

基于非结构网格输运模型的核-热耦合程序的开发与验证

杨鸣睿 孙启政 罗池旭 何东豪 刘晓晶 张滕飞

(上海交通大学 核科学与工程学院 上海 200240)

摘要 反应堆内存在着中子物理、流动传热等多种物理场的紧密耦合和相互反馈。为了能准确地模拟反应堆内的真实情况,本研究针对先进复杂反应堆开发了非结构网格核-热耦合程序MORPHY。中子物理求解采用三角形变分节块法方法结合刚性限制法求解时空中子输运方程;热工水力求解基于一维的并联通道模型和圆柱导热模型。采用TWIGL基准题验证了中子动力学的准确性,堆芯相对功率与参考结果的偏差小于0.5%。与Dodds基准题结果对比,验证了程序对于非结构网格的描述能力。基于NEACRP压水堆基准题对程序的核热耦合计算能力进行验证,并分析对比了不同耦合方法、角度离散阶数对结果的影响。结果表明:MORPHY程序计算值与TWIGL、Dodds以及NEACRP基准题参考值吻合良好,能够用于堆芯稳态和瞬态核热耦合分析模拟。

关键词 中子动力学, 刚性限制法, 核热耦合计算, 瞬态, 输运程序

中图分类号 TL327

DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.030601

Development and verification of a neutronics-thermal hydraulics coupling code with unstructured meshes neutron transport model

YANG Mingrui SUN Qizheng LUO Chixu HE Donghao LIU Xiaojing ZHANG Tengfei

(School of Nuclear Science and Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract [Background] There is usually a strong coupling of neutronics-thermal hydraulics (N-TH) fields inside nuclear reactors. [Purpose] This study aims to accurately simulate the multi-physics fields in nuclear reactors by developing a three-dimensional N-TH coupling code MORPHY tailored to advanced complex reactors. [Methods] First of all, a three-dimensional triangular-z nodal variational nodal method (VNM) was employed for neutronics calculation, and the stiffness confinement method (SCM) was used to solve the neutron temporal-spatial equation; thermal hydraulic calculations were based on the one-dimensional multi-channel model and the one-dimensional cylindrical thermal conductivity model. Then, the accuracy of neutron dynamics was verified by TWIGL benchmark, Dodds benchmark, and the typical pressurized water reactor (PWR) benchmark NEACRP. Finally, the effects of different coupling methods and angle discrete orders on the results were analyzed and compared against reference solutions by PARCS. [Results] Verification results of TWIGL benchmark show that the deviation of relative power from the reference results is less than 0.5%. Compared with the results of Dodds benchmark, it verifies the MORPHY code's ability to describe unstructured meshes. The transient coupling calculation capability of MORPHY is verified by NEACRP benchmark. [Conclusions] Numerical solutions by MORPHY are in good agreement with reference results of the TWIGL, Dodds and NEACRP benchmark problems. It is concluded that MORPHY can adapt to the

国家自然科学基金(No.12175138)、中核集团"青年英才"科研项目资助

第一作者: 杨鸣睿, 男, 1996年出生, 2020年毕业于兰州大学, 现为硕士研究生, 研究领域为反应堆物理

通信作者: 张滕飞, E-mail: zhangtengfei@sjtu.edu.cn

收稿日期: 2022-08-19, 修回日期: 2022-11-23

Supported by National Natural Science Foundation of China (No.12175138), Young Talent Project of China National Nuclear Corporation

First author: YANG Mingrui, male, born in 1996, graduated from Lanzhou University in 2020, master student, focusing on reactor physics

Corresponding author: ZHANG Tengfei, E-mail: zhangtengfei@sjtu.edu.cn

Received date: 2022-08-19, revised date: 2022-11-23

transient N-TH coupling analysis of nuclear reactor cores.

Key words Neutron dynamics, Stiffness confinement method, Neutronics-thermal hydraulics coupling calculation, Transient, Transport code

反应堆中的物理现象通常同时涉及堆芯物理、热工水力等多个不同专业,多物理耦合模拟逐渐成为了核反应堆设计和研发的必不可少的技术手段。部分先进核反应堆(如实验反应堆、热管堆^[1-2]等)堆芯的结构复杂、材料布置紧凑,需要使用几何描述能力更强、角度处理更精确的非结构网格的运输方法。因此,上海交通大学开发了基于非结构网格的核-热耦合程序MORPHY,该程序空间上采用三角形变分节块法(Variational Nodal Method, VNM)^[3],角度上采用 S_N 离散求解中子输运方程,热工水力方面采用一维的并联通道模型和一维圆柱导热模型,通过算符分离半隐式法(Operator Splitting Semi-Implicit method, OSSI)^[4]以及定点隐式法(Fixed Point Implicit method, FPI)^[5]进行外耦合。VNM于20世纪由西北大学和阿贡国家实验室提出,用于求解多群稳态的中子输运和扩散方程,具有数值稳定、角度-空间展开灵活等优点,经过40余年的发展,方法不断被改进并且已经适用于不同几何的网格^[6]。同时为了应对核反应堆安全分析的需求,MORPHY还集成了基于刚性限制法(Stiffness Confinement

Method, SCM)的瞬态计算模块。SCM最早由美国西屋公司的赵荣安于20世纪80年代提出^[7],其主要思想是利用频率变换降低先驱核浓度方程中的刚性,将刚性问题淹没在特征值求解的问题中,确保在较大的步长下也能有良好的计算精度,达到节省计算资源的目的。SCM已经在求解点堆以及扩散方程中获得了广泛应用,本文将SCM扩展于三角形节块的VNM方法上,使用TWIGL、Dodds基准题验证了其可靠性。选取NEACRP压水堆弹棒问题对MORPHY的结果进行验证,分析不同耦合方法以及角度离散阶数对结果的影响。分析表明,MORPHY程序对基准题的计算结果与其他程序符合良好,可用于反应堆的瞬态核热耦合分析,为进一步新型实验堆的多物理瞬态模拟奠定了基础。

1 理论及模型

1.1 三角形节块的变分节块法

中子输运模型采用三角形节块的VNM^[3]。不考虑时间项,二阶偶宇称中子输运方程可表示为:

$$-\mathbf{\Omega} \cdot \nabla \Sigma_{t,g}^{-1}(\mathbf{r}) \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \Psi_g^+(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) + \Sigma_{t,g}(\mathbf{r}) \Psi_g^+(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) - \Sigma_{s,g \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{g' \neq g}^G \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}) + \sum_{g'=1}^G \frac{\chi_g}{4\pi k_{\text{eff}}} \nu \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') \phi_{g'}(\mathbf{r}) \quad (1)$$

式中:下标 g 表示能群编号; Ψ_g^+ 为偶宇称中子角通量, $\text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$; ϕ_g 为中子标通量, $\text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$; $\Sigma_{t,g}$ 为总截面, cm^{-1} ; $\Sigma_{s,g' \rightarrow g}$ 为 g' 群到 g 群的散射截面, cm^{-1} ; $\Sigma_{f,g}$ 为裂变截面, cm^{-1} ; χ_g 为裂变谱, cm^{-1} ; ν 代表平均每次裂变释放的中子数; k_{eff} 为有效增值因数; $\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}$ 分别代表位置与角度的分量。

根据变分原理,二阶偶宇称中子输运方程可以转化为泛函形式,因此求解中子输运方程等价于求出使得对应节块泛函取得极值的函数。在经过坐标转换、对角度直接使用 S_N 方法离散后,最终可以得到几何与材料共同决定的响应矩阵。各三角形节块之间通过中子流相互耦合,然后利用源迭代法对响应矩阵进行求解。

1.2 刚性限制法

考虑时间项,二阶偶宇称中子输运时空方程与缓发中子先驱核方程为:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial}{\partial t} \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \Sigma_{t,g}^{-1}(\mathbf{r}) \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \Psi_g^+(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) - \Sigma_{t,g}(\mathbf{r}) \Psi_g^+(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) + \Sigma_{s,g \rightarrow g}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \sum_{g' \neq g}^G \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + \sum_{g'=1}^G \frac{\chi_g(1-\beta)}{4\pi k_{\text{eff}}} \nu \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^I \chi_{i,g}(\mathbf{r}, t) \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \quad (2) \\ \frac{\partial}{\partial t} C_i(\mathbf{r}, t) &= \beta_i \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r}, t) - \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \\ i &= 1, 2, \dots, I \quad (3) \end{aligned}$$

其中: i 为缓发中子分组标识; I 为缓发中子先驱核分组数目; C_i 为第 i 组缓发先驱核浓度, cm^{-3} ; v_g 表示中子速度, $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$; β 为缓发中子总份额; β_i 为第 i 组缓发中子份额; $\chi_{i,g}$ 为第 i 组缓发先驱核中子谱。

MORPHY中使用刚性限制法对时间项进行处理。对于通量的时间导数项一般采取各向同性假

设^[8-9],定义中子通量的动态频率:

$$\omega_g(r,t) = \frac{\partial}{\partial t} \ln \phi_g(r,t) \quad (4)$$

$\omega_g(r,t)$ 是 g 群内的通量动态频率, s^{-1} 。通量动态频率可以被进一步分解为形状频率 $\omega_{s,g}(r,t)$ 和幅度频率 $\omega_i(t)$:

$$\omega_g(r,t) = \omega_{s,g}(r,t) + \omega_i(t) \quad (5)$$

形状频率 $\omega_{s,g}(r,t)$ 只与形状有关,表示通量的

$$-\mathbf{\Omega} \cdot \nabla \Sigma'_{t,g}(\mathbf{r}) \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \Psi_g^+(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) + \Sigma'_{t,g}(\mathbf{r}) \Psi_g^+(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) - \Sigma_{s,gg}(\mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g'-g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}) + \sum_{g'=1}^G \frac{\chi'_g}{4\pi k_D} \nu \Sigma_{t,g'}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') \phi_{g'}(\mathbf{r}) \quad (7)$$

式中: $\Sigma'_{t,g}$ 是动态总截面, cm^{-1} ; χ'_g 是动态裂变谱,通过动态频率得到:

$$\Sigma'_{t,g}(r,t) = \Sigma_{t,g}(r,t) + \frac{\omega_g(r,t)}{v_g} \quad (8)$$

$$\chi'_g = \chi_g(1 - \beta) + \sum_{i=1}^I \chi_{ig} \lambda_i \frac{\beta_i}{\mu_i + \lambda_i} \quad (9)$$

式中: v_g 表示 g 群中子速度, $cm \cdot s^{-1}$ 。可以通过不断调整幅度频率 $\omega_i(t)$ 的方式,来影响动态截面 $\Sigma'_{t,g}(r,t)$ 以及动态裂变谱 χ'_g ,最终使得动态本征值 k_D 等于1,使方程(7)成立,这一过程定义为 $k-\omega$ 迭代。在MORPHY中利用割线法来搜索幅度频率 $\omega_i(t)$ ^[10],其中: m 为 $k-\omega$ 迭代的迭代步数。

$$\omega_i^{(m+1)}(t_n) = \omega_i^{(m)}(t_n) + \left[\omega_i^{(m-1)}(t_n) - \omega_i^{(m)}(t_n) \right] \frac{1 - k_D^{(m)}}{k_D^{(m-1)} - k_D^{(m)}} \quad (10)$$

基于各向同性假设,某个节块 v 中的通量形状频率可以通过 t 以及 $t+\Delta t$ 时间步节块中的标通量来更新:

$$\bar{\omega}_{v,s,g}(t_n) = \frac{1}{\Delta t_n} \ln \left[\frac{\int_v d r v \Sigma_f \hat{\phi}_{v,g}(t_n)}{\int_v d r v \Sigma_f \hat{\phi}_{v,g}(t_{n-1})} \right] \quad (11)$$

式中: $\hat{\phi}_{v,g}$ 代表根据中子密度归一化的标通量大小; $\bar{\omega}_{v,s,g}(t_n)$ 是 $[t, t+\Delta t]$ 时间段内的平均形状频率。此时,实际的通量可以如式(12)表示:

$$\phi_{v,g}(r,t_n) = \hat{\phi}_{v,g}(r,t_n) e^{\frac{\omega_r(t_n) + \omega_r(t_{n-1})}{2} \Delta t_n} \quad (12)$$

假设缓发先驱核浓度在每个节块内是均匀的,那么缓发先驱核浓度 $C_{v,i}(t_n)$ 的解析解为:

$$C_{v,i}(t_n) = C_{v,i}(t_{n-1}) e^{-\lambda_i \Delta t_n} + \beta_i e^{-\lambda_i \Delta t_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} Q_v(t) e^{\lambda_i t} dt \quad (13)$$

式中: Q_v 则是节块内的裂变源, $cm^{-3} \cdot s^{-1}$ 。结合式(6),可以得到节块内先驱核动态频率 $\mu_{v,i}(t_n)$ 的表达式:

形状随着时间的变化,幅度频率 $\omega_i(t)$ 仅表示中子密度大小的变化情况,与形状无关。同样,可以利用第 i 组缓发先驱核浓度 $C_i(r,t)$ 定义第 i 组缓发先驱核的动态频率 $\mu_i(r,t)$:

$$\mu_i(r,t) = \frac{\partial}{\partial t} \ln C_i(r,t) \quad (6)$$

结合式(2)~(6),并引入动态本征值 k_D 。可以使问题变为一个特征值求解问题:

$$\mu_{v,i}(t_n) = \begin{cases} \beta_i \frac{Q_v(t_n)}{C_{v,i}(t_n)} - \lambda_i & C_{v,i}(t_n) \neq 0 \\ 0 & C_{v,i}(t_n) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

这样通量动态频率以及先驱核动态频率便都得到更新。MORPHY中瞬态计算的整体流程如图1所示。

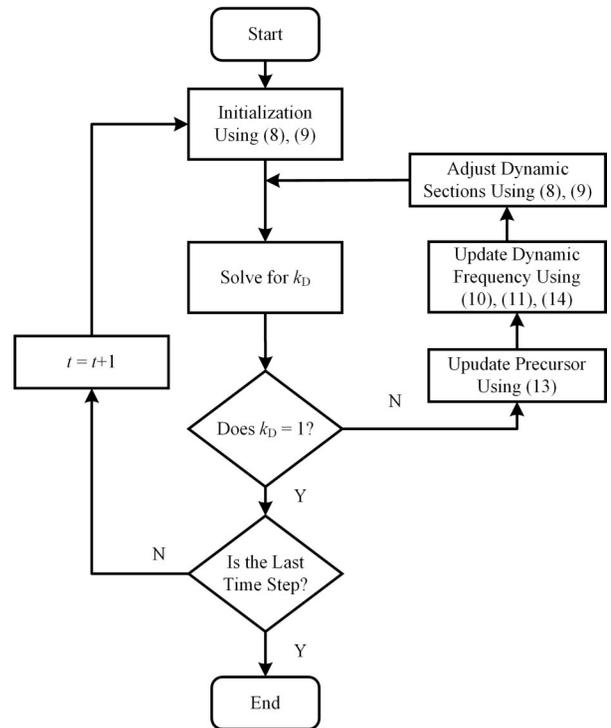


图1 MORPHY中SCM的计算流程图
Fig.1 Flowchart of the transient calculations with SCM in MORPHY

每个时间步中的计算主要由 $k-\omega$ 迭代实现,其中 $k-\omega$ 迭代的具体流程如下:

- 1)根据式(13)计算缓发先驱核浓度。
- 2)根据式(10)、(11)以及(14)计算动态频率。
- 3)通过动态频率计算动态总截面(8)以及动态裂变谱(9),若该迭代步为当前时间步的第一个迭代步,则使用上一时间步的动态频率和动态总截面为

初值。

4)调用三角形VNM求解器,求解动态本征值 k_D 。若 k_D-1 小于设定的收敛限,进行下一时间步计算,否则继续回到1)步。

1.3 热工水力模型

MORPHY中对于慢化剂温度分布、通道压降的计算采用并联通道模型,将每个组件等效为一个典型通道,如图2所示。其中典型通道中冷却剂的质量流量为组件内的平均流量,功率为组件棒束的平均功率,保证等效前后的当量直径,燃料棒几何参数等其余热工参数不变。利用各个冷却剂通道进出口分别处于同一等压面,各个通道压降相同的原理来分配流量。

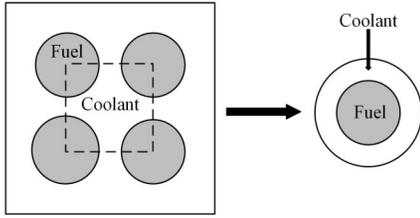


图2 通道等效示意图
Fig.2 Channel equivalent diagram

不考虑通道之间的交混,建立一维热工水力方程组^[11]。

连续性方程:

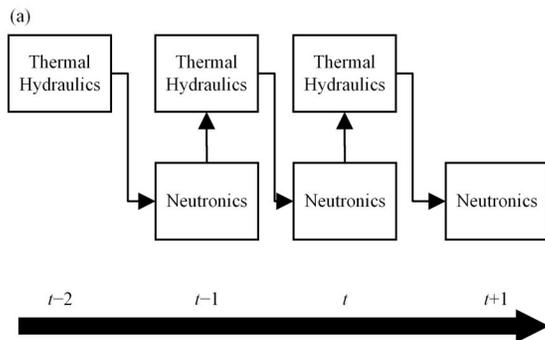
$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_c) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_c u) = 0 \quad (15)$$

能量守恒方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_c h) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_c u h) = Q_c \quad (16)$$

动量守恒方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_c u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_c u^2) + \frac{\partial P_{\text{fric}}}{\partial z} + g\rho_c + \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (17)$$



式中: ρ_c 为冷却剂密度, $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; h 代表冷却剂焓值, $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$; u 代表冷却剂流速, $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; Q_c 代表燃料传递冷却剂以及裂变直接释放到冷却剂的热量, W ; P_{fric} 、 P 表示摩擦压降及总压降, Pa ; g 表示重力加速度, $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ 。轴向上网格使用细网差分,时间离散采用无条件稳定的向后欧拉格式。

对于燃料棒的热传导,忽略轴向上的导热,一维圆柱导热方程有^[12]:

$$\rho_f c_f \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{Q_f}{\lambda} = 0 \quad (18)$$

式中: ρ_f 为燃料密度, $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; c_f 代表燃料比热容, $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$; T 代表燃料温度, K ; Q_f 代表燃料的体积释热率, $\text{W}\cdot\text{m}^{-3}$; λ 代表燃料导热系数, $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$; r 代表径向位置, m 。

根据实际情况,径向上分为燃料区、气隙区以及包壳区,使用有限差分方法,时间离散采用Crank-Nicholson格式^[13]。确定边界条件,离散后可得到如下三对角矩阵:

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{T}_1^{t+\Delta t} \\ \bar{T}_2^{t+\Delta t} \\ \bar{T}_3^{t+\Delta t} \\ \vdots \\ \bar{T}_{n-2}^{t+\Delta t} \\ \bar{T}_{n-1}^{t+\Delta t} \\ \bar{T}_n^{t+\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{n-2} \\ q_{n-1} \\ q_n \end{pmatrix} \quad (19)$$

式中: a_n 、 b_n 、 c_n 、 q_n 表示和材料、几何以及上一时间步温度分布有关的系数。求解线性方程组(19)便可得到当前燃料的温度分布。

1.4 耦合方法

算符分离半隐式法(Operator Separation Semi Implicit, OSSSI)与定点隐式方法(Fixed-Point Implicit, FPI)是主流的耦合方法。

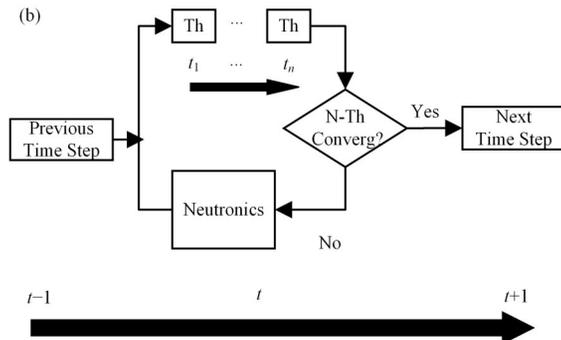


图3 MORPHY中的耦合方法 (a) OSSSI方法,(b) FPI方法
Fig.3 The coupling method in MORPHY (a) OSSSI method, (b) FPI method

如图3所示, OSSI方法是先进行一个物理场的计算, 将其输出作为另一个物理场的输入, 之后不进行迭代直接进入下一时间步。OSSI法不考虑物理场之间的迭代, 有物理场使用的上一时间步的输出作为边界条件, 所以变化往往会比真实情况更滞后, 需要更小的时间步长。FPI法在OSSI的方法上增加了收敛判断和循环迭代, 每个时间步均需对比前后迭代步的计算结果, 相对误差小于设定的收敛限后才进行下一时间步的计算。

在MORPHY中, 并联通道模型相对简化计算耗时短, 所以为了提高计算精度, 在使用FPI方法耦合时对热工水力模块使用更小的时间步。假设把中子学时间步 Δt_n 划分为 m 个热工水力时间步 Δt_{th} , 认为在 $t \sim t + \Delta t_n$ 内功率指数增长, t 时刻功率为 P^t , $t + \Delta t_n$ 时刻功率为 $P^{t + \Delta t_n}$, 则有第 n 个热工时间步时的功率 $P^{t + n\Delta t_{th}}$:

$$P^{t + n\Delta t_{th}} = \left(\frac{P^{t + \Delta t_n}}{P^t} \right)^n \quad (20)$$

在进行子时间步的热工水力计算时, 子时间步 $t + n\Delta t_{th}$ 的初始条件由 $t + (n-1)\Delta t_{th}$ 的计算结果所提供。

2 结果和讨论

为了验证三维中子动力学模块的计算精度, 该章节首先展示了MORPHY程序在二维TWIGL基准题以及二维R-Z坐标的Dodds基准题的结果。此后, 验证了三维压水堆基准题NEACRP, 以检验MORPHY对于瞬态核热耦合问题的计算能力, 并对比了不同角度离散阶数以及耦合方式对结果的影响。

2.1 二维TWIGL基准题

选择二维TWIGL基准题验证MORPHY的中子动力学模块, 该基准题采用单组缓发中子动力学参数。如图4所示, 堆芯呈现三个燃料区组成的 $160 \text{ cm} \times 160 \text{ cm}$ 的正方形几何^[14]。该问题有A1、A2

两个缓发超临界问题, 通过改变材料1的吸收截面分别模拟了线性和阶跃的反应性引入过程。原问题外边界为零通量边界条件, 由于MORPHY程序无法处理该类边界条件, 计算时改为真空边界条件。计算区域为1/4堆芯, 共划分400个三角形网格, 轴向1层, 上下使用反射边界条件模拟二维情况, 瞬态过程计算到0.5 s, 角度离散阶数为 S_2 。

使用时间直接离散的扩散程序SPANDEX^[14]与使用预估校正准静态策略的输运程序DAISY^[15]作为参考解。其中SPANDEX时间步长为0.1 ms, DAISY瞬态过程共进行7次形状函数更新, 反应性步长为2.5 ms。

计算结果如图5所示, MORPHY与参考解吻合。由于扩散程序使用了零通量边界条件, 而输运程序采取了真空边界条件, 这导致输运程序计算得到的通量会整体偏高, 故瞬态结果也有一定偏差, 达到稳态后的功率相对偏高。从表1、2可以看出, 对于A1问题, MORPHY在步长为5 ms时与DAISY的最大相对误差为-0.38%; A2问题中, 在步长为5 ms时与DAISY的最大相对误差为0.05%。同时, 可以发现在这两个问题中MORPHY使用5 ms与20 ms的计算结果具有很高的一致性, 最大误差不超过0.1%, 表明了SCM在较大的时间步长下仍有很高的计算精度。

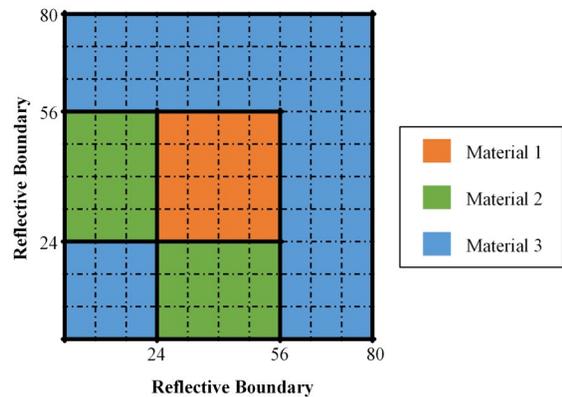


图4 TWIGL基准题几何布置
Fig.4 Layout of the TWIGL benchmark problem

表1 TWIGLA1相对功率比较
Table 1 Comparison of core relative powers for the TWIGL A1 problem

| 时间 Time / s | DAISY | MORPHY $\Delta t=5 \text{ ms}$ | MORPHY $\Delta t=20 \text{ ms}$ | 误差 Error / % | |
|----------------|-------|-----------------------------------|------------------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| | | | | vs. $\Delta t=5 \text{ ms}$ | vs. $\Delta t=20 \text{ ms}$ |
| 0.0 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 0.00 | 0.00 |
| 0.1 | 1.318 | 1.313 | 1.313 | -0.38 | -0.38 |
| 0.2 | 1.985 | 1.982 | 1.982 | -0.15 | -0.15 |
| 0.3 | 2.103 | 2.103 | 2.103 | 0.00 | 0.00 |
| 0.4 | 2.121 | 2.121 | 2.120 | 0.00 | -0.05 |
| 0.5 | 2.139 | 2.140 | 2.139 | 0.05 | 0.00 |

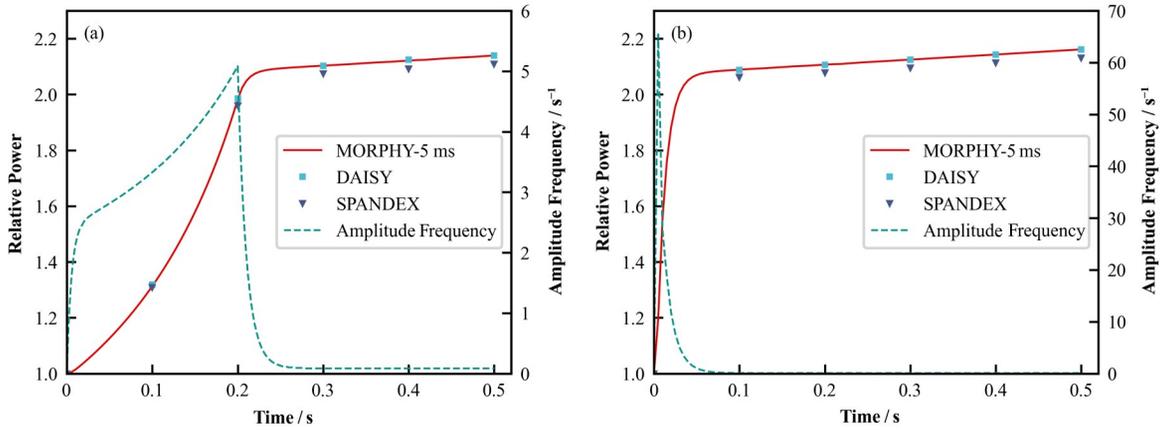


图5 TWIGL A1 (a)和A2 (b)计算结果
Fig.5 Results of the TWIGL A1 (a), A2 (b) problem

2.2 二维 R-Z 坐标 Dodds 基准题

为了验证 MORPHY 对于非结构网格的描述能力,选择二维 R-Z 坐标的 Dodds 基准题验证^[16]。该

问题为圆柱几何,半径 $r=240$ cm,高 $h=525$ cm,共划分 16 个区域,四周及上下底面为真空边界条件,如图 6(a)所示。该基准题为两群问题,包含 6 组缓发先驱核,其中区域 3、7 和 11 的热群吸收截面在 0~1 s 间线性变化引起瞬态扰动。

表2 TWIGL A2 相对功率比较
Table 2 Comparison of core relative powers for the TWIGL A2 problem

| 时间 Time / s | DAISY | MORPHY $\Delta t=5$ ms | MORPHY $\Delta t=20$ ms | 误差 Error / % | |
|-------------------|-------|---------------------------|----------------------------|---------------------|----------------------|
| | | | | vs. $\Delta t=5$ ms | vs. $\Delta t=20$ ms |
| 0.0 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 0.00 | 0.00 |
| 0.1 | 2.088 | 2.089 | 2.087 | 0.05 | -0.05 |
| 0.2 | 2.106 | 2.107 | 2.106 | 0.05 | 0.00 |
| 0.3 | 2.124 | 2.125 | 2.123 | 0.05 | -0.05 |
| 0.4 | 2.143 | 2.143 | 2.141 | 0.00 | -0.09 |
| 0.5 | 2.161 | 2.161 | 2.160 | 0.00 | -0.05 |

MORPHY 在径向方向使用非结构网格逼近圆形,计算区域为 1/4 堆芯,如图 6(b)所示。轴向上划分 14 层,每层高度均为 37.5 cm。MORPHY 使用 0.1 s 时间步长,角度离散阶数为 S_2 。

计算结果如图 7 所示,使用 ANL 基准题报告中的扩散程序以及输运程序 TORT-TD^[17]作为参考解。从图 7 可以看到,三个程序的计算结果趋势一致,不过输运程序得到的结果均比扩散程序偏大,主要是由于输运程序都使用了真空边界条件,而扩散程序使用了零通量边界条件。

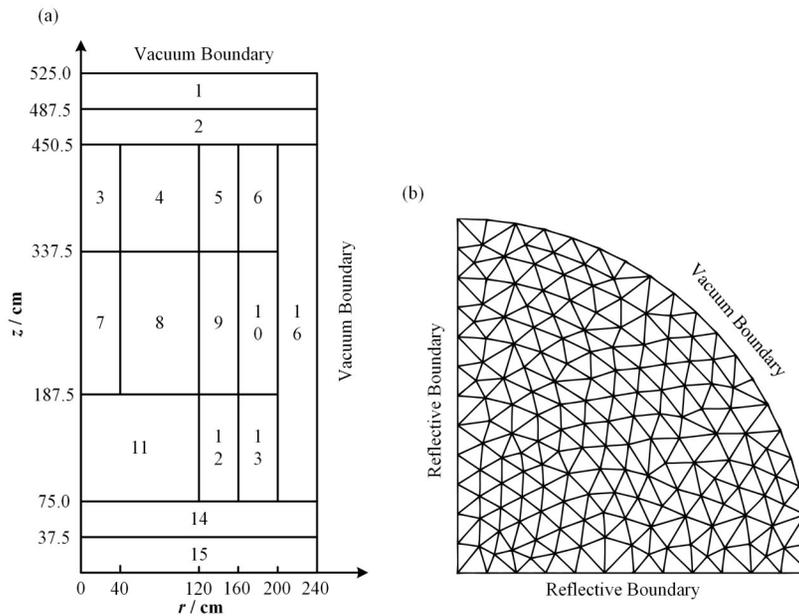


图6 Dodds 基准题几何设置 (a) 材料布置,(b) 径向网格划分
Fig.6 Layout of the Dodds problem (a) Material layout, (b) Radial mesh generation

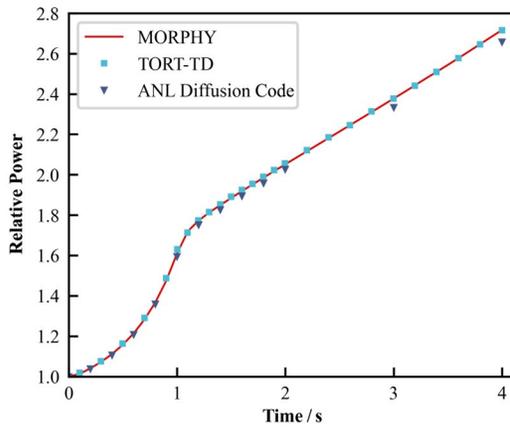


图7 Dodds基准题相对功率随时间变化

Fig.7 Dodds benchmark problem relative power vs. time

2.3 三维 NEACRP 基准题

瞬态核热耦合功能验证例题采用典型压水堆基准问题 NEACRP-L-335^[18]。该问题有 157 个燃料组件, 组件边长 21.606 cm, 堆芯活性区高 367.3 cm。控制棒长 363.195 cm, 完全插入时距离下反射层底部 37.7 cm, 全部弹出时距下反射层底部 401.183 cm, 图 8 所示为该基准题的 1/4 堆芯几何布置。共 6 组缓发中子, 总的缓发中子份额为 0.007 6。该问题共有两类 6 种情况 (A1、A2、B1、B2、C1、C2), 本文选取 A1、A2、B1、B2 计算。其中, A1、B1 为热态零功率 (Hot Zero Power, HZP, 2 775 W) 下的弹棒问题; A2、B2 为热态满功率 (Hot Full Power, HFP, 2 775 MW) 下的弹棒问题。此外, 这 4 个工况初始棒位及弹出棒的位置也不相同, A1、A2 为中心控制棒弹出, B1、B2 是外围 4 根控制棒弹出。瞬态过程均持续 5 s, 其中在 0~0.1 s 间控制棒弹出。

MORPHY 计算区域为 1/4 堆芯, 径向上共划分 790 个三角形网格。轴向上划分 18 层, 从下到上分

别为 30 cm、7.7 cm、11 cm、15 cm、30 cm (10 层)、12.8 cm (2 层)、8 cm、30 cm, 与参考程序 PARCS 相同^[19]。

该小节首先对基准题的稳态结果进行了对比, 之后分析对比了使用不同耦合方式及时间步长对结果的影响, 最后采用不同离散阶数与 PARCS 的结果进行对比, 并分析了出现偏差的原因。其中, 括号内的 S_N 表示程序使用的角度离散阶数; Δt_N 表示中子学模块的瞬态计算时间步长; Δt_{th} 表示热工水力模块的瞬态计算时间步长。

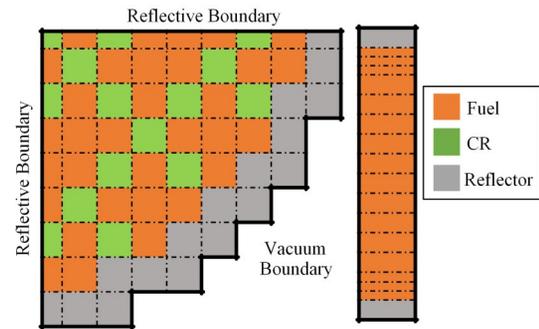


图8 NEACRP基准题几何布置

Fig.8 Layout of the NEACRP benchmark problem

MORPHY (S_2) 计算并对比了 4 个工况的临界硼浓度以及控制棒价值^[20-21], 结果列于表 3。结果与扩散程序 PANTHER、PARCS 以及输运程序 DAISY 的结果吻合较好。其中 A1、B1 问题临界硼浓度与 PARCS 偏差较大, 分别为 5.36×10^{-6} 与 5.30×10^{-6} 。控制棒价值的相对误差最大为 B2 问题, 为 4.68%。由于各个程序所使用的中子学模型、热工水力模型以及计算条件的设置均有所差别, 最终计算结果受到多种因素共同影响, 会产生一定偏差, 通过对比认为 MORPHY 的结果处于一个合理区间。

表3 NEACRP 基准题稳态结果比较

Table 3 Comparison of steady-state results for NEACRP problems

| 程序 Code | 临界硼浓度 Critical boron concentration / 10^{-6} | | | | 控制棒价值 Control rod value / 10^{-5} | | | |
|---------------------|--|----------|----------|----------|-------------------------------------|-------|--------|-------|
| | A1 | A2 | B1 | B2 | A1 | A2 | B1 | B2 |
| PARCS(Reference) | 561.26 | 1 158.85 | 1 248.21 | 1 185.55 | 827.70 | 89.30 | 829.70 | 98.40 |
| PANTHER(1993) | 567.70 | 1 160.60 | 1 254.60 | 1 189.40 | 821.80 | 89.50 | 831.30 | 99.10 |
| PANTHER(1997) | 561.20 | 1 156.63 | 1 247.98 | 1 183.83 | 821.80 | 89.50 | 831.00 | 99.10 |
| DAISY | 563.28 | 1 157.06 | 1 247.12 | 1 185.52 | 820.99 | 90.88 | 826.19 | 93.25 |
| MORPHY(S_2) | 566.62 | 1 159.23 | 1 253.51 | 1 187.72 | 819.74 | 88.39 | 828.25 | 93.79 |
| 绝对误差 Absolute error | 5.36 | 0.38 | 5.30 | 2.17 | 7.96 | 0.91 | 1.45 | 4.61 |

为了比较不同耦合方式以及时间步长对计算结果的影响, MORPHY (S_2) 分别采用 FPI 方法和 OSSI 方法计算了 A1、A2 问题, 并对比了其峰值功率。

OSSI 方法结果如表 4 所示, 对于 A1 问题,

2.5 ms、5 ms、10 ms 三个时间步长对应的峰值功率分别为 149.82%、155.99% 以及 169.99%。A1 问题的峰值功率整体呈现出随时间步长减小收敛的趋势, 但对于时间步长的改变相比 A2 问题更为敏感。这

是由于A1问题弹出的控制棒价值为 819.74×10^{-5} ,超出了缓发中子份额0.0076,是一个瞬发超临界问题,整个瞬态过程变化剧烈,在0.5s左右上升了6个数量级。而OSSI方法中每个时间步不进行迭代,中子学计算时使用的热工水力反馈是上一时间步的结果,比真实情况滞后,在计算功率随时间变化剧烈的问题时,这种滞后会显著地影响结果。对于A2问题,2.5ms、5ms、10ms三个时间步长对应的峰值功率分别为108.19%、108.20%以及108.23%,结果差异不明显。

使用FPI方法计算A1问题的结果如表5所示,以 $\Delta t_N=10\text{ms}$, $\Delta t_{th}=1\text{ms}$ 的结果为参考。在 $\Delta t_N=20\text{ms}$ 时, $\Delta t_{th}=1\text{ms}$ 时的相对功率偏差为-0.64%, $\Delta t_{th}=20\text{ms}$ 时的相对功率偏差为-6.19%。在 $\Delta t_N=50\text{ms}$ 时, $\Delta t_{th}=1\text{ms}$ 时的相对功率偏差为-12.72%, $\Delta t_{th}=50\text{ms}$ 时的相对功率偏差为-21.75%。可以看出,对于中子学过程剧烈的A1问题,由于其受热工水力参数反馈得到的截面的影响更敏感,故在使用相对大的中子学步长时,划分更细的热工水力时间步能提升结果的准确性。

对比表4、5两种耦合方法的结果可以发现,计

算A1这种变化剧烈的问题时使用OSSI方法耦合,时间步长从10ms到2.5ms相对功率偏差为20.17%,且结果仍未收敛。而使用FPI方法耦合结合划分较细的热工水力步长,随着时间步长减小,当中子学步长为20ms时结果就已经收敛,与中子学步长为10ms时的峰值功率仅偏差-0.64%。

使用FPI方法,角度离散为 S_2 ,分别使用并联通道模型以及单通道模型(通过关闭并联通道模型的流量分配功能实现)计算A1问题,得到峰值功率为141.74%和141.78%,差别很小。因此,可以认为针对NEACRP问题,热工计算的流量分配模型对于结果的影响可以忽略不计。

MORPHY计算了不同角度离散阶数下的情况,并与PARCS以及DAISY^[21]对比。采用FPI方法,在0~1s内时间步长为10ms,在1~5s内时间步长为100ms,模拟对比结果如图9所示。由图9可以看出,MORPHY针对4个弹棒问题的模拟结果呈现出与参考解相同的变化趋势,即事故发生后功率上升造成慢化剂以及燃料温度上升,而随之而来的负反馈效应导致功率增长减缓直至下降,最终逐渐趋向稳定。

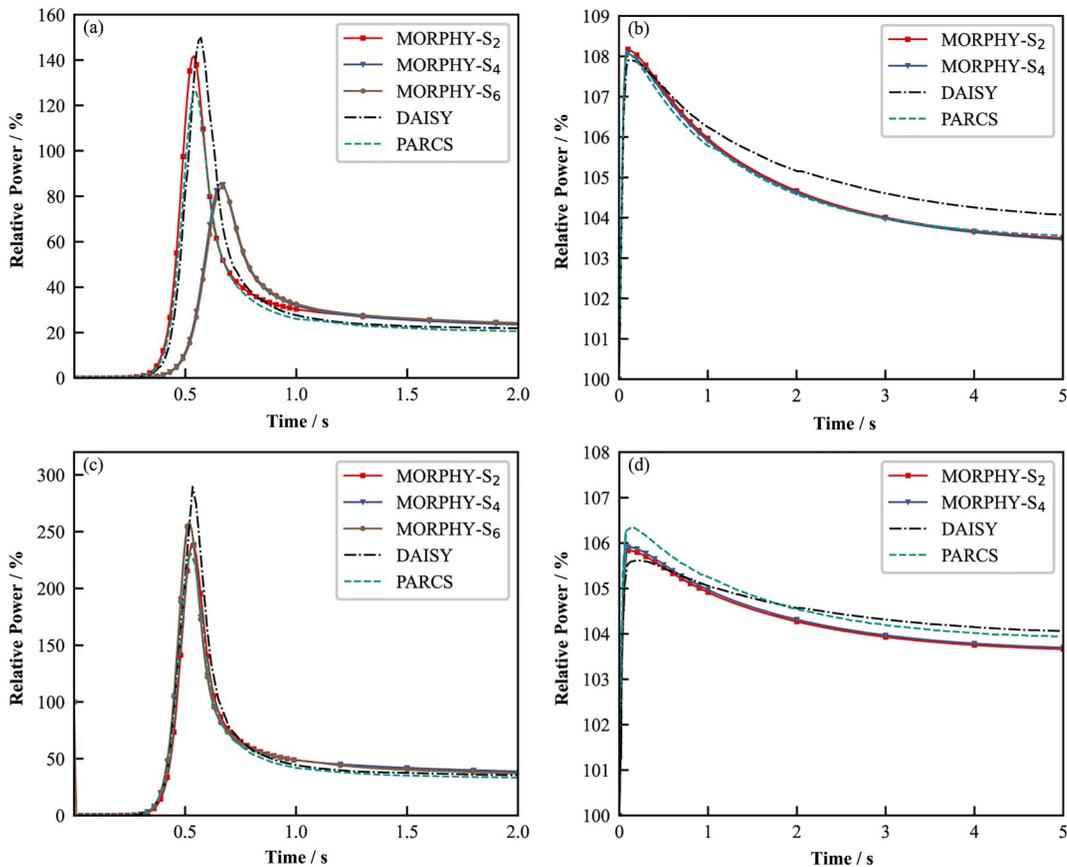


图9 NEACRP基准题相对功率随时间变化 (a) NEACRP A1,(b) NEACRP A2,(c) NEACRP B1,(d) NEACRP B2
 Fig.9 NEACRP benchmark problem relative power vs. time (a) NEACRP A1, (b) NEACRP A2, (c) NEACRP B1, (d) NEACRP B2

表4 OSSl耦合方法不同时间步长下的峰值功率
Table 4 Peak power at different time-step sizes for OSSl method

| 工况 Case | 时间步长 Time-step sizes / ms | 峰值功率 Power peak / % |
|------------|------------------------------|------------------------|
| A1 | 2.5 | 149.82 |
| A1 | 5 | 155.99 |
| A1 | 10 | 169.99 |
| A2 | 2.5 | 108.19 |
| A2 | 5 | 108.20 |
| A2 | 10 | 108.23 |

表5 A1工况下使用FPI方法不同热工水力步长的峰值功率
Table 5 Peak power of different thermal-hydraulic time-step sizes using FPI method in case A1

| $\Delta t_N / \text{ms}$ | $\Delta t_{\text{th}} / \text{ms}$ | 峰值功率 Power peak / % | 绝对误差 Absolute error |
|--------------------------|------------------------------------|------------------------|------------------------|
| 10 | 1 | 141.74 | — |
| 20 | 1 | 140.10 | -0.64 |
| 20 | 20 | 135.55 | -6.19 |
| 50 | 1 | 129.02 | -12.72 |
| 50 | 50 | 119.99 | -21.75 |

从图9可以发现,A1、B1问题的峰值功率随着角度离散阶数改变变化较大。其中A1问题使用 S_2 、 S_4 、 S_6 阶离散时的峰值功率分别为141.74%、85.71%、84.11%,B2问题则分别是239.17%、257.07%、258.57%,而PARCS计算A1、B1问题的峰值功率分别为126.19%与231.34%,存在一定的偏差。由图10中可以得到,在峰值功率时A1、B1问题控制棒抽出区域的功率都远高于相邻区域,这带来了强烈的角度各向异性,所以当角度离散阶数由 S_2 升高至 S_4 时,计算结果会有明显的变化。随着角度离散阶数进一步提升至 S_6 ,结果趋于收敛。同样,图10也表

明A1问题的通量分布不均匀性要明显强于B1问题,这也是A1峰值功率受角度离散阶数影响更大的原因。对于角度各向异性较弱的A2、B2问题,MORPHY使用不同角度离散阶数得到的结果相近,并且相对功率随时间变化趋势与PARCS一致。B2问题MORPHY与DAYSY的结果峰值功率都低于PARCS,这与表3中所示的MORPHY与DAISY相比于PARCS存在控制棒价值的低估这一现象相符合。

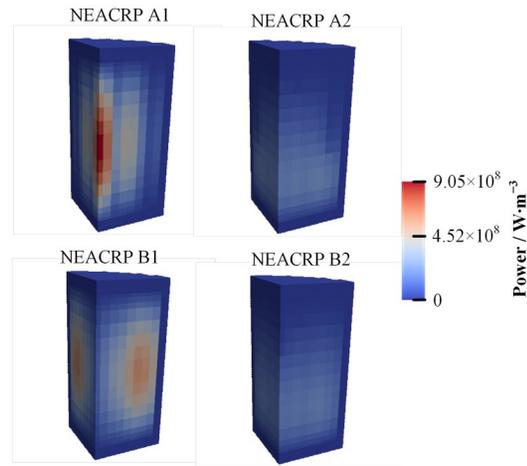


图10 NEACRP基准题功率峰值时功率分布
Fig.10 NEACRP benchmark power distribution at peak power

PARCS提供了A1、A2工况结果较为详细的参数,且扩散程序与低阶输运对角度的处理相比高阶输运更相近,故表6对比了PARCS与MORPHY(S_2)关于A1、A2的瞬态计算结果。其中 P_{Max} 、 t_{Max} 、 P_5 、 T_M 、 T_C 分别代表了峰值功率、峰值功率时间、5 s时功率、5 s时平均冷却剂出口温度以及5 s时燃料最高温度。其中MORPHY(S_2)计算A1结果的峰值功率与PARCS相差较大,高于PARCS满功率15.55%。

表6 MORPHY A1和A2结果与PARCS对比
Table 6 Comparison of MORPHY A1 and A2 results with PARCS

| 程序 Code | A1 | | | | | A2 | | | | |
|---------------------|-----------------------|-----------------------|------------|------------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|------------|------------------------|------------------------|
| | $P_{\text{Max}} / \%$ | $t_{\text{Max}} / \%$ | $P_5 / \%$ | $T_M / ^\circ\text{C}$ | $T_C / ^\circ\text{C}$ | $P_{\text{Max}} / \%$ | $t_{\text{Max}} / \%$ | $P_5 / \%$ | $T_M / ^\circ\text{C}$ | $T_C / ^\circ\text{C}$ |
| PARCS | 126.19 | 0.54 | 19.90 | 293.38 | 686.77 | 108.14 | 0.09 | 103.55 | 325.03 | 1 703.36 |
| MORPHY(S_2) | 141.74 | 0.54 | 21.93 | 293.45 | 716.35 | 108.17 | 0.10 | 103.54 | 325.85 | 1 716.80 |
| 绝对误差 Absolute error | 15.55 | 0 | 2.03 | 0.07 | 29.91 | 0.03 | 0.01 | 0.01 | 0.82 | 13.44 |

正如前文分析所述,这是由于A1问题强烈的瞬态效应和非均匀性所导致的,同时由于整体功率曲线更高,5 s时燃料最高温度MORPHY(S_2)也比PARCS高29.91 K。值得指出的是,其他研究者对A1计算结果的峰值功率与峰值时间也存在较大的差异^[22]。对于A2问题,MORPHY(S_2)与PARCS各项参数符合得很好,峰值功率偏差为0.03%,峰值时

间偏差0.01 s,5 s时相对功率偏差为0.01%,平均冷却剂出口温度以及燃料中心最高温度偏差分别为0.82 °C和13.44 °C。

3 结语

为了满足对先进复杂反应堆进行安全分析的需

求,在几何描述能力强、角度处理精确的三角形VNM输运求解器的基础上结合SCM和并联通道模型,开发了基于非结构网格运输模型的核-热耦合程序MORPHY。

利用TWIGL基准题对中子学模块开展了验证,在使用20 ms时间步长计算TWIGL基准题A1,A2问题与参考解的最大误差分别为-0.38%和-0.09%。与采用5 ms时间步长计算得到的相对功率在两个问题中最大偏差不超过0.1%,证明了SCM在大步长下的可靠性。选取了二维R-Z圆柱坐标下Dodds基准题,作为MORPHY描述非结构网格输运计算精度的说明。基于NEACRP基准题对MORPHY的核热耦合计算能力进行了验证。结果表明:在计算瞬态效应剧烈的问题时,如NEACRP A1问题,使用OSSI方法耦合会带来滞后效应,需要使用较小的时间步长。使用FPI耦合方法结合划分更小的热工水力时间步长,结果在大的中子学步长下仍能够保持计算稳定。对于NEACRP问题,热工计算的流量分配模型对于结果的影响可以忽略不计。MORPHY计算NEACRP基准题各项参数整体与PARCS符合良好,但在计算A1、B1问题时峰值功率有较大偏差。这是由于A1、B1问题剧烈的瞬态效应以及非均匀性十分强烈,对角度处理的差异非常敏感。

以上结果表明,MORPHY具有了对堆芯进行瞬态核-热耦合计算能力,未来将MORPHY应用到新型复杂反应堆的堆芯模拟及安全分析的相关研究。

作者贡献声明 杨鸣睿:进行程序开发、验证、数据分析及文章撰写;孙启政:进行程序开发、验证、数据分析;罗池旭:进行程序开发、验证、数据分析;何东豪:提供研究思路,理论指导;刘晓晶:提出研究思路、研究资金获取;张腾飞:提出研究思路、理论指导、研究资金获取,文章审阅及修订。

参考文献

- Zhang H, Zhuang J. Research, development and industrial application of heat pipe technology in China[J]. Applied Thermal Engineering, 2003, **23**(9): 1067 - 1083. DOI: [10.1016/S1359-4311\(03\)00037-1](https://doi.org/10.1016/S1359-4311(03)00037-1).
- Snoj L, Trkov A, Jaćimović R, et al. Analysis of neutron flux distribution for the validation of computational methods for the optimization of research reactor utilization[J]. Applied Radiation and Isotopes, 2011, **69**(1): 136 - 141. DOI: [10.1016/j.apradiso.2010.08.019](https://doi.org/10.1016/j.apradiso.2010.08.019).
- Zhang T F, Xiao W, Yin H, et al. VITAS: a multi-purpose simulation code for the solution of neutron transport problems based on variational nodal methods[J]. Annals of Nuclear Energy, 2022, **178**: 109335. DOI: [10.1016/j.anucene.2022.109335](https://doi.org/10.1016/j.anucene.2022.109335).
- Yang D M, Liu X J, Zhang T F, et al. A comparison of three algorithms applied in thermal-hydraulics and neutronics codes coupling for lbe-cooled fast reactor[J]. Annals of Nuclear Energy, 2020, **149**: 107789. DOI: [10.1016/j.anucene.2020.107789](https://doi.org/10.1016/j.anucene.2020.107789).
- Wang J C, Wang Q, Ding M. Review on neutronic/thermal-hydraulic coupling simulation methods for nuclear reactor analysis[J]. Annals of Nuclear Energy, 2020, **137**: 107165. DOI: [10.1016/j.anucene.2019.107165](https://doi.org/10.1016/j.anucene.2019.107165).
- Zhang T F, Li Z P. Variational nodal methods for neutron transport: 40 years in review[J]. Nuclear Engineering and Technology, 2022, **54**(9): 3181 - 3204. DOI: [10.1016/j.net.2022.04.0121738-5733](https://doi.org/10.1016/j.net.2022.04.0121738-5733).
- Chao Y A, Attard A. Resolution of the stiffness problem of reactor kinetics[J]. Nuclear Science and Engineering, 1985, **90**(1): 40 - 46.
- Shen Q, Wang Y, Jabaay D, et al. Transient analysis of C5G7-TD benchmark with MPACT[J]. Annals of Nuclear Energy, 2019, **125**: 107 - 120. DOI: [10.1016/j.anucene.2018.10.049](https://doi.org/10.1016/j.anucene.2018.10.049).
- Wang B, Liu Z, Chen J, et al. A modified predictor-corrector quasi-static method in NECP-X for reactor transient analysis based on the 2D/1D transport method [J]. Progress in Nuclear Energy, 2018, **108**: 122 - 135. DOI: [10.1016/j.pnucene.2018.05.014](https://doi.org/10.1016/j.pnucene.2018.05.014).
- Xiao W, Sun Q Z, Liu X J, et al. Application of stiffness confinement method within variational nodal method for solving time-dependent neutron transport equation[J]. Computer Physics Communications, 2022, **279**: 108450. DOI: [10.1016/j.cpc.2022.108450](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2022.108450).
- Křepel J, Rohde U, Grundmann U, et al. DYN3D-MSR spatial dynamics code for molten salt reactors[J]. Annals of Nuclear Energy, 2007, **34**(6): 449 - 462. DOI: [10.1016/j.anucene.2006.12.011](https://doi.org/10.1016/j.anucene.2006.12.011).
- Ghiaasiaan S M, Wassel A T, Farr J L jr, et al. Heat conduction in nuclear fuel rods[J]. Nuclear Engineering and Design, 1985, **85**(1): 89 - 96. DOI: [10.1016/0029-5493\(85\)90275-4](https://doi.org/10.1016/0029-5493(85)90275-4).
- 牛钰航, 贺亚男, 巫英伟, 等. 基于MOOSE平台的高阶全隐式核反应堆一回路系统分析[J]. 核动力工程, 2021, **42**(6): 50 - 57. DOI: [10.13832/j.jnpe.2021.06.0050](https://doi.org/10.13832/j.jnpe.2021.06.0050).
- NIU Yuhang, HE Yanan, WU Yingwei, et al. Analysis of primary loop system of high-order fully-implicit nuclear reactor based on MOOSE platform[J]. Nuclear Power

- Engineering, 2021, 42(6): 50 - 57. DOI: [10.13832/j.jnpe.2021.06.0050](https://doi.org/10.13832/j.jnpe.2021.06.0050).
- 14 Ban Y, Endo T, Yamamoto A. A unified approach for numerical calculation of space-dependent kinetic equation [J]. Journal of Nuclear Science and Technology, 2012, 49(5): 496 - 515. DOI: [10.1080/00223131.2012.677126](https://doi.org/10.1080/00223131.2012.677126).
- 15 He M T, Wu H C, Cao L Z, *et al.* Time-dependent, three dimensional nodal transport code development based on unstructured mesh[C]. Proceedings of 2014 22nd International Conference on Nuclear Engineering, Prague, Czech Republic, 2014. DOI: [10.1115/ICONE22-31018](https://doi.org/10.1115/ICONE22-31018).
- 16 Argonne Code Center: benchmark problem book[J]. Specific Nuclear Reactors & Associated Plants, 1977. DOI: [10.2172/5037820](https://doi.org/10.2172/5037820).
- 17 Seubert A, Sureda A, Bader J, *et al.* The 3-D time-dependent transport code TORT-TD and its coupling with the 3D thermal-hydraulic code ATTICA3D for HTGR applications[J]. Nuclear Engineering & Design, 2012, 251: 173-180. DOI: [10.1016/j.nucengdes.2011.09.067](https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2011.09.067).
- 18 Finnemann H, Galati A. NEACRP 3-D LWR core transient benchmark, final specification [R]. NEACRP-L-335, 1991.
- 19 Barber D A, Miller R M, Joo H G, *et al.* A generalized interface module for the coupling of spatial kinetics and thermal-hydraulics codes[R]. Los Alamos National Lab. (LANL), Los Alamos, NM (United States), 1999.
- 20 王连杰, 赵文博, 陈炳德, 等. SCWR堆芯三维瞬态物理-热工水力耦合程序开发[J]. 核动力工程, 2014, 35(S2): 186 - 189. DOI: [10.13832/j.jnpe.2014.S2.0186](https://doi.org/10.13832/j.jnpe.2014.S2.0186).
- WANG Lianjie, ZHAO Wenbo, CHEN Bingde, *et al.* Development of coupled 3-D neutronics/thermal-hydraulics code for SCWR core transient analysis[J]. Nuclear Power Engineering, 2014, 35(S2): 186 - 189. DOI: [10.13832/j.jnpe.2014.S2.0186](https://doi.org/10.13832/j.jnpe.2014.S2.0186).
- 21 何明涛. 液态金属冷却快堆的瞬态输运计算方法及次锕系核素嬗变的瞬态特性分析研究[D]. 西安: 西安交通大学, 2016.
- HE Mingtao. Transport-based transient methods of liquid-metal cooled fast reactors and transient characteristics of minor actinides transmutation[D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2016.
- 22 Finnemann H, Bauer H, Galati A, *et al.* Results of LWR core transient benchmarks[R]. Nuclear Energy Agency, 1993.