

# 具有翻转层的铌酸锂梁弯曲振动研究

刘冲, 黄德进, 陈晖, 马廷锋

(宁波大学 机械工程与力学学院, 浙江 宁波 315211)

**摘要:** 研究了一种具有翻转层的新型铌酸锂梁, 其翻转层与常规层的压电系数具有相反的符号, 在厚度方向上施加电场可激发铌酸锂梁做弯曲振动。将位移和电势表达为梁的厚度和宽度方向的幂级数形式, 推导了该种铌酸锂梁弯曲运动的一维方程。利用此一维方程分析了波沿梁长度方向传播的色散关系, 以验证其精确程度。结果表明, 所推导的一维方程在小波数范围内的色散曲线与三维精确解结果吻合良好; 再用所得一维方程分析了梁式压电俘能器的输出功率密度和输出效率, 将所得结果与由二维理论、三维理论所得结果进行对比。结果表明, 一维方程所得结果与三维方程的结果接近, 说明其在压电器件领域极具应用潜力。

**关键词:** 铌酸锂; 弯曲振动; 压电方程; 压电梁; 翻转层

**中图分类号:** TB535; TM282; TN384 **文献标识码:** A

## Study on Flexural Vibration of Lithium Niobate Beam with an Inversion Layer

LIU Chong, HUANG Dejin, CHEN Hui, MA Tingfeng

(The Faculty of Mechanical Engineering and Mechanics of Ningbo University, Ningbo 315211, China)

**Abstract:** A new type of lithium niobate beam with an inversion layer was investigated in this study. The symbols for the piezoelectric constants of this inversion layer were the opposite of those of a regular layer. Thus, the bending vibration of the lithium niobate beam could be excited by an electric field in the thickness direction. The displacement and potential were expressed in a power series form along the thickness and width directions of the beam, and one-dimensional equations of the bending motion of the lithium niobate beam were derived. These one-dimensional equations were used to analyze the dispersion relationship of the wave propagating along the length direction of the beam in order to verify its accuracy. The dispersion curves obtained from these one-dimensional equations coincided with those obtained using the three-dimensional theory in a small wavenumber range. The output power density and output efficiency of a beam-type piezoelectric energy harvester were analyzed using the one-dimensional equations. The results were compared with those derived using the two-dimensional and three-dimensional theories. The results indicated that the results obtained from the one-dimensional equations were very close to those obtained using the three-dimensional equations, suggesting their great application potential in the field of piezoelectric devices.

**Key words:** lithium niobate; flexure vibration; piezoelectric equations; piezoelectric beam; inversion layer

### 0 引言

铌酸锂材料具有力电耦合特性, 目前已被应用于压电俘能器、压电陀螺仪和压电谐振器等各类器件<sup>[1-3]</sup>。1987年, 研究者成功研制出一种具有翻转层的铌酸锂板<sup>[4-5]</sup>, 其翻转层与常规层的压电系数相反, 在板的厚度方向上施加电场可激发弯曲振动。此特性有利于铌酸锂板应用于以弯曲振动作为工

作模式的压电器件上, 如弯曲执行器、梁式压电俘能器和梁式压电陀螺仪等做弯曲振动的作动器和传感器等器件。

由于压电器件的复杂性和压电材料的各向异性, 对压电器件的分析和设计在数学上面临较大的挑战。压电器件的理论分析从三维压电方程获得的结果相对较少, 多数依赖于近似的二维方程。目

收稿日期: 2023-11-21

基金项目: 国家自然科学基金(12302113); 浙江省自然科学基金重点项目(LZ24A020001); 宁波市自然科学基金(2022J090)

作者简介: 刘冲(1998-), 男, 河南省驻马店市人, 硕士。通信作者: 黄德进(1968-), 男, 浙江省宁波市人, 博士。

前研究多从三维压电方程出发,通过将位移和电势展开为板厚度坐标的幂级数形式,推导出各种二维压电方程。如 Li 推导了一个由压电薄膜组成的 4 层板厚度-拉伸振动的二维方程,研究了直峰波在平板中的传播情况<sup>[6]</sup>。Huang 通过在厚度方向上将位移用幂级数的形式展开,建立了具有翻转层的铌酸锂压电板的二维方程,该理论描述了板的弯曲运动,并通过该方程分析了一种梁式压电俘能器,结果表明,二维方程能以简单的方法获得较准确的结果<sup>[7]</sup>。

如压电变压器和压电振动陀螺仪类压电器件通常采用的是矩形横截面梁结构。通过一维方程对矩形横截面梁结构的压电器件进行分析,能够简化原本复杂的三维问题。首先只需关注沿长度方向的变化,忽略横截面方向的变化,使问题变得易于解决。利用压电材料的本构关系,将电场强度和应力之间的关系转化为两个一维偏微分方程,用于描述电场强度和应力在梁的长度方向上的变化,使之可用于分析压电元件的响应特性。Alberto Milazzo 建立了一阶剪切梁理论和准静态磁电假设,提出了一种多层磁电弹性梁的一维动力学分析模型,该模型便于分析磁电弹性层状梁的动力学解析解<sup>[8]</sup>。陈涛等通过传递矩阵法研究一维六方准晶层合筒支梁的自由振动和屈曲问题,得到准晶层合梁自由振动固有频率与临界屈曲载荷的精确解,并通过改变梁的几何尺寸和叠层顺序得到筒支梁的最佳固有频率和临界屈曲载荷<sup>[9]</sup>。Dokmeci 将位移和电势在厚度和宽度方向上展开为幂级数的形式,利用变分原理建立了一维理论,用以分析压电晶体梁的各种振动问题<sup>[10]</sup>。Yang 从三维压电方程出发,将位移在厚度和宽度方向上进行双幂级数展开,得到矩形截面梁在剪切变形下拉伸和弯曲的一维方程<sup>[11]</sup>。压电一维理论可以推导出简洁直观的公式,且精度高,便于设计者计算和分析压电器件中的关键参数,如电场分布、电位移分布和电场强度。因此,一维理论为设计者提供了优化设计压电器件的有效方法,实现了更好的性能和更高的效率。

本文先从三维压电方程出发,将位移和电势展开成厚度和宽度方向上的幂级数形式,推导出具有翻转层铌酸锂的一维压电方程;然后利用该一维方程计算了波传播的色散曲线,并与三维方程得到的精确结果进行对比,验证了一维方程的准确性。利

用一维方程分析了梁式压电俘能器的电学输出特性,为这类器件的设计与分析提供了理论指导。

## 1 一维压电方程的推导

研究了具有翻转层铌酸锂梁的弯曲振动,在不考虑体积力的情况下,其压电三维方程<sup>[12]</sup>可写成:

$$\begin{cases} T_{ji,j} = \rho \ddot{u}_i \\ D_{i,i} = 0 \\ T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k \\ D_i = e_{ijk} S_{jk} + \epsilon_{ij} E_j \\ S_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \\ E_i = -\phi_{,i} \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $u_i$ ,  $T_{ij}$ ,  $S_{ij}$ ,  $E_i$ ,  $D_i$  和  $\phi$  分别为位移,应力,应变,电场,电位移和电势;  $c_{ijkl}$ ,  $e_{kij}$ ,  $\epsilon_{ij}$  分别为弹性系数、压电系数和介电系数矩阵。图 1 为具有矩形截面的铌酸锂梁示意图。

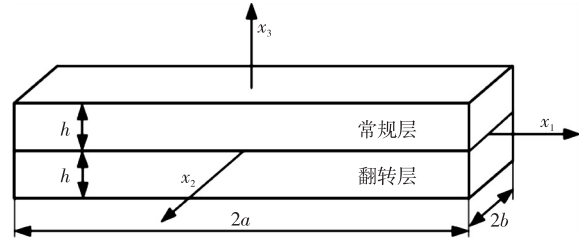


图 1 具有翻转层的铌酸锂梁示意图

将位移和电势展开得到:

$$\begin{cases} u_j = \sum_{m,n} x_2^m x_3^n u_j^{(m,n)}(x_1, t) \\ \phi = \sum_{m,n} x_2^m x_3^n \phi^{(m,n)}(x_1, t) \end{cases} \quad (2)$$

压电体的变分公式<sup>[13]</sup>为

$$\int_{t_0}^t dt \int_V [(T_{ji,j} - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i + D_{k,k} \delta \phi_k] dV = 0 \quad (3)$$

将式(2)代入式(3)得到一维运动方程和电学方程:

$$\begin{cases} T_{1j,1}^{(m,n)} - m T_{2j}^{(m-1,n)} - n T_{3j}^{(m,n-1)} + F_j^{(m,n)} = \sum_{r,s} \rho B_{mnr} \ddot{u}_j^{(r,s)} \\ D_{1,1}^{(m,n)} - m D_2^{(m-1,n)} - n D_3^{(m,n-1)} + D^{(m,n)} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

定义高阶应力分量和电位移分量为

$$\begin{cases} T_{ij}^{(m,n)} = \int_S x_2^m x_3^n T_{ij} dS \\ D_i^{(m,n)} = \int_S x_2^m x_3^n D_i dS \end{cases} \quad (5)$$

式中  $S = 4bh$  为矩形梁的横截面积。定义面法向

力、面电荷为

$$\begin{cases} T_j^{(m,n)} = b^m \int_{-h}^h [T_{2j}(b) - (-1)^m T_{2j}(-b)] x_3^n dx_3 + \\ \quad h^n \int_{-b}^b [T_{3j}(h) - (-1)^n T_{3j}(-h)] x_2^m dx_2 \\ D^{(m,n)} = b^m \int_{-h}^h [D_2(b) - (-1)^m D_2(-b)] x_3^n dx_3 + \\ \quad h^n \int_{-b}^b [D_3(h) - (-1)^n D_3(-h)] x_2^m dx_2 \\ F_j^{(m,n)} = T_j^{(m,n)} \end{cases} \quad (6)$$

$$B_{mnr} = \begin{cases} \frac{4h^{n+s+1} b^{m+r+1}}{(n+s+1)(m+r+1)} & m+r, n+s \text{ 为偶数} \\ 0 & \text{除上面情况外} \end{cases} \quad (7)$$

将式(2)代入式(1),得到高阶应变分量和高阶电场分量的级数形式:

$$\begin{cases} S_{ij} = \sum_{m,n} x_2^m x_3^n S_{ij}^{(m,n)} \\ E_i = \sum_{m,n} x_2^m x_3^n E_i^{(m,n)} \end{cases} \quad (8)$$

其中,

$$\begin{cases} S_{ij}^{(m,n)} = \frac{1}{2} [(u_{i,j}^{(m,n)} + u_{j,i}^{(m,n)}) + (m+1) \\ \quad (\delta_{2j} u_i^{(m+1,n)} + \delta_{2i} u_j^{(m+1,n)}) + (n+1) \\ \quad (\delta_{3j} u_i^{(m,n+1)} + \delta_{3i} u_j^{(m,n+1)})] \\ E_i^{(m,n)} = -\phi_{,i}^{(m,n)} - \delta_{2i} (m+1) \phi^{(m+1,n)} - \\ \quad \delta_{3i} (n+1) \phi^{(m,n+1)} \end{cases} \quad (9)$$

将式(8)、(1)代入式(5),得到一维本构关系:

$$\begin{cases} T_p^{(m,n)} = \sum_{m,n} B_{mnr} c_{pq} S_q^{(r,s)} - \sum_{m,n} \bar{B}_{mnr} e_{kp} E_k^{(r,s)} \\ D_i^{(m,n)} = \sum_{m,n} \bar{B}_{mnr} e_{iq} S_q^{(r,s)} + \sum_{m,n} B_{mnr} \epsilon_{ik} E_k^{(r,s)} \end{cases} \quad (10)$$

其中,

$$\bar{B}_{mnr} = \begin{cases} \frac{4b^{m+r+1} h^{n+s+1}}{(m+r+1)(n+s+1)} & m+r=\text{偶数}, n+s \text{ 为奇数} \\ 0 & \text{除上面情况外} \end{cases} \quad (11)$$

考虑到模态有拉伸模态  $u_1^{(0,0)}$ , 弯曲模态  $u_2^{(0,0)}$ ,  $u_3^{(0,0)}$  和剪切变形  $u_1^{(1,0)}$ ,  $u_1^{(0,1)}$ , 通过式(4)可得:

$$\begin{cases} T_{1,1}^{(0,0)} + F_1^{(0,0)} = 4bh\rho\ddot{u}_1^{(0,0)} \\ T_{6,1}^{(0,0)} + F_2^{(0,0)} = 4bh\rho\ddot{u}_2^{(0,0)} \\ T_{5,1}^{(0,0)} + F_3^{(0,0)} = 4bh\rho\ddot{u}_3^{(0,0)} \\ T_{1,1}^{(1,0)} - T_6^{(0,0)} + F_1^{(1,0)} = 4b^3 h\rho\ddot{u}_1^{(1,0)}/3 \\ T_{1,1}^{(0,1)} - T_5^{(0,0)} + F_1^{(0,1)} = 4bh^3\rho\ddot{u}_j^{(0,1)}/3 \end{cases} \quad (12)$$

式(12)忽略了所有高阶惯性项<sup>[14]</sup>。本文只研究铌酸锂的拉伸和弯曲运动,与厚度剪切等其他运动相比,这些运动属于低频运动。对于电学量,保留了  $\phi^{(0,0)}$ ,  $\phi^{(1,0)}$ ,  $\phi^{(0,1)}$ ,  $\phi^{(1,1)}$ ,  $\phi^{(2,0)}$  和  $\phi^{(0,2)}$ 。由式(4)可得:

$$\begin{cases} D_{1,1}^{(0,0)} + D^{(0,0)} = 0 \\ D_{1,1}^{(1,0)} - D_2^{(0,0)} + D^{(1,0)} = 0 \\ D_{1,1}^{(0,1)} - D_3^{(0,0)} + D^{(0,1)} = 0 \\ D_{1,1}^{(1,1)} - D_2^{(0,1)} - D_3^{(1,0)} + D^{(1,1)} = 0 \\ D_{1,1}^{(2,0)} - 2D_2^{(1,0)} + D^{(2,0)} = 0 \\ D_{1,1}^{(0,2)} - 2D_3^{(0,1)} + D^{(0,2)} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

由式(9)得到零阶拉伸和弯曲剪切应变以及一阶弯曲应变:

$$\begin{cases} S_1^{(0,0)} = u_{1,1}^{(0,0)} \\ S_1^{(1,0)} = u_{1,1}^{(1,0)} \\ S_1^{(0,1)} = u_{1,1}^{(0,1)} \\ S_5^{(0,0)} = u_{3,1}^{(0,0)} + u_1^{(0,1)} \\ S_6^{(0,0)} = u_{2,1}^{(0,0)} + u_1^{(1,0)} \end{cases} \quad (14)$$

由式(9)得到零阶电场电势、二阶电场电势和一阶电场电势关系:

$$\begin{cases} E_1^{(0,0)} = -\phi_{,1}^{(0,0)} \\ E_2^{(0,0)} = -\phi^{(1,0)} \\ E_3^{(0,0)} = -\phi^{(0,1)} \\ E_1^{(2,0)} = -\phi_{,1}^{(2,0)} \\ E_1^{(0,2)} = -\phi_{,1}^{(0,2)} \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} E_1^{(1,0)} = -\phi_{,1}^{(1,0)} \\ E_2^{(1,0)} = -2\phi^{(2,0)} \\ E_3^{(1,0)} = -\phi^{(1,1)} \\ E_1^{(0,1)} = -\phi_{,1}^{(0,1)} \\ E_2^{(0,1)} = -\phi^{(1,1)} \\ E_3^{(0,1)} = -2\phi^{(0,2)} \\ E_1^{(1,1)} = -\phi_{,1}^{(1,1)} \end{cases} \quad (16)$$

在式(10)中,分别令  $m=n=0$ ,  $m=1, n=0$  和  $m=0, n=1$ , 得到零阶和一阶应力本构关系:

$$\begin{cases} T_p^{(0,0)} = B_{0000} c_{pq} S_q^{(0,0)} - \bar{B}_{0001} e_{kp} E_k^{(0,1)} \\ T_p^{(1,0)} = B_{1010} c_{pq} S_q^{(1,0)} - \bar{B}_{1011} e_{kp} E_k^{(1,1)} \\ T_p^{(0,1)} = B_{0101} c_{pq} S_q^{(0,1)} - \bar{B}_{0100} e_{kp} E_k^{(0,0)} - \\ \quad \bar{B}_{0102} e_{kp} E_k^{(0,2)} - \bar{B}_{0120} e_{kp} E_k^{(2,0)} \end{cases} \quad (18)$$

同理,分别令  $m=n=0, m=1$  和  $n=0, m=0$  和  $n=1, m=2$  和  $n=0$  以及  $m=0$  和  $n=2$ , 得到零阶、一阶和二阶电位移本构关系:

$$\begin{cases} D_i^{(1,0)} = B_{1010} \epsilon_{ik} E_k^{(1,0)} \\ D_i^{(0,1)} = \bar{B}_{0100} e_{iq} S_q^{(0,0)} + B_{0101} \epsilon_{ik} E_k^{(0,1)} \\ D_i^{(1,1)} = \bar{B}_{1110} e_{iq} S_q^{(1,0)} + B_{1111} \epsilon_{ik} E_k^{(1,1)} \\ D_i^{(0,0)} = \bar{B}_{0001} e_{iq} S_q^{(0,1)} + B_{0000} \epsilon_{ik} E_k^{(0,0)} + B_{0020} \epsilon_{ik} E_k^{(2,0)} + \\ \quad B_{0002} \epsilon_{ik} E_k^{(0,2)} \\ D_i^{(2,0)} = \bar{B}_{2001} e_{iq} S_q^{(0,1)} + B_{2000} \epsilon_{ik} E_k^{(0,0)} + B_{2020} \epsilon_{ik} E_k^{(2,0)} + \\ \quad B_{2002} \epsilon_{ik} E_k^{(0,2)} \\ D_i^{(0,2)} = \bar{B}_{0201} e_{iq} S_q^{(0,1)} + B_{0200} \epsilon_{ik} E_k^{(0,0)} + B_{0220} \epsilon_{ik} E_k^{(2,0)} + \\ \quad B_{0202} \epsilon_{ik} E_k^{(0,2)} \end{cases} \quad (19)$$

式(14)中并不包含  $S_2^{(0,0)}, S_3^{(0,0)}$  和  $S_4^{(0,0)}$ , 但是在本构关系中需要用到这几个应变分量。为了消除这几个应变分量对本构关系的影响, 令  $T_2^{(0,0)} = T_3^{(0,0)} = T_4^{(0,0)} = 0$ 。由式(18)可见, 当弹性系数  $c_{15} = 0$  时,  $x_3$  方向上的弯矩  $T_1^{(1,0)}$  与剪切应变  $S_5^{(1,0)}$  并不耦合。为了调整本构关系式(18), 令  $T_2^{(1,0)} - T_6^{(1,0)} = 0$ , 同理可令  $T_2^{(0,1)} - T_6^{(0,1)} = 0$  来调整本构关系<sup>[15]</sup>。综上可得到应力松弛条件:

$$\begin{cases} T_\alpha^{(0,0)} = B_{0000} c_{\alpha q} S_q^{(0,0)} - \bar{B}_{0001} e_{ka} E_k^{(0,1)} = 0 \\ T_\beta^{(1,0)} = B_{1010} c_{\beta q} S_q^{(1,0)} - \bar{B}_{1011} e_{k\beta} E_k^{(1,1)} = 0 \\ T_\beta^{(0,1)} = B_{0101} c_{\beta q} S_q^{(0,1)} - \bar{B}_{0100} e_{k\beta} E_k^{(0,0)} - \\ \quad \bar{B}_{0102} e_{k\beta} E_k^{(0,2)} - \bar{B}_{0120} e_{k\beta} E_k^{(2,0)} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

式中:  $\alpha = 2, 3, 4; \beta = 2, 3, 4, 5, 6$ 。这里引入新角标  $u = 1, 5, 6; v = 2, 3, 4; s = 2, 3, 4, 5, 6$ 。式(20)可改写为

$$\begin{cases} B_{0000} (c_{au} S_u^{(0,0)} + c_{av} S_v^{(0,0)}) - \bar{B}_{0001} e_{ka} E_k^{(0,1)} = 0 \\ B_{1010} (c_{\beta 1} S_1^{(1,0)} + c_{\beta s} S_s^{(1,0)}) - \bar{B}_{1011} e_{k\beta} E_k^{(1,1)} = 0 \\ B_{0101} (c_{\beta 1} S_1^{(0,1)} + c_{\beta s} S_s^{(0,1)}) - \bar{B}_{0100} e_{k\beta} E_k^{(0,0)} - \\ \quad \bar{B}_{0102} e_{k\beta} E_k^{(0,2)} - \bar{B}_{0120} e_{k\beta} E_k^{(2,0)} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

通过式(21)可以解出  $S_v^{(0,0)}, S_s^{(1,0)}$  和  $S_s^{(0,1)}$ , 将

其代入式(18)可以得到新的应力本构关系:

$$\begin{cases} T_p^{(0,0)} = B_{0000} c_{pu}^{(0)} S_u^{(0,0)} - \bar{B}_{0001} e_{kp}^{(0)} E_k^{(0,1)} \\ T_p^{(1,0)} = B_{1010} c_{p1}^{(1)} S_1^{(1,0)} - \bar{B}_{1011} e_{kp}^{(1)} E_k^{(1,1)} \\ T_p^{(0,1)} = B_{0101} c_{p1}^{(1)} S_1^{(0,1)} - \bar{B}_{0100} e_{kp}^{(1)} E_k^{(0,0)} - \\ \quad \bar{B}_{0102} e_{kp}^{(1)} E_k^{(0,2)} - \bar{B}_{0120} e_{kp}^{(1)} E_k^{(2,0)} \end{cases} \quad (22)$$

同理可以得到新的电位移本构关系:

$$\begin{cases} D_i^{(1,0)} = B_{1010} \epsilon_{ik} E_k^{(1,0)} \\ D_i^{(0,1)} = \bar{B}_{0100} e_{iu}^{(0)} S_u^{(0,0)} + B_{0101} \epsilon_{ik}^{(2)} E_k^{(0,1)} \\ D_i^{(1,1)} = \bar{B}_{1110} e_{i1}^{(1)} S_1^{(1,0)} + B_{1111} \epsilon_{ik}^{(0)} E_k^{(1,1)} \\ D_i^{(0,0)} = \bar{B}_{0001} e_{i1}^{(1)} S_1^{(0,1)} + B_{0000} \epsilon_{ik}^{(0)} E_k^{(0,0)} + \\ \quad B_{0020} \epsilon_{ik}^{(0)} E_k^{(2,0)} + B_{0002} \epsilon_{ik}^{(1)} E_k^{(0,2)} \\ D_i^{(2,0)} = \bar{B}_{2001} e_{i1}^{(1)} S_1^{(0,1)} + B_{2000} \epsilon_{ik}^{(0)} E_k^{(0,0)} + \\ \quad B_{2020} \epsilon_{ik}^{(3)} E_k^{(2,0)} + B_{2002} \epsilon_{ik}^{(1)} E_k^{(0,2)} \\ D_i^{(0,2)} = \bar{B}_{0201} e_{i1}^{(1)} S_1^{(0,1)} + B_{0200} \epsilon_{ik}^{(1)} E_k^{(0,0)} + \\ \quad B_{0220} \epsilon_{ik}^{(1)} E_k^{(2,0)} + B_{0202} \epsilon_{ik}^{(4)} E_k^{(0,2)} \end{cases} \quad (23)$$

其中,

$$\begin{cases} c_{pu}^{(0)} = c_{pu} - c_{pv} c_{av}^{-1} c_{au} \\ c_{p1}^{(1)} = c_{p1} - c_{ps} c_{\beta s}^{-1} c_{\beta 1} \\ e_{kp}^{(0)} = e_{kp} - c_{pv} c_{av}^{-1} e_{ka} \\ e_{kp}^{(1)} = e_{kp} - c_{ps} c_{\beta s}^{-1} e_{k\beta} \\ \epsilon_{ik}^{(0)} = \epsilon_{ik} + 3e_{is} c_{\beta s}^{-1} e_{k\beta} / 4 \\ \epsilon_{ik}^{(1)} = \epsilon_{ik} + 9e_{is} c_{\beta s}^{-1} e_{k\beta} / 8 \\ \epsilon_{ik}^{(2)} = \epsilon_{ik} + 3e_{iv} c_{av}^{-1} e_{ka} / 4 \\ \epsilon_{ik}^{(3)} = \epsilon_{ik} + 5e_{is} c_{\beta s}^{-1} e_{k\beta} / 12 \\ \epsilon_{ik}^{(4)} = \epsilon_{ik} + 15e_{is} c_{\beta s}^{-1} e_{k\beta} / 16 \end{cases} \quad (24)$$

式中  $c_{av}^{-1}$  和  $c_{\beta s}^{-1}$  分别为  $c_{av}$  和  $c_{\beta s}$  的逆矩阵。为了消除方程中的剪切变形, 将式(12)中的旋转惯性项设置为 0, 求得:

$$\begin{cases} T_6^{(0,0)} = T_{1,1}^{(1,0)} + F_1^{(1,0)} \\ T_5^{(0,0)} = T_{1,1}^{(0,1)} + F_1^{(0,1)} \end{cases} \quad (25)$$

将式(25)代入到式(12)可得不含剪切变形的弯曲运动方程:

$$\begin{cases} T_{1,11}^{(1,0)} + F_{1,1}^{(1,0)} + F_2^{(0,0)} = 4bh\rho\ddot{u}_2^{(0,0)} \\ T_{1,11}^{(0,1)} + F_{1,1}^{(0,1)} + F_3^{(0,0)} = 4bh\rho\ddot{u}_3^{(0,0)} \end{cases} \quad (26)$$

此外还需要将零阶弯曲剪切应变设置为 0, 即  $S_5^{(0,0)} = S_6^{(0,0)} = 0$ 。由式(14)可得:

$$\begin{cases} S_1^{(1,0)} = -u_{2,11}^{(0,0)} \\ S_1^{(0,1)} = -u_{3,11}^{(0,0)} \end{cases} \quad (27)$$

由式(14)-(17)、(22)、(23)、(26)、(27)得到铌酸锂梁的一维控制方程,包括本构关系、应变位移关系、电场电势关系和运动方程。

### 2 色散关系

由第 1 节得到具有翻转层铌酸锂梁的一维运动方程。由于该组方程本质上是近似的,利用该方程来计算弯曲模态的色散曲线,并与由三维方程所得到的精确结果进行对比,验证了该方程的准确性。忽略压电梁的面力,并将上、下表面的电极短路,根据式(26)可以得到  $x_3$  方向上弯曲模态的运动方程:

$$T_{1,11}^{(0,1)} = 4bh\rho\ddot{u}_3^{(0,0)} \tag{28}$$

将式(27)代入式(22)得到本构关系:

$$T_1^{(0,1)} = -\frac{4bh^3}{3}c_{11}^{(1)}u_{3,11}^{(0,0)} \tag{29}$$

选取位移为

$$u_3^{(0,0)} = A \sin(\xi x_1) \exp(i\omega t) \tag{30}$$

式中: $A$  为振幅; $\xi$  为  $x_1$  方向的波数; $\omega$  为频率; $t$  为时间。将式(30)代入式(29)后再代入式(28)并进行归一化:

$$\frac{\pi^2 c_{11}^{(1)}}{12c_{44}} X^4 - \Omega^2 = 0 \tag{31}$$

式(31)中的归一化公式为

$$\begin{cases} \Omega = \frac{2h\omega}{\pi} \sqrt{\frac{\rho}{c_{44}}} \\ X = \frac{2h\xi}{\pi} \end{cases} \tag{32}$$

式(32)、(31)中的弹性系数见文献[16-17]。利用式(31)得到弯曲模态的波传播在  $x_1$  方向上的波数与频率的关系,并与文献[5]中的结果进行了对比,结果如图 2 所示。由图可见,该一维方程得到的色散曲线更加接近于三维方程的结果。

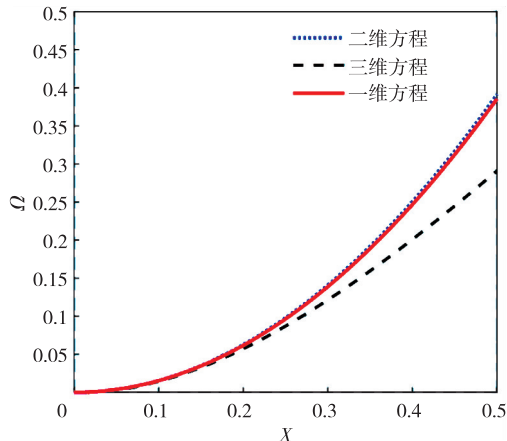


图 2 色散曲线

将铌酸锂简化为一维梁结构,引入了更多的应力松弛条件来调整本构关系式(18),使得一维方程的柔度系数为  $s_{11}^{(1)} = 5.76 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$ ,而文献[5]中的柔度系数为  $5.6 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$ ,相较于铌酸锂真实的柔度系数  $s_{11} = 5.78 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$ ,一维方程更加接近。由式(31)可见,频率与波数在实数域呈二次函数关系,在形式上与文献[7]相同,而一维方程波数的系数更加接近于三维理论,所以一维方程的色散曲线更加接近于三维方程的结果。

### 3 悬臂梁式压电俘能器

利用第 1 节得到的铌酸锂一维弯曲方程对悬臂梁压电俘能器的电学输出特性进行分析。图 3 为悬臂梁压电俘能器示意图。由图可见,该俘能器的长度为  $2a$ ,厚度为  $2h$ ,宽度为  $2b$ 。其左端固定在基座上,基座以  $\bar{A} \exp(i\omega t)$  运动为梁的外部激励。上、下表面为输入、输出电极,其外部负载用负载阻抗  $Z$  表示。



图 3 悬臂梁压电俘能器

通过式(7)、(11)、(22)和(23)可以得到  $x_3$  方向上的弯矩  $T_1^{(0,1)}$  和电位移  $D_3^{(0,0)}$ :

$$\begin{cases} T_1^{(0,1)} = \frac{4bh^3}{3}c_{11}^{(1)}S_1^{(0,1)} - 2bh^2e_{31}^{(1)}E_3^{(0,0)} - bh^4e_{31}^{(1)}E_3^{(0,2)} - \frac{2b^3h^2}{3}e_{31}^{(1)}E_3^{(2,0)} \\ D_3^{(0,0)} = 2bh^2e_{31}^{(1)}S_1^{(0,1)} + 4bh\epsilon_{33}^{(0)}E_3^{(0,0)} + \frac{4bh^3}{3}\epsilon_{33}^{(1)}E_3^{(0,2)} + \frac{4b^3h}{3}\epsilon_{33}^{(0)}E_3^{(2,0)} \end{cases} \tag{33}$$

令  $E_3^{(0,0)} = \frac{-V}{2h}, E_3^{(0,2)} = 0, E_3^{(2,0)} = 0$ ,将式(27)

代入式(33)可得:

$$\begin{cases} T_1^{(0,1)} = -\frac{4bh^3}{3}c_{11}^{(1)}u_{3,11}^{(0,0)} + bce_{31}^{(1)}V \\ D_3^{(0,0)} = -2bh^2e_{31}^{(1)}u_{3,11}^{(0,0)} - 2b\epsilon_{33}^{(0)}V \end{cases} \tag{34}$$

将式(34)代入式(28),得到:

$$-Cu_{3,1111}^{(0,0)} = \rho\ddot{u}_3^{(0,0)} \tag{35}$$

其中,

$$C = \frac{h^2 c_{11}^{(1)}}{3} \quad (36)$$

式(35)的位移通解<sup>[18]</sup>为

$$u_3^{(0,0)} = (B_1 \sin \alpha x_1 + B_2 \cos \alpha x_1 + B_3 \sinh \alpha x_1 + B_4 \cosh \alpha x_1) \exp(i\omega t) \quad (37)$$

式中:  $B_1 - B_4$  为任意常数;  $\alpha$  为  $x_1$  方向上的波数。将式(37)代入式(35), 得到波数  $\alpha$ :

$$\alpha = \left( \frac{\rho \omega^2}{C} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (38)$$

这里电位移近似取为  $D_3 \approx \frac{D_3^{(0,0)}}{2bh}$ , 则输出电极上的电荷:

$$Q = \int_0^{2a} -2D_3 b dx_1 \approx \int_0^{2a} -\frac{D_3^{(0,0)}}{c} dx_1 = 2bhe_{31}^{(1)} u_{3,1}^{(0,0)}(2a) + \frac{4ab\epsilon_{33}^{(0)} V}{h} \quad (39)$$

输出电极上流出的电流:

$$I = -\dot{Q} = -i\omega \left( 2bhe_{31}^{(1)} u_{3,1}^{(0,0)}(2a) + \frac{4ab\epsilon_{33}^{(0)} V}{h} \right) \quad (40)$$

其力学边界条件和电学边界条件为

$$\begin{cases} u_3^{(0,0)}(x_1=0) = \bar{A} \\ u_{3,1}^{(0,0)}(x_1=0) = 0 \\ T_1^{(0,1)}(x_1=2a) = 0 \\ T_{1,1}^{(0,1)}(x_1=2a) = 0 \\ I = \frac{V}{Z} \end{cases} \quad (41)$$

将式(37)、(34)和(40)代入边界条件式(41), 得到关于位移振幅( $B_1 - B_4$ )和输出电压( $V$ )的5个方程。联立求解这5个方程可以得到  $B_1 - B_4$  和  $V$ 。该俘能器的输入和输出功率<sup>[7]</sup>为

$$\begin{cases} P_1 = -\frac{1}{4} S \{ T_{1,1}^{(0,1)}(0,t) [i\omega u_3^{(0,0)}(0)]^* + T_{1,1}^{(0,1)*}(0,t) i\omega u_3^{(0,0)}(0) \} \\ P_2 = \frac{1}{4} (IV^* + I^* V) \end{cases} \quad (42)$$

式中:  $S$  为横截面积;  $*$  表示复共轭。定义单位阻抗为

$$\begin{cases} Z_0 = \frac{1}{i\omega C_0} \\ C_0 = \epsilon_{33} \left( 1 - \frac{d_{31}^2}{\epsilon_{33} s_{11}} \right) \frac{2ba}{h} \approx \epsilon_{33} \frac{2ba}{h} \end{cases} \quad (43)$$

为了与文献[7]中的结果进行对比, 该俘能器的几何尺寸选取  $a=12.5 \text{ mm}$ ,  $b=4 \text{ mm}$ ,  $h=0.31 \text{ mm}$ 。基座的激励振幅设置为  $\bar{A}\omega^2 = 1 \text{ m/s}^2$ 。考虑到材料的阻尼, 在数值计算中需要引入复数形式的弹性系数,  $c_{ij} = c_{ij}(1+iq^{-1})$ ,  $q=100$ <sup>[19]</sup>。图4为负载阻抗为  $0.2Z_0$  时, 俘能器的输出功率密度  $p_2 = P_2/(8abh)$  与驱动频率的关系。由图可见, 所得到的一维方程对于梁式压电俘能器的工作频率和输出功率密度的预测与三维方程接近一致, 而文献[7]中二维方程的结果相较于本文的一维方程则存在一定的误差。

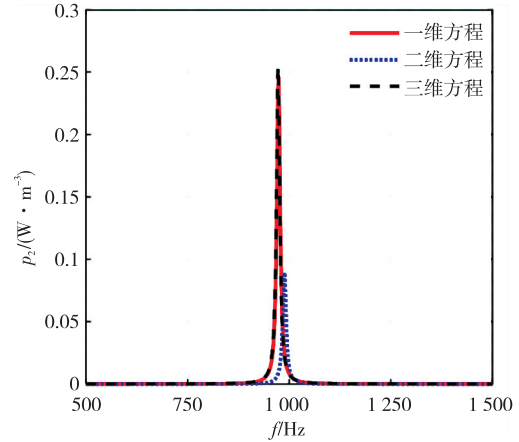


图4 俘能器输出功率密度与驱动频率关系

当负载阻抗为  $0.5Z_0$  时, 驱动频率与输出效率  $\eta = P_2/P_1$  的关系如图5所示。

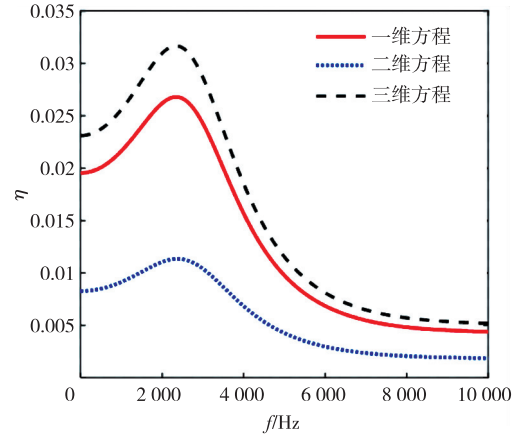


图5 俘能器输出效率与驱动频率关系

由图5可见, 一维方程与三维方程的结果较为接近, 与二维方程相差较大。在第2节提到的一维方程的柔度系数更接近于铌酸锂本身的柔度系数, 因此, 通过一维方程计算出的俘能器驱动频率更接近于三维方程的结果。由于本文将电位移近似为沿梁

的横截面均匀分布,更接近于电位移在压电梁上的真实分布,所以利用一维方程计算出的俘能器输出功率密度和效率更接近于三维方程的结果。

#### 4 结束语

研究从三维压电方程出发,将位移和电势展开成厚度方向和宽度方向上的双幂级数形式,得到具有翻转层铌酸锂梁的一维方程。分析了弯曲模态的弹性波在  $x_1$  方向上传播的色散曲线,并与二维、三维方程所得到的结果进行对比,结果表明该一维方程在小波数范围内能够精确地反映弯曲波的传播。以悬臂梁压电俘能器作为数值算例,分析了该俘能器输出功率密度和能量转换效率与驱动频率的关系,其结果与三维方程得到的结果较为接近。

#### 参考文献:

- [1] WANG Zhi, ZHAO Ming, YANG Jiashi. A piezoelectric gyroscope with self-equilibrated coriolis force based on overtone thickness-shear modes of a lithium niobate plate with an inversion layer[J]. IEEE Sensors Journal, 2014, 15(3): 1794-1799.
- [2] OBITANI K, ARAYA K, YACHI M, et al. Piezoelectric disk gyroscope fabricated with single-crystal lithium niobate[J]. Journal of Microelectromechanical Systems, 2021, 30(3): 384-391.
- [3] ZHANG M, WANG C, CHENG R, et al. Monolithic ultra-high-Q lithium niobate microring resonator[J]. Optica, 2017, 4(12): 1536-1537.
- [4] ZHANG Zhiyong, ZHU Yongyuan, ZHU Shining, et al. Study on the formation mechanism of a complex domain structure in  $\text{LiNbO}_3$  [J]. Journal of Applied Physics, 1995, 77(8): 4136-4138.
- [5] NAKAMURA K, HARUYASU A, HIROSHI S. Ferroelectric domain inversion caused in  $\text{LiNbO}_3$  plates by heat treatment[J]. Applied Physics Letters, 1987, 50(20): 1413-1414.
- [6] LI N, QIAN Z, YANG J. Two-dimensional equations for piezoelectric thin-film acoustic wave resonators[J]. International Journal of Solids and Structures, 2017, 110: 170-177.
- [7] HUANG D, YANG J. Flexural vibration of a lithium niobate piezoelectric plate with a ferroelectric inversion layer[J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2020, 27(10): 831-839.
- [8] MILAZZO A. A one-dimensional model for dynamic analysis of generally layered magneto-electro-elastic beams[J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(2): 465-483.
- [9] 陈韬,郭俊宏,田园. 一维六方准晶层合筒支梁自由振动与屈曲的精确解[J]. 固体力学学报, 2023, 44(1): 109-119.  
CHEN Tao, GUO Junhong, TIAN Yuan. Accurate solutions for free vibration and buckling of one-dimensional hexagonal quasicrystal laminated simply supported beams[J]. Journal of Solid Mechanics, 2023, 44(1): 109-119.
- [10] DÖKMECI M C. A theory of high frequency vibrations of piezoelectric crystal bars[J]. International Journal of Solids and Structures, 1974, 10(4): 401-409.
- [11] YANG J S. Equations for the extension and flexure of a piezoelectric beam with rectangular cross section and applications[J]. International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, 1998, 9(4): 409-420.
- [12] LIU Chong, HUANG Dejin, ZHEN Xiahu. The dispersion relations of a lithium niobate plate covered with a thin isotropic elastic layer[C]//[S. l.]: 2022 16th Symposium on Piezoelectricity, Acoustic Waves, and Device Applications, IEEE, 2022: 552-556.
- [13] MINDLIN R D. An introduction to the mathematical theory of vibrations of elastic plates[M]. New Jersey: World Scientific, 2007.
- [14] MINDLIN R D. Low frequency vibrations of elastic bars[J]. International Journal of Solids and Structures, 1976, 12(1): 27-49.
- [15] HUANG Dejin, YANG Jiashi. A second-order theory for lithium niobate piezoelectric plates with a ferroelectric inversion layer in coupled extensional, thickness-stretch and symmetric thickness-shear motions [J]. Acta Mechanica, 2020, 231(12): 5239-5250.
- [16] WARNER A W, ONOE M, COUQUIN G A. Determination of elastic and piezoelectric constants for crystals in class (3m)[J]. J Acoust Soc Am, 1967, 42: 1223-1231.
- [17] SMITH R T, WELSH F S. Temperature dependence of the elastic, piezoelectric, and dielectric constants of lithium tantalate and lithium niobate[J]. J Appl Phys, 1971, 42: 2219-2230.
- [18] LIU Chong, ZHEN Xiaohu, HUANG Dejin. Study on an energy harvester using a first-order plate theory[C] //Zhengzhou, China: 2020 15th Symposium on Piezoelectricity, Acoustic Waves and Device Applications, 2021: 551-554.
- [19] QU Yilin, FENG Jin, YANG Jiashi. Vibrating flexoelectric micro-beams as angular rate sensors[J]. Micromachines, 2022, 13(8): 1243.