



基于智能手机传感器和 phyphox 软件精确测量刚体转动惯量

贺梓淞, 焦梦鸽, 江宜航, 周建成, 雷衍连, 贾伟尧, 张巧明*

(西南大学 物理科学与技术学院, 重庆 400715)

摘要: “刚体转动惯量的测量”是全国大多数高校大学物理实验课程的必做项目。传统方法是利用光电门和智能计时计数器来测定刚体转动过程中的角加速度, 并根据公式计算出转动惯量。但该方法存在仪器组成复杂、角加速度测量精度低等问题。该文利用可安装 phyphox 软件的智能手机终端, 调用手机内置传感器来测量刚体的角加速度, 最终得到更加精确的转动惯量。新的测量方法表明, 智能手机在大学物理实验精度改进上具有成本低、精度高、操作简单等优势, 展现了巨大的应用潜力。

关键词: 智能手机; 传感器; phyphox; 转动惯量; 测量精度

中图分类号: O4-33

文献标志码: A

DOI: 10.12179/1672-4550.20220119

Accurately Measuring the Moment of Inertia of Rigid Body Based on Smartphone Sensor and Phyphox Software

HE Zisong, JIAO Mengge, JIANG Yihang, ZHOU Jiancheng, LEI Yanlian, JIA Weiyao, ZHANG Qiaoming*

(School of Physical Science and Technology, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: Measuring the moment of inertia of rigid body is a required item in college physics experiment in most universities. The traditional method employs the photoelectric gate and millisecond meter to measure the angular acceleration of rigid body during rotation, and subsequently obtains its moment of inertia. However, this method not only needs complex instruments, but also has low measurement accuracy. In this work, a smartphone with phyphox software has been employed to accurately measure the angular acceleration of the rigid body and then obtains its moment of inertia thanks to the high precision sensor in the smartphone. Hence, our current work evidences that smartphone exhibits high potential on improving the precision of college physics experiments with low cost, high precision, and simple operation.

Key words: smartphone; sensor; phyphox; moment of inertia; measurement accuracy

刚体的转动惯量是刚体绕定轴转动时其惯性的量度^[1]。刚体转动惯量用于建立角动量、角速度、力矩和角加速度等多个物理量之间的关系, 其大小取决于刚体的形状、质量分布及转轴的位置。“刚体转动惯量的测量”是全国大多数高校在大学物理实验课程中必做的项目^[2]。刚体转动惯量的测量仪器有三线摆、扭摆和刚体转动惯量仪

等。其中, 刚体转动惯量仪最常用, 它测定刚体转动惯量的基本原理是利用光电门和智能计时计数器等装置测量转台转过一定角度所用的时间来计算刚体转动的角加速度 β , 再利用转动定理计算出转动惯量 I 。然而, 传统测量方法不仅需要专业的设备(包括光电门和智能计时计数器), 而且测量的数据有限(都是一些离散点), 从而导致较大

收稿日期: 2022-03-04; 修回日期: 2023-03-19

基金项目: 重庆市教委科学技术研究项目(KJQN202100215); 西南大学教育教学改革项目(2022JY069, 2022JY010, 2021JY085); 西南大学专业核心课程建设项目(2022年); 教育部产学合作协同育人项目(220603117280342); 教育部产学合作创新创业项目(2209031172023708)。

作者简介: 贺梓淞(2001-), 男, 本科生, 物理学研究专业。

*通信作者: 张巧明(1986-), 男, 博士, 副教授, 主要从事有机电子器件及应用方面的研究。E-mail: zqm520@swu.edu.cn

的实验误差。

智能手机具有小巧、易携带、功能强大等特点, 已经广泛应用到人们的日常生活中。为了满足各种功能, 智能手机集成了多种高精度、高灵敏度的传感器, 如加速度传感器、光线传感器和微机电陀螺仪(即角速度传感器)等。笔者以安装了 phyphox 软件的智能手机为测量工具, 调用智能手机中的微机电陀螺仪对转动过程中的角加速度进行精确测量。实验结果显示: 利用智能手机测量圆环的转动惯量与理论值的相对误差为 1.91% (传统方法测量的相对误差为 5.72%); 而平行轴定理验证时的相对差值为 0.94% (传统方法测量的相对差值为 10.4%)。与传统测量结果相比, 将智能手机应用于刚体转动惯量的测量, 不仅能够提升测量精度, 也能增强学生的学习兴趣, 提高教学效果。

1 phyphox 软件的介绍

phyphox 是由德国亚琛工业大学设计开发的一款 App, 它能够调用智能手机中所含有的各类传感器以精确测量力、光、电、声等多种物理量, 并能生成图表、导出数据^[3]。其中, 微机电陀螺仪利用科里奥利力在其内部产生微小的电容变化, 测量此电容的变化并计算出角速度。本实验就是利用 phyphox 的“陀螺仪”功能来测量角速度 ω 的^[4]。

2 恒力矩转动法测转动惯量的原理

根据刚体转动定理^[5]:

$$M = I\beta \quad (1)$$

只要测得刚体所受的合外力矩 M 及该力矩作用下刚体的角加速度 β , 即可算出其转动惯量 I 。

假设以某初始角速度转动的空转台的转动惯量为 I_1 , 未加砝码时, 在摩擦阻力矩 M_μ 的作用下空转台将以角加速度 β_1 作匀减速转动, 即:

$$-M_\mu = I_1\beta_1 \quad (2)$$

将质量为 m 的砝码用细线绕在半径为 R 的塔轮上, 并让砝码下落, 系统在恒外力作用下作匀加速转动。若砝码的加速度为 a , 则细线所受张力为 $T = m(g-a)$ 。若此时转台的角加速度为 β_2 , 有 $a = R\beta_2$ 。细线施加给转台的力矩为 $TR = m(g - R\beta_2)R$, 有:

$$m(g - R\beta_2)R - M_\mu = I_1\beta_2 \quad (3)$$

将式(2)和式(3)联立消去 M_μ 后, 可得:

$$I_1 = \frac{mR(g - R\beta_2)}{\beta_2 - \beta_1} \quad (4)$$

同理, 若在实验台上加上被测试件后系统的转动惯量为 I_2 , 做匀减速转动和匀加速转动时的角加速度分别为 β_3 与 β_4 , 则有:

$$I_2 = \frac{mR(g - R\beta_4)}{\beta_4 - \beta_3} \quad (5)$$

由转动惯量的叠加原理可知被测试件的转动惯量:

$$I_3 = I_2 - I_1 \quad (6)$$

由式(4)~式(6)可知, 测得 R 及 β_1 、 β_2 、 β_3 、 β_4 , 即可计算出被测试件的转动惯量。因此, 精确测量定轴转动过程中的角加速度是关键。

3 实验案例分析

3.1 圆环绕中心轴转动惯量的测量

本文以圆环为被测试样(质量 $m = 440.67$ g、内径 $R_{in} = 10.50$ cm、外径 $R_{out} = 12.00$ cm), 对比智能手机的测量结果和传统智能计时计数器与光电门相结合的测量结果, 来验证智能手机提升大学物理实验精度的方案是否可行。

将手机用双面胶固定于转台中心位置, 分别在摩擦力矩和合外力矩的作用下使转台+手机系统做匀减速和匀加速转动, 测量转台+手机系统的转动惯量 $I_{转台+手机}$ 和转台+手机+待测样品系统的转动惯量 $I_{转台+手机+圆环}$, 如图 1 所示。具体有下面 5 个步骤。

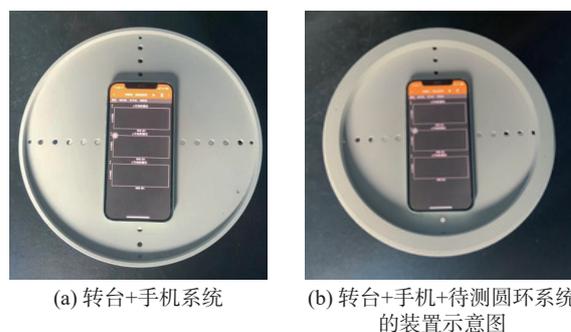


图 1 圆环绕中心轴的转动惯量测定

1) 利用手机中 phyphox 软件里的陀螺仪功能, 对匀减速和匀加速转动过程中的角速度进行测量。

2) 导出 phyphox 软件中存储的数据, 利用数据处理软件(如 MATLAB 或 origin 等)拟合角速度和时间关系, 得到匀减速或匀加速转动的角加速度。

3) 由式(4)可获得转台+手机的转动惯量 $I_{\text{转台+手机}}$;

4) 将待测圆环固定于转台上, 重复上面的步骤, 测量空转台+手机+圆环系统绕中心轴转动的转动惯量 $I_{\text{转台+手机+圆环}}$;

5) 由叠加原理可以获得待测圆环的转动惯量 $I_{\text{圆环}} = I_{\text{转台+手机+圆环}} - I_{\text{转台+手机}}$ 。需要指出的是, 此时不用考虑放置手机对实验结果的影响, 因为手机引入的额外转动惯量在式中直接相减后被消去。

3.2 验证平行轴定理

验证平行轴定理是本实验的重要内容之一。平行轴定理是指: 就两个平行轴而言, 刚体对于任意轴的转动惯量 I 等于通过此物体以质心为轴的转动惯量 I_c 加上刚体质量 m 与两轴间距离平方 d^2 的乘积^[6]。

利用智能手机验证平行轴定理时, 首先需要将手机固定于转台的中心位置, 并将质量为 m ($m=331.90\text{ g}$)、直径为 d ($d=2.400\text{ cm}$) 的两个圆柱体对称地插入载物台十字架的插孔 A 和 A' 内(两者距中心圆孔的距离均为 d_1 , 这样转动体系在转动时较平稳, 以减少误差), 如图 2 所示。其次, 测量系统做匀减速和匀加速转动的角加速度, 并计算出对应的转动惯量 $I_{\text{初}}$ 。然后, 将两圆柱体对称外移相同距离并插入载物台十字架的插孔 B 和 B' 位置(两者距中心圆孔的距离均为 d_2), 分别测量匀减速和匀加速转动的角加速度, 并计算出对应的转动惯量 $I_{\text{末}}$ 。最后, 将 $I_{\text{末}} - I_{\text{初}}$ 与 $2m(d_2^2 - d_1^2)$ 比较, 验证平行轴定理是否成立。



图 2 两圆柱离中心轴的初末位置示意图

3.3 实验结果与分析

由于转台的转速在初始阶段还未达到平稳, 我们选取中间时段的数据进行拟合和计算。此

外, 采用 3 次等精度重复测量的方法以减小误差。受版面限制, 这里只详细介绍转台+手机系统的转动惯量 $I_{\text{转台+手机}}$ 的测量数据及计算过程, 其他测量和计算的方法相同。

3.3.1 转台+手机匀减速转动时的角加速度

转台+手机系统在摩擦力矩作用下将做匀减速转动。角速度随时间变化的原始数据如图 3 中的黑色空心方框曲线所示。这一曲线的斜率即为匀减速转动的角加速度 β_1 。利用 origin 对其拟合求得 β_1 的值如图 3 中的红色实线所示。此拟合曲线的斜率为 -0.3166 , 表示转台+手机系统的匀减速转动的角加速度为 -0.3166 rad/s^2 。

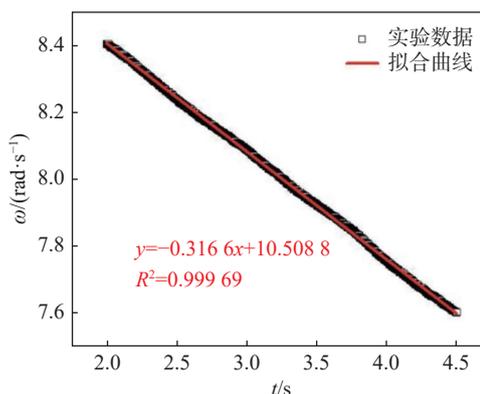


图 3 转台+手机系统做匀减速转动的原始数据及拟合曲线

3.3.2 转台+手机匀加速转动时的角加速度

将 54.40 g 的砝码绕到转台下的半径 $r=3.50\text{ cm}$ 的塔轮上, 在砝码的拉力矩和转轴的摩擦力矩的共同作用下, 转台将做匀加速转动, 转台+手机做匀加速转动的角速度随时间的变化用蓝色空心圆的曲线表示, 如图 4 所示。利用 origin 对其拟合可得匀加速转动的角加速度为 2.2298 rad/s^2 。

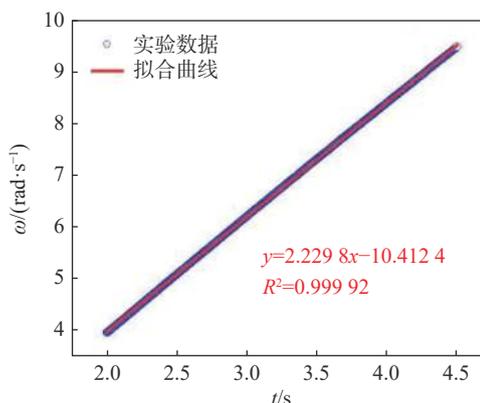


图 4 转台+手机系统做匀加速转动的原始数据及拟合曲线

3.3.3 转台+手机的转动惯量 $I_{\text{转台+手机}}$ 的计算

用同样的方法, 分别测量 3 次匀减速转动的

角加速度和匀加速转动的角加速度, 如表 1 所示, 得到系统做匀减速转动的平均角加速度 $\bar{\beta}_1$ 和匀加速转动的平均角加速度 $\bar{\beta}_2$ 。将上述平均值、砝码质量 ($m = 54.40 \text{ g}$) 和塔轮半径 ($r = 3.50 \text{ cm}$) 代入式(4), 得 $I_{\text{转台+手机}} = 7.0987 \times 10^{-3} \text{ (kg}\cdot\text{m}^2)$ 。

3.3.4 待测圆环的转动惯量 $I_{\text{圆环}}$ 的计算

用同样的方法计算出转台+手机+圆环系统的转动惯量 $I_{\text{转台+手机+圆环}} = 12.5904 \times 10^{-3} \text{ (kg}\cdot\text{m}^2)$, 如表 2 所示。由转动惯量的叠加原理可知, 待测圆环的转动惯量 $I_{\text{圆环}} = I_{\text{转台+手机+圆环}} - I_{\text{转台+手机}} =$

$5.4917 \times 10^{-3} \text{ (kg}\cdot\text{m}^2)$ 。此外, 该圆环相对中心轴的转动惯量的理论值 $I_{\text{圆环,理}} = \frac{m}{2}(R_{\text{in}}^2 + R_{\text{out}}^2) = 5.5986 \times 10^{-3} \text{ (kg}\cdot\text{m}^2)$, 可得到圆环绕中心轴的转动惯量的相对误差 $\varepsilon_1 = \left| \frac{I_{\text{圆环}} - I_{\text{圆环,理}}}{I_{\text{圆环,理}}} \right| = 1.91\%$ 。

表 1 利用智能手机测量空台转动惯量 I_1 实验数据记录表

$\beta_1/(\text{rad}\cdot\text{s}^{-2})$	$\bar{\beta}_1/(\text{rad}\cdot\text{s}^{-2})$	$\beta_2/(\text{rad}\cdot\text{s}^{-2})$	$\bar{\beta}_2/(\text{rad}\cdot\text{s}^{-2})$	$I_1 \times 10^{-3}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$
-0.3166			2.2298	
-0.3193	-0.3186	2.2272	2.2289	7.0987
-0.3199		2.2297		

表 2 利用智能手机测量圆环转动惯量的数据记录表

$\beta_3/(\text{rad}\cdot\text{s}^{-2})$	$\bar{\beta}_3/(\text{rad}\cdot\text{s}^{-2})$	$\beta_4/(\text{rad}\cdot\text{s}^{-2})$	$\bar{\beta}_4/(\text{rad}\cdot\text{s}^{-2})$	$I_2 \times 10^{-3}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	$I \times 10^{-3}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	$I_{\text{圆环,理}}^* \times 10^{-3}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	相对误差
-0.1671		1.2994					
-0.1682	-0.1678	1.3095	1.3073	12.5904	5.4917	5.5986	1.91%
-0.1653		1.3130					

* 圆环绕几何中心轴的转动惯量理论值为 $I = \frac{m}{2}(R_{\text{外}}^2 + R_{\text{内}}^2)$, 其中圆环 $m = 440.67 \text{ g}$, $R_{\text{内}} = 10.50 \text{ cm}$, $R_{\text{外}} = 12.00 \text{ cm}$; 可得圆盘转动惯量理论值 $I_{\text{圆环,理}} = 5.5986 \times 10^{-3} \text{ (kg}\cdot\text{m}^2)$ 。

3.3.5 平行轴定理的验证

两圆柱初状态(距离转台中心 $d_1 = 6.00 \text{ cm}$)时, 匀减速转动和匀加速转动的角加速度分别为 -0.2286 rad/s^2 和 1.9882 rad/s^2 , 如表 3 所示。

初状态时, 两圆柱的转动惯量 $I_{\text{初}} = I_{\text{转台+手机+两圆柱}} - I_{\text{转台+手机}} = 8.1465 \times 10^{-3} - 7.0987 \times 10^{-3} = 1.0478 \times 10^{-3} \text{ (kg}\cdot\text{m}^2)$ 。同理, 将两圆柱体对称向外移动 4.50 cm (离转台中心距离 $d_2 = 10.50 \text{ cm}$) 时做匀减速转动和匀加速转动的角加速度分别为 -0.1770 rad/s^2

和 1.5415 rad/s^2 。由此计算出末状态的转动惯量 $I_{\text{末}} = I_{\text{转台+手机+两圆柱}} - I_{\text{转台+手机}} = 10.8422 \times 10^{-3} - 7.0987 \times 10^{-3} = 3.7435 \times 10^{-3} \text{ (kg}\cdot\text{m}^2)$ 。因此, 初末两状态的转动惯量差 $I_{\text{末}} - I_{\text{初}} = 3.7435 \times 10^{-3} - 1.0478 \times 10^{-3} = 2.6957 \times 10^{-3} \text{ (kg}\cdot\text{m}^2)$ 。由圆柱的质量 ($m = 331.90 \text{ g}$) 和初末两状态圆柱距中心的距离 ($d_1 = 6.00 \text{ cm}$, $d_2 = 10.50 \text{ cm}$) 有, $2m(d_2^2 - d_1^2) = 2.4644 \times 10^{-3} \text{ (kg}\cdot\text{m}^2)$ 。因此, 以 $I_{\text{末}} - I_{\text{初}}$ 的值为参考, $I_{\text{末}} - I_{\text{初}}$ 与 $2m(d_2^2 - d_1^2)$ 的相对差值为 0.94% , 平行轴定理得证。

表 3 利用智能手机验证平行轴定理实验数据记录表

状态	$\beta_5/(\text{rad}\cdot\text{s}^{-2})$	$\bar{\beta}_5/(\text{rad}\cdot\text{s}^{-2})$	$\beta_6/(\text{rad}\cdot\text{s}^{-2})$	$\bar{\beta}_6/(\text{rad}\cdot\text{s}^{-2})$	$I_2 \times 10^{-3}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	$I \times 10^{-3}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	相对差值*
初状态	-0.2289		1.9840				0.94%
	-0.2294	-0.2286	1.9996	1.9882	8.1465	1.0478	
	-0.2276		1.9810				
末状态	-0.1784		1.5429				0.94%
	-0.1763	-0.1770	1.5441	1.5415	10.8422	3.7435	
	-0.1762		1.5376				

* 初末两状态的转动惯量之差为: $I_{\text{末}} - I_{\text{初}} = 2.6957 \times 10^{-3} \text{ (kg}\cdot\text{m}^2)$, 而 $2m(d_2^2 - d_1^2) = 2.4644 \times 10^{-3} \text{ (kg}\cdot\text{m}^2)$, 可得相对差值为 0.94% 。

3.3.6 传统方法测量 $I_{\text{圆环}}$ 和平行轴定理的验证

利用光电门+智能计时计数器测量转台转过 $k\pi$ ($k=1, 2, 3\cdots$) 角度所对应的时间, 然后利用匀加(减)速转动的角度公式 ($\theta = \omega t + \frac{1}{2}\beta t^2$) 计算得到转台做匀减速转动和匀加速转动的角加速度分别为

-0.1500 rad/s^2 和 2.1914 rad/s^2 , 如表 4 所示。因此, 转台的转动惯量 $I_{\text{转台}} = 7.9070 \times 10^{-3} \text{ (kg}\cdot\text{m}^2)$ 。同理可得转台+圆环的转动惯量 $I_{\text{转台+圆环}} = 13.8260 \times 10^{-3} \text{ (kg}\cdot\text{m}^2)$ 。需要指出的是, 传统方法的测量时间范围与智能手机的测量时间范围大致相当。由转动

惯量的叠加原理, 得 $I_{\text{圆环}}=I_{\text{转台}}+I_{\text{圆环}}-I_{\text{转台}}=5.919 \times 10^{-3} \text{ (kg}\cdot\text{m}^2)$ 。因此, 利用传统方法测得的圆环绕中

心轴的转动惯量的相对误差 $\varepsilon_r = \left| \frac{I_{\text{圆环}} - I_{\text{圆环,理}}}{I_{\text{圆环,理}}} \right| = 5.72\%$ 。

表 4 采用传统光电门和智能计数计时器的测量结果

	匀减速					匀加速					转动惯量 $I \times 10^{-3} \text{ (kg}\cdot\text{m}^2)$
	K_m	t_m/s	K_n	t_n/s	$\beta_1/(\text{rad}\cdot\text{s}^{-2})$	K_m	t_m/s	K_n	t_n/s	$\beta_2/(\text{rad}\cdot\text{s}^{-2})$	
空盘	3	1.1968	6	2.4214	-0.1476	3	1.8273	6	2.9419	2.2409	7.9070
	4	1.6015	7	2.8368	-0.1529	4	2.2364	7	3.2711	2.1326	
	5	2.0102	8	3.2551	-0.1495	5	2.6497	8	3.6023	2.2006	
圆环	3	1.9198	6	3.8990	-0.0755	3	2.4416	6	3.9321	1.2522	13.8260
	4	2.5733	7	4.5711	-0.0725	4	2.9960	7	4.3571	1.2524	
	5	3.2323	8	5.2512	-0.0729	5	3.4961	8	4.7599	1.2450	

*根据 $I=I_2 - I_1=5.919 \times 10^{-3} \text{ (kg}\cdot\text{m}^2)$, $I_{\text{理论值}}=5.5986 \times 10^{-3} \text{ (kg}\cdot\text{m}^2)$, 相对误差 $\varepsilon_r = \frac{|I - I_{\text{理}}|}{I_{\text{理}}} \times 100\% = 5.72\%$ 。

此外, 利用传统方法来验证平行轴定理的实验结果显示, $I_{\text{末}}-I_{\text{初}}$ 与 $2m(d_2^2-d_1^2)$ 的相对差值为 10.4%。(受版面限制, 数据未展示。)

3.3.7 结果分析

利用智能手机测得的圆环绕中心轴转动的转动惯量的相对误差为 1.91%, 而利用传统光电门+智能计时计数器的方法测得相对误差为 5.72%。此外, 利用智能手机为工具验证平行轴定理的相对差值为 0.94%, 而传统方法验证的平行轴定理的相对差值为 10.4%。这些结果表明利用智能手机的测量精度明显优于传统方法的测量精度。

利用上述两种方法分别测量了圆盘和圆柱的转动惯量, 实验结果都证明了利用智能手机作为测量工具的测量精度更高。这主要是因为传统方法测量的数据点有限, 而 phyphox 软件能每隔 4 ms 测量一次数据, 记录的数据足够多, 从而提高了测量精度^[7-9]。

4 结束语

利用智能手机中各种高精度、高灵敏传感器对物理实验进行改进和改良是近年来的研究热点。在这一方面, 中学物理实验教育进行了很多的尝试, 并广泛应用于中学物理实验的教学和拓展实验中^[10-11], 但也受到了一些专家的质疑和反对, 他们认为手机的引入往往会导致实验精度不高或者不可控、实验过程不确定性高等问题。他们还认为, 智能手机在中学演示实验中尚可将就, 但在精度要求更高的大学物理实验中并不合适。而在我们的工作中, 首次通过严谨的实验设计和测量过程, 系统地验证手机传感器确实可以有效提高测量精度(与传统方法相比测量精度提高

了 3 倍以上)。这一结果表明智能手机应用于更加严谨的大学物理实验中也是可行的。我们将会在未来的工作中, 对智能手机的光、电等传感器在大学物理相关实验中的精度进行进一步验证, 从而为大学物理实验的改进提供借鉴和参考。

参考文献

- [1] 杨涛, 任明放. 刚体转动惯量实验中时间测量的改进方法[J]. 大学物理, 2005, 24(4): 37-39.
- [2] 李立, 张皓晶, 张雄. 基于MATLAB编程的刚体转动惯量实验数据处理方法探讨[J]. 物理通报, 2019(6): 98-101.
- [3] 德国亚琛工业大学. Phyphox官网 (physical phone experiments)[EB/OL]. [2022-02-02]. <https://phyphox.org>.
- [4] 赵荣俊, 刘应开. 用智能手机加速度传感器分析弹簧振动现象[J]. 物理教师, 2017, 38(1): 54-58.
- [5] 陈晓丽, 普通物理实验 [M]. 重庆: 重庆西南师范大学出版社有限公司, 2011.
- [6] 漆安慎, 杜婵英, 普通物理学教程. 力学[M]. 3版. 北京: 高等教育出版社, 2012.12.
- [7] 赵梦婷, 石玖昌, 邓雅文, 等. 用智能手机提升学生对大学物理实验的兴趣[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(3): 165-170.
- [8] 李锡均, 程敏熙, 江敏丽. 数字传感器新载体——智能手机在物理实验中的应用综述[J]. 大学物理, 2018, 37(2): 53-59.
- [9] 苗红梅, 杨智敏. 利用智能手机居家测量声速和重力加速度[J]. 大学物理, 2021, 40(2): 27-32.
- [10] 惠宇洁. 智能手机在物理实验教学中的应用探讨[J]. 物理教学探讨, 2018, 36: 70-72.
- [11] 王盼伊, 顾思漪, 张璟, 等. 向心加速度公式的教具制作及其教学研究——基于Tracker和Phyphox软件的定量探究[J]. 物理通报, 2021(4): 108-112.