光量子器件国家重点实验室, 太原 030006)

(2019年1月25日收到; 2019年5月28日收到修改稿)

量子光学中的 Rabi 模型描述了一个与量子谐振子耦合的两能级系统, 当耦合强度与振子频率相当时, 会产生丰富的物理现象. 本文研究了谐波势阱中具有拉曼诱导自旋轨道耦合的 Bose 气体, 通过将受限系统映射为 Rabi 模型, 引入量子光学中的平移 Fock 态利用变分方法求解了系统的本征能态和基态, 发现左右平移 Fock 态的奇宇称叠加态能量低于平移态的能量, 并分别研究了粒子在动量和坐标空间的动力学 Zitterbewegung 振荡特性以及原子极化的动力学, 给出了一个直观清晰的物理图像, 与相关实验的结果定性一致. 本文的研究结果有助于进一步研究量子光学领域目前难以实现的深度强耦合参数区域的量子 Rabi 模型, 对冷原子物理的研究也有一些借鉴和启发.

**关键词:** Rabi 模型, 自旋轨道耦合, Zitterbewegung 振荡, 平移 Fock 态, 变分法

**PACS:** 32.80.Qk, 03.75.Lm

**DOI:** 10.7498/aps.68.20190143

## 1 引言

自旋轨道耦合 (spin-orbit coupling, SOC) 是粒子自旋内禀自由度与其外部运动自由度之间的相互作用, 在凝聚态物理许多重要的现象中扮演着重要的角色<sup>[1-3]</sup>. 近几年来, 冷原子物理学的一个重要进展是实现了光诱导合成规范场中的中性原子的 SOC<sup>[4-7]</sup>, 目前在实验上可以在玻色子和费米子超冷原子气体中实现各种 SOC 的哈密顿量<sup>[8-12]</sup>. 虽然大多理论工作都集中在 Rashba 耦合的 SOC 的均匀系统上, 但是谐振子束缚势下具有 SOC 的冷原子系统也受到关注和研究<sup>[13-17]</sup>.

量子 Rabi 模型<sup>[18,19]</sup> 是量子光学中重要的基础模型之一, 模型形式简单, 但精确求解并不容易. 直到 2011 年, Braak<sup>[20]</sup> 提出 Rabi 模型具有  $Z_2$  对称性保证了其可积性, 因而可以通过求解超越方程

得到系统的精确能谱. 该工作重新激起了人们对量子 Rabi 模型研究的兴趣<sup>[21-24]</sup>. Rabi 模型被广泛应用于不同的物理领域, 包括量子光学<sup>[25]</sup>、量子信息<sup>[26]</sup>、凝聚态物理<sup>[27]</sup> 和腔量子电动力学<sup>[28-31]</sup>, 也为研究受限空间中的冷原子系统提供了模型和方法.

在量子光学中考虑原子的动能大大超过了相互作用能, 通常采用绝热近似不考虑原子质心动能. 然而, 利用激光冷却原子运动降低原子动能可以制备出 1 K 量级的冷原子气体, 这个能量与腔量子电动力学实验的相互作用能相当, 从哈密顿量中排除动能项不再合理. 本文研究一维 (1D) 谐波势阱中具有 SOC 的 Bose 气体 (考虑稀薄原子气体, 忽略相互作用), 采用量子光学中的方法求解系统的本征能态及可观测物理量的动力学演化, 与目前相关的实验结果定性一致<sup>[11,12]</sup>.

\* 山西省 1331 项目和 111 工程 (批准号: 1331KSC, D18001) 和山西省自然科学基金 (批准号: 201601D011009) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wang\_ym@sxu.edu.cn

## 2 谐振子势束缚自旋轨道耦合的 Bose 气体

三维空间谐振子束缚势中具有 SOC 的单原子 Bose 气体的哈密顿量形式为

$$\hat{H}_{3d} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{V}_{SO} + \hat{V}(\hat{r}), \quad (1)$$

其中  $\hat{V}(\hat{r}) = m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)/2$  是束缚势,  $m$  为原子质量,  $\hat{P}$  为原子动量;  $\hat{V}_{SO}$  为 SOC 项, 对于  $x$  方向具有 SOC 两组分的 Bose 气体 (视为赝自旋 1/2) 可以写为<sup>[4,30]</sup>

$$\hat{V}_{SO} = 2\hbar\kappa_r \hat{p}_x \hat{\sigma}_z + \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{\sigma}_x + \frac{\hbar\delta}{2} \hat{\sigma}_z, \quad (2)$$

其中  $\kappa_r$  是双光子反冲动量,  $\Omega$  是拉曼耦合强度,  $\delta$  是双光子失谐,  $\hat{\sigma}$  为泡利矩阵算符. 三维哈密顿量  $\hat{H}_{3d} = \hat{H}(x) + \hat{H}_{2d}(y, z)$  可以通过维度塌缩方法变为一维系统, 这样一维系统的哈密顿量为

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \hat{V}_{SO}. \quad (3)$$

将  $\omega_x$  简记为  $\omega$ . (3) 式的模型看似简单, 除了特殊情况  $\omega = 0$  或  $\Omega = 0$  之外, 该模型不容易解析求解.

## 3 映射为量子 Rabi 模型

为了将谐波势阱中的 SOC 模型变换到量子 Rabi 模型, 将原子质心运动量子化用  $a^\dagger(a)$  产生 (湮灭) 算符来表示, 方程 (3) 改写为

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \hbar\delta \hat{\sigma}_z / 2 + \hbar\Omega \hat{\sigma}_x / 2 + i\hbar\lambda (a^\dagger - a) \hat{\sigma}_z, \quad (4)$$

其中  $p_x = i\sqrt{m\hbar\omega}/2(a^\dagger - a)$  和  $\lambda = k_r \sqrt{2m\hbar\omega}$ . 略去常数项哈密顿量简化为

$$\hat{H} = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\delta \hat{\sigma}_z / 2 + \hbar\Omega \hat{\sigma}_x / 2 + i\hbar\lambda (a^\dagger - a) \hat{\sigma}_z. \quad (5)$$

做一旋转变换  $a^\dagger \rightarrow a^\dagger e^{i\theta}$ ,  $a \rightarrow a e^{-i\theta}$  ( $\theta = \pi/2$ ), 方程 (5) 变为标准的 Rabi 模型

$$\hat{H}_R = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\delta \hat{\sigma}_z / 2 + \hbar\Omega \hat{\sigma}_x / 2 + \hbar\lambda (a^\dagger + a) \hat{\sigma}_z. \quad (6)$$

量子光学中 Rabi 模型描述了量子化光场与二能级原子内态的耦合, 此处则描述了原子赝自旋 (此后简称为量子比特) 与质心动量的耦合. 这样就可以利用量子光学中的方法来求解该系统. 当  $\delta = 0$  时, 系统进一步简化为

$$\hat{H} = \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{\sigma}_x + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\lambda \hat{\sigma}_z (a^\dagger + a), \quad (7)$$

其中  $\Omega$  是原子内部能级的能量差,  $\omega$  为谐振子束缚势频率,  $\lambda$  为自旋-轨道耦合强度.

## 4 变分法求解基态

系统的哈密顿量 (7) 式在  $\hat{\sigma}_z$  表象中可以表示为

$$H = \frac{\hbar\Omega}{2} (|+z\rangle\langle -z| + |-z\rangle\langle +z|) + H_L |+z\rangle\langle +z| + H_R |-z\rangle\langle -z| - \hbar\lambda^2/\omega, \quad (8)$$

其中  $H_L$  和  $H_R$  分别是依赖于量子比特的振子左右平移哈密顿量<sup>[32]</sup>,

$$H_{L,R} = \hbar\omega (a^\dagger \pm \lambda/\omega) (a \pm \lambda/\omega), \quad (9)$$

$| \pm z \rangle$  为  $\hat{\sigma}_z$  的本征态. 如果忽略  $\Omega$  项, 则能量本征态就是与量子比特相关的振子的平移 Fock 态 ( $|+z\rangle$  对应左平移态,  $|-z\rangle$  对应右平移态). 通常人们将  $\Omega$  项视为微扰 (绝热近似), 但本文主要研究  $\Omega/\omega > 1$  的情况. 下面我们采用试探波函数  $|\psi_0\rangle$  方法, 将振子平移量和量子比特内态的相干叠加参数分别作为变分参数:

$$|\psi_0\rangle = |\alpha\rangle \otimes \left( \cos \frac{\theta}{2} |+x\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |-x\rangle \right), \quad (10)$$

其中  $|\alpha\rangle$  为相干态,  $| \pm x \rangle$  为  $\hat{\sigma}_x$  的本征态. 在坐标和动量表象中表示为

$$\langle q|\alpha\rangle = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp \left[ - \left( \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} q - \alpha \right)^2 \right],$$

$$\langle p|\alpha\rangle = (\pi m\hbar\omega)^{-1/4} \exp \left[ - \left( \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} p + i\alpha \right)^2 - \alpha^2 \right], \quad (11)$$

其中  $m$  是原子的质量. 假定  $\alpha$  为实数, 则能量期待值表示为

$$E_0 = \langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle = \frac{\hbar\Omega}{2} \cos \theta + 2\hbar\lambda \alpha \sin \theta + \hbar\omega \alpha^2. \quad (12)$$

故此, 可以通过对含参数  $\alpha$  和  $\theta$  的能量泛函最小化以求得基态能量. 根据二元函数极值判据可知当  $4\lambda^2/(\Omega\omega) < 1$  时, 系统能量只有一个局域最小值, 在  $\alpha = 0$  和  $\theta = 0$  时取得; 但如果条件

$$\frac{1}{\varepsilon} \equiv \frac{4\lambda^2}{\Omega\omega} > 1 \quad (13)$$

成立, 则能量有两个局域极小值, 分别由  $\alpha = \pm\alpha_0$

和  $\theta = \pm\theta_0$  给出, 且有

$$\cos\theta_0 = -\Omega\omega/(4\lambda^2), \quad (14)$$

$$\alpha_0 = -\frac{\lambda}{\omega} \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega\omega}{4\lambda^2}\right)^2}. \quad (15)$$

此后我们假设条件 (13) 始终成立, 另外我们假定选择  $\theta_0$  使得  $\sin\theta_0 \geq 0$ , 这使得  $\alpha_0 \leq 0$ , 分别对应两个简并态  $|\psi_{0,L}\rangle = |\alpha_0\rangle \left( \cos\frac{\theta_0}{2} |+\rangle + \sin\frac{\theta_0}{2} |-\rangle \right)$  (左平移) 和  $|\psi_{0,R}\rangle = |-\alpha_0\rangle \left( \cos\frac{\theta_0}{2} |+\rangle - \sin\frac{\theta_0}{2} |-\rangle \right)$  (右平移), 相应的能量为

$$E(\alpha_0, \theta_0) = -\frac{\hbar\lambda^2}{\omega} - \frac{\hbar\Omega^2\omega}{16\lambda^2} = -\frac{\hbar\lambda^2}{\omega} (1 + \varepsilon^2), \quad (16)$$

此处  $\varepsilon = \Omega\omega/(4\lambda^2)$ . 这两个简并态均不是宇称算符  $\hat{P} = \exp[i\pi(a^\dagger a + \sigma_x/2 - 1/2)]$  的本征态 [33], 通过相干叠加可以得到具有确定宇称的量子态

$$|\Phi_{\pm,0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\eta_{\pm,0}} (|\psi_{0,L}\rangle \pm |\psi_{0,R}\rangle), \quad (17)$$

这里  $\eta_{\pm,0} = \sqrt{1 \mp \varepsilon e^{-2\alpha_0^2}}$  是归一化系数,  $|\psi_{0,L}\rangle$  和  $|\psi_{0,R}\rangle$  在一般不正交 (见 (20), (22) 式). 计算证明可得若 (13) 式成立, 就有  $\langle \Phi_{-,0} | H | \Phi_{-,0} \rangle < E(\alpha_0, \theta_0)$  成立 (见图 1), 因此,  $|\Phi_{-,0}\rangle$  是系统基态更好的近似. 为保证波函数具有确定的宇称, 定义

$$|\Phi_{\pm,N}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\eta_{\pm,N}} (|\psi_{N,L}\rangle \pm |\psi_{N,R}\rangle), \quad (18)$$

这里左右平移态分别为:

$$\begin{aligned} |\psi_{N,L}\rangle &= \hat{D}[\alpha_0] |N\rangle \otimes \left( \cos\frac{\theta_0}{2} |+\rangle + \sin\frac{\theta_0}{2} |-\rangle \right), \\ |\psi_{N,R}\rangle &= \hat{D}[-\alpha_0] |N\rangle \otimes \left( \cos\frac{\theta_0}{2} |+\rangle - \sin\frac{\theta_0}{2} |-\rangle \right). \end{aligned} \quad (19)$$

归一化系数为

$$\eta_{\pm,N} = \left[ 1 \mp \varepsilon e^{-2(\lambda^2/\omega^2)(1-\varepsilon^2)} L_N \left( \frac{4\lambda^2}{\omega^2} (1-\varepsilon^2) \right) \right]^{1/2}. \quad (20)$$

在 (19) 式中,  $\hat{D}[\alpha] \equiv \exp[\alpha(a^\dagger - a)]$  是平移算符,  $\hat{D}[\pm\alpha] |N\rangle$  是平移 Fock 态, 简记为  $|\pm\alpha, N\rangle$ , 左右平移 Fock 态的内积可用 Laguerre 多项式给出:

$$\begin{aligned} E_{\pm,N} &= \frac{\hbar}{1 \mp \varepsilon e^{-2\alpha_0^2} L_N(4\alpha_0^2)} \left[ -\frac{\Omega}{2} \varepsilon + N\omega - \frac{\lambda^2}{\omega} (1-\varepsilon^2) \pm \left( \frac{\Omega}{2} - N\omega\varepsilon + \frac{\lambda^2}{\omega} \varepsilon (1-\varepsilon^2) \right) e^{-2\alpha_0^2} L_N(4\alpha_0^2) \right] \\ &= \frac{\hbar}{1 \mp \varepsilon e^{-2\alpha_0^2} L_N(4\alpha_0^2)} \left[ -\frac{\Omega}{2} \left( \varepsilon \mp e^{-2\alpha_0^2} L_N(4\alpha_0^2) \right) \right] + \hbar N\omega - \hbar \frac{\lambda^2}{\omega} (1-\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (22)$$

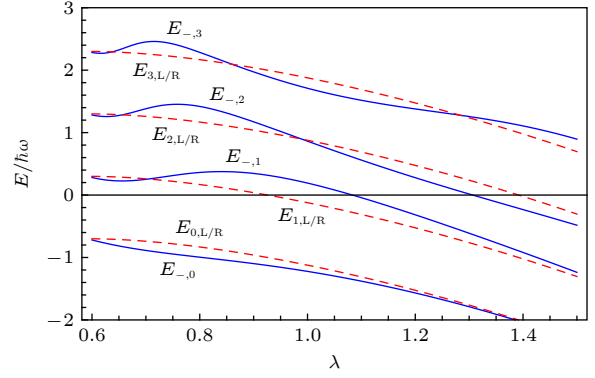


图 1 简并量子态  $|\psi_{N,L(R)}\rangle$  能量  $E_{N,L/R}$  与左右平移奇宇称叠加态  $|\psi_{-,N}\rangle$  能量  $E_{-,N}$  随 SO 耦合强度  $\lambda$  的变化. 可见  $N=0$  叠加态  $|\psi_{-,0}\rangle$  能量最低, 更接近基态; 而对于激发态  $N \neq 0$ , 二者能量随参数变化出现交叉; 相关参数取值为  $\Omega = 1.4\omega$ , 与文献 [19] 精确解的结果基本一致

Fig. 1. The energies of degenerate quantum states  $|\psi_{N,L(R)}\rangle$  and the superposition state of odd parity  $|\psi_{-,N}\rangle$  of left(right)-displaced number states varies as the spin-orbit coupling strength  $\lambda$ . It is seen that for  $N=0$ , the superposition state has the lowest energy which is the best approximation for the ground state in our interest. And for the cases of  $N \neq 0$ , the energies of the two quantum states have pitchforks. The relevant parameters is  $\Omega=1.4$  and the results are in agreement with those in Ref.[19].

$$\langle -\alpha, N | \alpha, N \rangle = e^{-2\alpha^2} L_N(4\alpha^2), \quad (21)$$

平移 Fock 态  $|\psi_{N,L(R)}\rangle$  与  $|\psi_{0,L(R)}\rangle$  源于相同的变分计算, 对于不同声子数  $N$  均具有相同的  $\alpha_0$  和  $\theta_0$ , 并且对于不同  $N$ ,  $|\psi_{N,L/R}\rangle$  彼此正交, 但左右平移振子态并不正交; 对于相同的声子数且当  $N$  较大时, 内积以  $1/(N^{1/4}\alpha^{1/2})$  衰变.  $|\psi_{N,L}\rangle$  和  $|\psi_{N,R}\rangle$  在能量上简并, 考虑宇称自然构造出 (18) 式的叠加态. 容易看出,  $|\Phi_{\pm,N}\rangle$  为一完备非正交的基.  $|\Phi_{\pm,N}\rangle$  的宇称是  $\pm(-1)^N$ , 并且相反宇称态正交, 相同宇称态一般不正交; 对于大声子数  $N$  和  $M$ , 交叠积分  $\langle -\alpha, N | \alpha, M \rangle$  至少以  $\alpha^{-1/2}$  的速度衰减. 考虑 (15) 式, 在极限  $\lambda \gg \omega$  的参数区域可以得到近似的正交基. 此外交叠积分也为因子  $\cos\theta_0 = -\varepsilon$  所抑制, 对于大的耦合常数  $\lambda$  积分也是小量. 这些条件允许我们用期望值近似作为  $H$  的能量本征值, 也就是哈密顿量在近似正交基 (18) 式下的对角元. 对于足够大的  $\alpha_0$  非对角元很小. 近似能量  $E_{\pm,N} = \langle \Phi_{\pm,N} | H | \Phi_{\pm,N} \rangle$  表示为

这个近似结果解有助于我们直观地理解系统的动力学。

## 5 系统动力学演化

考虑系统的动力学演化, 对于稀薄原子气体可以忽略原子间相互作用. 我们取初态  $|\psi_{0,L}\rangle$ , 在初始时刻时开启拉曼诱导的 SOC, 则系统的初始波函数为

$$\begin{aligned} |\Psi(t=0)\rangle &= |\psi_{0,L}\rangle \\ &= |\alpha_0\rangle \left( \cos \frac{\theta_0}{2} |+\rangle + \sin \frac{\theta_0}{2} |-\rangle \right) \\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Phi_{-,0}\rangle + |\Phi_{+,0}\rangle), \end{aligned} \quad (23)$$

其时间演化近似为

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{e^{-iE_{-,0}t/\hbar}}{\sqrt{2}} (|\Phi_{-,0}\rangle + e^{-i\Delta\omega t} |\Phi_{+,0}\rangle), \quad (24)$$

其中  $\Delta\omega$  是频率差,

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \frac{E_{+,0} - E_{-,0}}{\hbar} = \frac{\Omega(1-\varepsilon^2)e^{-2\alpha_0^2}}{1-\varepsilon^2e^{-4\alpha_0^2}} \\ &\simeq \Omega(1-\varepsilon^2)e^{-2\alpha_0^2}, \end{aligned} \quad (25)$$

在 (25) 式中忽略了  $e^{-2\alpha_0^2}$  的高阶幂次. 可以看出在初始时刻  $t=0$  时, 初态动量分布主要位于左侧 (振子相干态  $|\alpha_0\rangle$ ); 而在时刻  $t=\pi/\Delta\omega$  时, 动量分布主要位于右侧 (振子相干态  $|- \alpha_0\rangle$ ); 在时刻  $t=\pi/(2\Delta\omega)$ , 原子动量概率分布呈双峰分布, 对应于两个相干态的叠加, 这是标准的隧穿运动, 与经典双势阱完全类似.

图 2 和图 3 分别给出了粒子在动量空间和坐标空间概率分布的动态特性, 由 (23) 式的近似值计算得出, 在这里我们取  $\Omega=3\omega$  和  $\lambda=2\omega$ . 可以清楚地看到原子质心动量和空间位置分布的特征隧穿行为, 即所谓 Zitterbewegung 振荡.

另外两组分原子布居差  $\sigma_z$  的期望值  $\langle\sigma_z\rangle = \sin\theta_0 \cos(\Delta\omega t)$  描述了原子的极化率的动力学. 图 4 显示了原子极化  $\langle\sigma_z\rangle$  随时间的演化, 可以看到  $\langle\sigma_z\rangle$  在 1 和 -1 之间周期振荡.

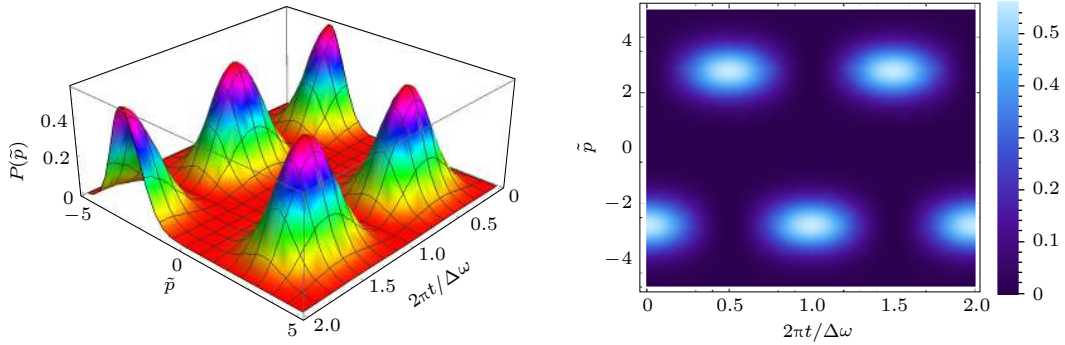


图 2 原子动量分布概率的粗粒动力学演化 (3D, 左侧; 2D, 右侧) 相关参数取值为  $\Omega=3\omega$ ,  $\lambda=2\omega$ , 初态为  $\Psi(t=0)=\psi_{0,L}$ , 动量  $\tilde{p} = \sqrt{1/m\hbar\omega p}$

Fig. 2. The coarse dynamics evolution of momentum distribution of single particle (left for 3D; right for 2D) with  $\Omega=3\omega$  and  $\lambda=2\omega$ . The initial state is set as  $\Psi(t=0)=\psi_{0,L}$ . Momentum  $\tilde{p}$  is defined by  $\tilde{p} = \sqrt{1/m\hbar\omega p}$ .

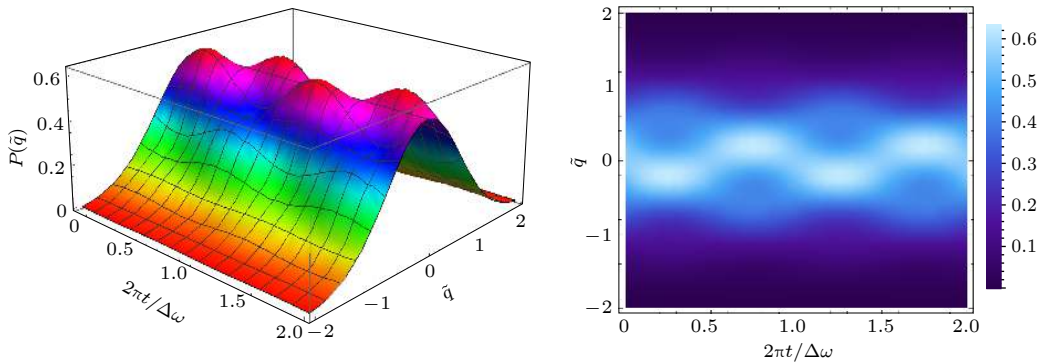


图 3 原子空间位置分布概率的粗粒动力学演化 (3D, 左侧; 2D, 右侧) 相关参数取值及初态同图 2, 位置  $\tilde{q} = \sqrt{m\omega/\hbar q}$

Fig. 3. The coarse dynamics evolution of position distribution of single particle (left for 3D; right for 2D) with the same parameters and the initial state in Fig. 2 and  $\tilde{q} = \sqrt{m\omega/\hbar q}$ .

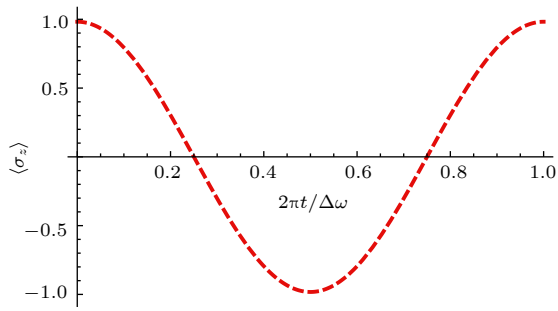


图 4 原子极化  $\langle \sigma_z \rangle$  随时间演化初态为  $\Psi(t=0) = \psi_{0,L}$ , 参数取值为  $\Omega = 3\omega$  和  $\lambda = 2\omega$ , 时间以因子  $2\pi/\Delta\omega$  标度  
Fig. 4. Time evolution of  $\langle \sigma_z \rangle$  with the initial state being  $\Psi(t=0) = \psi_{0,L}$  and the parameters  $\Omega = 3\omega$  and  $\lambda = 2\omega$ . The time is scaled by the tunneling period  $2\pi/\Delta\omega$ .

## 6 结 论

综上, 我们求解了谐波势阱中拉曼诱导自旋轨道耦合的 Bose 气体, 通过将系统完全映射到量子 Rabi 模型, 将辐射场变为声子场, 运用量子光学中平移 Fock 态的方法得到了强耦合区域谐波势阱中自旋轨道耦合的 Bose 气体模型的基态解及系统的动力学演化, 直观地给出了原子质心空间坐标和动量及原子极化随时间的振荡图像, 与相关的实验结果定性相符。

传统量子光学中二能级系统与振子系统的耦合强度受到很大限制, 但在本系统中原子自旋轨道耦合强度可以通过 Raman 耦合来调节, 冷原子的质心动能很小, 不能像量子光学中惯常采用绝热近似忽略掉原子的质心动能, 这使得本模型科学合理. 冷原子系统具有良好的可调控性, 通过改变束缚势阱的频率以及 Raman 激光的波长和强度, 可以实现量子光学中 Rabi 模型目前无法达到的参数区域—深度强耦合区域. 本文的研究也为自旋轨道耦合的冷原子系统提供了一个新的方法和视角。

## 参考文献

[1] Xiao D, Chang M C, Niu Q 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 1959  
[2] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045

[3] Zutic I, Fabian J, Sarma S D 2004 *Rev. Mod. Phys.* **76** 323  
[4] Lin Y J, Garcia K J, Spielman I B 2011 *Nature* **471** 8386  
[5] Wang P, Yu Z Q, Fu Z, Miao J, Huang L, Chai S, Zhai H, Zhang J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095301  
[6] Cheuk L W, Sommer A T, Hadzibabic Z, Yefsah T, Bakr W S, Zwierlein M W 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095302  
[7] Zhang J Y, Ji S C, Chen Z, Zhang L, Du Z D, Yan B, Pan G S, Zhao B, Deng Y J, Zhai H, Chen S, Pan J W 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 115301  
[8] Galitski V, Spielman I B 2013 *Nature* **494** 4954  
[9] Lin Y J, Compton R L, Garcia K J, Porto J V, Spielman I B 2009 *Nature* **462** 628  
[10] Lin Y J, Compton R L, Perry A R, Phillips W D, Porto J V, Spielman I B 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 130401  
[11] Qu C, Hamner C, Gong M, Zhang C, Engels P 2013 *Phys. Rev. A* **88** 021604  
[12] LeBlanc L J, Beeler M C, Jimenez-Garcia K, Perry A R, Sugawa S, Williams R A, Spielman I B 2013 *New J. Phys.* **15** 073011  
[13] Wu C J, Mondragon-Shem I, Zhou X F 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 097102  
[14] Hu H, Ramachandhran B, Pu H, Liu X J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 010402  
[15] Sinha S, Nath R, Santos L 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 270401  
[16] Ghosh S K, Vyasankere J P, Shenoy V B, 2011 *Phys. Rev. A* **84** 053629  
[17] Larson J, Anderson B M, Altland A 2013 *Phys. Rev. A* **87** 013624  
[18] Rabi I I 1936 *Phys. Rev.* **49** 324  
[19] Rabi I I 1937 *Phys. Rev.* **51** 652  
[20] Braak D 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 100401  
[21] Chen Q H, Wang C, He S, Liu T, Wang K L 2012 *Phys. Rev. A* **86** 023822  
[22] Solano E 2011 *Physics* **4** 68  
[23] Gardas, Dajka J 2013 arXiv: 1301.5660[quant-ph]  
[24] Wolf F A, Kollar M, Braak D 2012 *Phys. Rev. A* **85** 053817  
[25] Walther H, Varcoe B, Englert B, Becker T 2006 *Rep. Prog. Phys.* **69** 1325  
[26] Raimond J M, Brune M, Haroche S 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 565  
[27] Holstein T 1959 *Ann. Phys.* **8** 325  
[28] Mabuchi H, Doherty A C 2002 *Science* **298** 1372  
[29] Niemczyk T, Deppe F, Huebl H, Menzel E P, Hocke F, Schwarz M J, Garcia-Ripoll J J, Zueco D, Hümmer T, Solano E, Marx A, Gross R 2010 *Nature Phys.* **6** 772  
[30] Forn-Diaz P, Lisenfeld J, Marcos D, Garcia-Ripoll J J, Solano E, Harmans C J P M, Mooij J E 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 237001  
[31] Fu Z, Wang P, Chai S, Huang L, Zhang J 2011 *Phys. Rev. A* **84** 043609  
[32] Cahill K K, Glauber R J 1969 *Phys. Rev.* **177** 1857  
[33] Graham R, Hohnerbach M 1984 *Phys. B: Condens. Matter* **57** 233

# One-dimensional spin-orbit coupling Bose gases with harmonic trapping\*

Li Zhi-Qiang<sup>1)3)</sup> Wang Yue-Ming<sup>2)3)†</sup>

1) (*Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

2) (*School of Physics and Electronic Engineer, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

3) (*State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, Institute of Opto-Electronics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

( Received 25 January 2019; revised manuscript received 28 May 2019 )

## Abstract

Rabi model is a popular model in quantum optics and describes a two-level system coupling to a quantum resonator. The fruitful physics appears when the coupling strength is comparable to the frequency of the resonator. We investigate the Bose gases of Raman induced spin-orbit coupling with an external harmonic trapping. Using the displacement Fock state in quantum optics we seek for an approximate ground state. We find the superposition state of left and right displaced oscillator state with odd parity has lower energy than the displaced state itself. Besides, we study the time evolution of both the momentum and the position of the system at single particle level to demonstrate the Zitterbewegung oscillating characteristics, which present an intuitive physical picture and are in qualitative agreement with the relevant experimental results. The results are useful to study the Rabi model in deep-strong coupling regime, the model that is difficult to realize in today's experiment based on the high controllability property of laser, and these results are also instructive for the cold atom physics field.

**Keywords:** Rabi model, spin-orbit coupling, Zitterbewegung oscillations, displacement Fock state, variational method

**PACS:** 32.80.Qk, 03.75.Lm

**DOI:** [10.7498/aps.68.20190143](https://doi.org/10.7498/aps.68.20190143)

---

\* Project supported by the Shanxi 1331 KSC and 111 Project, China (Grant Nos. 1331KSC, D18001) and the Natural Science Foundation of Shanxi Province, China (Grant No. 201601D011009).

† Corresponding author. E-mail: [wang\\_ym@sxu.edu.cn](mailto:wang_ym@sxu.edu.cn)