引用本文:祝战科,吴培洁 ,吴加丽,等. 光学像差的 Zernike 多项式描述研究进展[J]. 光通信技术,2025,49(3):40-46.

光学像差的 Zernike 多项式描述研究进展

祝战科[1],吴培洁[2],吴加丽[2],柯程虎[3],柯熙政[1,2,4*]

(1.陕西工业职业技术学院 航空工程学院,陕西 咸阳 712000;2.西安理工大学 自动化与信息工程学院,西安 710048;
3.西安文理学院 信息工程学院,西安 710065;4.咸阳市智能制造装备技术重点实验室,陕西 咸阳 712000)

摘要:光学系统的成像质量受实际光路与理想光路偏差导致的像差影响,而 Zernike 多项式作为描述像差的有效工具,可描述和分析光学像差特性。综述了国内外相关研究进展,重点解析了标准 Zernike 多项式、Zernike 圆多项式及 Zernike 条纹多项式的数学表达形式,明确了其与球差、彗差、像散等典型像差的对应关系。研究表明,Zernike 圆多项式通过极坐标正交基函数特性,能高效表征轴对称像差分布,而条纹多项式则适用于离轴像差描述。

关键词:Zernike 多项式;像差;光学系统;像差描述

中图分类号:TN929.12　**文献标志码**:A　**文章编号**:1002-5561(2025)03-0040-07

DOI:10.13921/j.cnki.issn1002-5561.2025.03.007　**开放科学(资源服务)标识码(OSID)**:

Research progress on the Zernike polynomial description of optical aberrations

ZHU Zhanke[1], WU Peijie[2], WU Jiali[2], KE Chenghu[3], KE Xizheng[1,2,4*]

(1. School of aeronautical engineering, Shaanxi Polytechnic Institute, Xianyang Shaanxi 712000, China; 2. School of Automation and Information Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 3. School of Information Engineering, Xi'an University, Xi'an 710065, China; 4. Xianyang Key Laboratory of Intelligent Manufacturing Equipment Technology, Xianyang Shaanxi 712000, China)

Abstract: The imaging quality of optical systems is affected by aberrations caused by deviations between the actual optical path and the ideal optical path. Zernike polynomials, as an effective tool for describing aberrations, can describe and analyze the characteristics of optical aberrations. This paper reviews the research progress at home and abroad, and focuses on analyzing the mathematical expression forms of standard Zernike polynomials, Zernike circular polynomials, and Zernike annular polynomials, clarifying their corresponding relationships with typical aberrations such as spherical aberration, coma, and astigmatism. Research shows that Zernike circular polynomials can efficiently represent the distribution of axisymmetric aberrations through the characteristics of orthogonal basis functions in polar coordinates, while annular polynomials are suitable for describing off-axis aberrations.

Key words: Zernike polynomial, aberration, optical system, aberration description

收稿日期:2024-09-18。

基金项目:国家自然科学基金面上项目(61377080)资助;陕西省重点产业创新项目(2017ZDCXL-GY-06-01)资助。

作者简介:祝战科(1968—),男,教授,高级工程师、咸阳市智能制造装备技术重点实验室主任、陕西省机械工程学会数控自动化分会理事。主要研究方向为光机电一体化装备技术研究。主持获得国家教学成果二等奖 1 项、陕西省人民政府教学成果一等奖 1 项、陕西省机械工程学会科技成果二等奖 1 项等。

* **通信作者**:柯熙政(1962—),男,理学博士,二级教授,中国电子学会会士,陕西省教学名师,俄罗斯自然科学院外籍院士,主要研究方向为无线光通信。

0 引言

光学系统的成像质量受限于实际光路与理想光路的偏差,即像差。像差不仅导致图像模糊、畸变,还直接影响光学系统的分辨率与信噪比,其精确描述与校正始终是光学设计领域的核心挑战。在这一背景下,Zernike 多项式凭借其卓越的数学特性,成为解析像差问题的普适性工具。作为单位圆上构成完整正交基集的连续函数集合,Zernike 多项式由 ZERNIKE F [1] 于 20 世纪初提出,最初用于相位分布描述,后经 BHATIA A B 等人[2]系统发展,其正交性与不变性在像差分析中展现出独特优势。根据光学系统的几何特性

与像差分布特征,Zernike 多项式衍生出 3 种典型形式:1)标准 Zernike 多项式。基于笛卡尔坐标系的传统形式,适用于矩形孔径系统,通过多项式阶数匹配低阶像差(如离焦、像散),其系数可直接关联波前畸变的幅值与方向。2)Zernike 圆多项式。针对圆形光瞳系统的优化表达,由径向多项式与角向三角函数的乘积构成,天然满足轴对称像差(如球差、慧差)的分离需求,且其正交性确保各阶模态的独立调控,为像差平衡提供数学框架。3)Zernike 条纹多项式。通过引入方位角偏移量扩展而来,专门用于描述环形孔径或离轴光学系统中的非对称像差(如场曲、畸变),在自由曲面光学及自适应光学领域展现出显著优势。Zernike 多项式不仅能够量化像差, 还可指导光学系统参数优化,实现成像质量的全局最优。

本文聚焦于 Zernike 多项式与光学像差的内在关联,系统阐述不同像差类型的 Zernike 描述方法,揭示 Zernike 系数与波前畸变的映射规律, 旨在为光学设计、像差校正及系统优化提供理论支撑。

1 国内外研究进展

光学像差, 源于光学系统内多重因素的交互作用,包括但不限于光学元件的形状、位置、材料特性及光线传播路径等, 是导致成像质量下降的关键现象。深入剖析光学像差不仅有助于提升成像质量、优化光学设计,还为系统性能评估提供了关键依据。同时,在科学研究、工业产品质量保证以及医学成像精度和可靠性提升等方面,对光学像差的理解与应用均展现出了其不可或缺的价值。通过深入研究和精确校正像差,能够设计出更高分辨率的光学系统,促进基础科学与工程技术的发展。

1.1 国外研究进展

在光学像差研究中,Zernike 多项式因其数学正交性和物理直观性,成为表征波前像差的重要工具。国外学者围绕其理论拓展、算法优化及应用创新开展了系统性研究,主要进展可归纳为以下方向。

1.1.1 Zernike 多项式理论完善与算法创新

早期研究侧重于 Zernike 多项式的基础理论验证及计算方法的改进。BOOTH M J [3]首次提出将波前像差表示为多种像差模式的叠加,并利用模态波前传感器实现自适应光学闭环校正, 为后续研究奠定了基础。随后,SANCHEZ-ESCOBAR J J[4]引入混合遗传算法, 优化了干涉图中波前像差的提取精度, 提高了 Zernike 多项式拟合实验数据的可靠性。SUNDUS Y H 等人[5]进一步证明了 Zernike 多项式在单位环形椭圆孔径上的正交性,拓展了其适用范围。近年来,人工智能技术的融合成为新趋势,KHORIN P A 等人[6]利用卷积神经网络从点扩散函数(PSF)中识别 Zernike 像差,显著提升了波前复原的自动化水平和精度。

1.1.2 视觉科学与人眼像差研究

Zernike 多项式在视觉科学领域的应用尤为突出。ROCHA M K 等人[7]通过自适应光学视觉模拟器,系统研究了不同阶次 Zernike 像差对人眼视力的影响,揭示了像差幅度与视觉质量的关系。HASHEMI H 等人[8]进一步建立了高阶像差在人群中的分布模型,并分析了其与年龄、性别等变量的相关性。KISHOR S 等人[9]利用夏克-哈特曼传感器对比了人眼适应态与非适应态的像差差异,为动态视觉矫正提供了数据支持。

1.1.3 光学系统设计与像差校正技术

在光学工程领域,Zernike 多项式被广泛应用于自由曲面、光刻系统等复杂光学元件的像差分析与校正。TANABE T 等人[10]利用 Zernike 展开式描述奇次曲面像差特性, 验证了其在非球面设计中的有效性。MATEUSZ O[11]、SCHIESSER E M[12]等人分别提出了基于 Zernike 分解的自由曲面波像差校正方法及节点像差分析工具, 为自由曲面光学设计提供了理论支持。此外,DIXON T F 等人[13]研究了光镊系统中的 Zernike 像差效应,KESHAAN S 等人[14]则利用数字微镜器件实现了多波长动态波前恢复, 展现了 Zernike 方法在跨领域应用中的灵活性。

1.1.4 交叉学科与新兴应用

近年来,Zernike 多项式的研究逐渐向多学科交叉方向拓展。例如,CHUAN H 等人[15]探讨了视觉系统中不同高阶像差项的交互作用,为虚拟现实(VR)等显示技术优化提供了参考。此外,人工智能与光学像差分析的结合[6]成为研究热点,预示着智能化像差校正技术的未来发展潜力。

1.2 国内研究进展

国内学者在 Zernike 多项式应用于光学像差领域的研究呈现出从基础理论到工程应用的完整发展脉络,主要研究进展可分为以下几个重要方向。

1.2.1 基础理论与分析方法突破

国内研究始于 20 世纪 80 年代,高必烈等人[16]开创性地采用二维哈特曼法结合 Zernike 多项式分析非球面主镜偏差,为后续研究建立了方法论基础。进入 21 世纪后,王帆[17]、杨晓飞[18]等人系统研究了 Zernike 系数与光刻机分辨率及波前误差的关联机制, 李新阳等

人[19]则建立了波像差与光束质量 β 因子的定量关系，这些工作为 Zernike 多项式在精密光学中的应用奠定了理论基础。叶红卫等人[20]进一步构建了动态像差系数与光学参数 β 的数学模型，实现了像差特性的动态表征。

1.2.2 光刻技术与精密检测创新

在半导体光刻领域，张冬青等人[21]开发了基于特定测试标记的投影物镜像差原位检测技术，可精准识别球差、像散等关键像差类型。杨济硕等人[22]提出的空间像自适应降噪方法，显著提升了波像差检测中 Zernike 系数的提取精度。诸波尔等人[23]和王茫茫等人[24]在超大数值孔径光刻机像差补偿方面取得突破，为高端光刻装备的自主研发提供了技术支持。

1.2.3 自适应光学与像差校正技术

国内在像差校正器件研发方面成果显著：蔡冬梅等人[25]系统评估了液晶空间光调制器对前 36 项 Zernike 像差的校正能力。周虹等人[26]验证了双压电片变形镜可替代传统分立式变形镜，实现了更高效的波前校正。曲贺盟等人[27]提出的动态像差校正方法，通过实时调整柱面-Zernike 元件间距，成功解决了椭球形窗口引入的像变问题。

1.2.4 新型光学系统与前沿应用拓展

2014 年后，张博[28]、诸波尔[23]、王茫茫[24]、张运强[29]、邵洪禹[30]和史宗佳[31]等人分别从自由曲面优化、超大数值孔径光刻机、次镜调整、共形整流罩、望远超分辨成像系统及大气湍流波前重构等方面，进一步拓展了 Zernike 多项式的应用领域。

根据上述描述可知，Zernike 多项式在描述像差方面的应用领域包括但不限于光学设计、眼科医学、机器学习、天文学、传感器设计、计算机视觉等。

2 Zernike 多项式用于描述像差的过程

Zernike 多项式用于描述像差的过程可以分为以下几个步骤：

1）获取波前数据：首先，需要通过测量设备如干涉仪或自适应光学系统获取光学系统的波前数据。这些设备能够精确捕捉到光学系统中波前的细微变化。

2）选择合适的 Zernike 多项式：根据光学系统的具体需求，选择适当的 Zernike 多项式来拟合波前像差。这些多项式作为一组正交完备的基函数，能够有效地表示波前像差，为后续分析提供基础。

3）计算 Zernike 系数：利用最小二乘法或其它数学方法计算出 Zernike 多项式的系数。各系数分别对应不同阶次的像差分量，是量化分析光学系统像差特性的关键参数。

4）像差分析与优化：通过对 Zernike 系数的分析，确定光学系统中存在的不同类型的像差及其程度。基于这些信息，可以对光学系统进行相应的调整，以减小或消除这些像差，提高成像质量。

5）使用软件工具进行模拟和优化：在某些情况下，可以借助光学设计软件（如 Zemax）来进行仿真和优化。例如，在 Zemax 中设置 Zernike 标准面型，并模拟实际的扫描过程，以此优化系统的像差控制。

6）迭代优化：对于复杂的应用场景，可能需要采用迭代算法不断调整光学元件的形状或参数，以实现预期的像差校正效果。例如，应用遗传算法来控制可变形镜面形，从而校正残余像差。

通过上述步骤，不仅可以更深入地理解光学系统的性能限制，还可以有效提升其成像质量和稳定性。

3 Zernike 多项式类型

3.1 标准 Zernike 多项式

在极坐标下，Zernike 多项式 $Z_n^m(\rho,\theta)$ [32]的表达式为

$$Z_n^m(\rho,\theta)=R_n^m(\rho)\times\begin{cases}\sin(m\theta), m>0\\ \cos(m\theta), m<0\\ 1, m=0\end{cases} \tag{1}$$

其中，n 表示多项式的阶数，m 表示频数（它决定了该项的旋转对称性，即在绕光轴旋转 m 倍角度后，该项的函数值保持不变），$n\geqslant m$ 且 $n-m$ 是偶数；ρ 为圆上的半径，$0\leqslant\rho\leqslant1$；θ 为角度坐标，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$。

$R_n^m(\rho)$ 为径向坐标，其表达式为

$$R_n^m(\rho)=\sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}}\frac{(-1)^k(n-k)!}{k!\left(\frac{n+m}{2}-k\right)!\left(\frac{n-m}{2}-k\right)!}\rho^{n-2k} \tag{2}$$

其中，k 为 $0\sim\frac{n-m}{2}$ 的整数。

3.2 Zernike 圆多项式

Zernike 圆多项式是 Zernike 多项式的一种特殊形式，其定义域为单位圆内区域，用于描述和重构波前畸变。当平面波通过光学系统时，波前可能发生畸变，Zernike 圆多项式可拟合这种畸变，有助于分析光学系统性能。其定义[33]如下：

$$Z_{\text{circle},n}^{|m|}(\rho,\theta)=\begin{cases}N_n^m R_{\text{circle},n}^{|m|}(\rho)\cos(m\theta), m\geqslant0, 0\leqslant\rho\leqslant1, 0\leqslant\theta\leqslant2\pi\\ -N_n^m R_{\text{circle},n}^{|m|}(\rho)\sin(m\theta), m<0, 0\leqslant\rho\leqslant1, 0\leqslant\theta\leqslant2\pi\end{cases} \tag{3}$$

其中，$R_{\text{circle},n}^{|m|}(\rho)=\sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}}\frac{(-1)^s(n-s)!\,\rho^{n-2s}}{s!\left(\frac{n+|m|}{2-s}\right)!\left(\frac{n-|m|}{2-s}\right)!}$，$N_n^m=\sqrt{\frac{2(n+1)}{1+\delta_m}}$，$\delta_m=\begin{cases}1, m=0\\0, m\neq 0\end{cases}$，$s$ 为 $0\sim\frac{n-|m|}{2}$ 的整数。

不同模式的系数代表不同像差，Zernike 多项式可将像差分解为多阶成分，常用模式为 7 阶 36 项。0~2 阶为低阶像差，可用球柱镜校正；3 阶及以上为高阶像差，无法用球柱镜校正。频数和阶数是关键参数，频数决定旋转对称性。根据式(3)，可以列出 Zernike 圆多项式与像差的对应关系如表 2 所示。

表 2 Zernike 圆多项式与像差的对应关系

项数	n	m	$Z(\rho,\theta)$	像差名称
1	0	0	1	平移
2	1	1	$2\rho\cos\theta$	x 轴倾斜
3	1	1	$2\rho\sin\theta$	y 轴倾斜
4	2	0	$\sqrt{3}(2\rho^2-1)$	离焦
5	2	2	$\sqrt{6}\rho^2\sin(2\theta)$	45°初级像散
6	2	2	$\sqrt{6}\rho^2\cos(2\theta)$	0°初级像散
7	3	1	$\sqrt{8}(3\rho^3-2\rho)\sin\theta$	y 轴初级慧差
8	3	1	$\sqrt{8}(3\rho^3-2\rho)\cos\theta$	x 轴初级慧差
9	3	3	$\sqrt{8}\rho^3\sin(3\theta)$	三叶草差
10	3	3	$\sqrt{8}\rho^3\cos(3\theta)$	三叶草差
11	4	0	$\sqrt{5}(6\rho^4-6\rho^2+1)$	初级球差
12	4	2	$\sqrt{10}(4\rho^4-3\rho^2)\cos(2\theta)$	0°二级像散
13	4	2	$\sqrt{10}(4\rho^4-3\rho^2)\sin(2\theta)$	45°二级像散
14	4	4	$\sqrt{10}\rho^4\cos(4\theta)$	四叶草差
15	4	4	$\sqrt{10}\rho^4\sin(4\theta)$	四叶草差
16	5	1	$\sqrt{12}(10\rho^5-12\rho^3+3\rho)\cos\theta$	x 轴二级慧差
17	5	1	$\sqrt{12}(10\rho^5-12\rho^3+3\rho)\sin\theta$	y 轴二级慧差
18	5	3	$\sqrt{12}(5\rho^5-4\rho^3)\cos(3\theta)$	—
19	5	3	$\sqrt{12}(5\rho^5-4\rho^3)\sin(3\theta)$	—
20	5	5	$\sqrt{12}\rho^5\cos(5\theta)$	—

3.3 Zernike 条纹多项式

Zernike 条纹多项式由 WYANT J C 推广[34]，在光学检测系统(如干涉仪和哈特曼-夏克传感器)中广泛应用，主要用于波前像差的测量、分析及条纹图展示。其主要优点是单位圆上每一项的归一化残差均方根值被归一化，便于不同项之间的比较。Zernike 条纹多项式定义如下：

$$Z_{\text{Fringe},n}^m(\rho)=R_{\text{Fringe},n}^m(\rho)\times\begin{cases}\sin(m\theta), m>0\\\cos(m\theta), m<0\\1, m=0\end{cases}\tag{4}$$

其中，

$$R_{\text{Fringe},n}^m(\rho)=\sum_{s=0}^{n-m}(-1)^s\frac{(2n-m-s)!}{s!\,(n-s)!\,(n-m-s)!}\rho^{2(n-s)-m}\tag{5}$$

表 3 为标准 Zernike 多项式、Zernike 圆多项式和 Zernike 条纹多项式的对比情况。Zernike 多项式类型多样，包括环多项式和矩等。实际应用中，有 Noll、OSA/ANSI、Fringe 和 ISO-14999 等多种索引方式，它们在排序、命名和规范化方面有所不同，但均基于 Zernike 多项式的基本形式和性质。

表 3 标准 Zernike 多项式、Zernike 圆多项式，Zernike 条纹多项式的对比

类型	特点	联系	应用场景
标准 Zernike 多项式	主要用于描述光学系统的像差，形式较为通用	Zernike 多项式的不同表达形式，用于表征波前畸变和像差	1)光学系统中的波前分析和像差校正；2)光学检测、眼科波前像差测量以及光学设计中的波前校正
Zernike 圆多项式	标准 Zernike 多项式的具体形式，应用于圆形孔径。特别适用于以极坐标表示的对称性问题	基于 Zernike 多项式提出，用于描述光学系统的波前像差	1)在圆形孔径光学系统中的波前畸变描述；2)光学系统设计中，用于分析镜头、望远镜等具有圆形孔径的系统
Zernike 条纹多项式	结合条纹干涉的特性，用于表示条纹图案的波前像差。针对条纹干涉中产生的波前畸变进行优化设计	基于 Zernike 多项式提出，但应用于条纹图案的特殊情况	1)主要用于干涉仪的波前分析，特别适用于条纹干涉仪、光学检测设备中的波前测量；2)在制作和检验光学元件时，用于评估和校正由干涉条纹反映的波前像差

4 光学像差的 Zernike 多项式描述方法

在实际应用中，光学系统的成像能力受限于一个比近轴区域更广泛的空间范围，导致理想情况下的物像共轭关系无法完美保持。这种实际光线传播路径与理想光路之间的差异，会在成像过程中引入一系列缺陷，即光学系统的像差。目前，描述光学像差的方法主要有 3 种：几何光学描述法、波动光学描述法和 Zernike 多项式描述方法。其中，Zernike 多项式的每一项基函数都代表一种具体像差，如平移、倾斜、离焦、像散、彗

差等。通过 Zernike 多项式拟合,可以容易地得出各种波像差的具体数据量,有利于进一步的数据处理。在光学设计中,Zernike 多项式也被用于描述光程差函数 $W(\sigma,\theta)$,通过使用 Zernike 多项式可以准确地描述像差,并给出了其数学表达式。这些像差会影响 PSF 的质量和横向、纵向离轴场点的位置。1942 年,NIJBOER B R A[35]将对称光学系统的像差函数扩展为 Zernike 多项式,奠定了 Nijboer-Zernike 理论的基础。随后,JANSSENA A J E M[36]将其扩展至大像差系统,提升了解析计算能力。2020 年,梁殿明等人[37]在椭球形窗口像差分析中采用 Zernike 多项式,因其与赛德尔像差项对应,可直观表征初级像差(如球差、彗差、像散等)。Zernike 多项式在不同应用中形式各异,主要用于波前像差的检测、分析和校正,通过拟合波前数据获取 Zernike 系数,评估成像质量。2024 年,李春艳等人[38]在 GRIN 色散物镜光学像差研究中,同样使用 Zernike 多项式进行分析。像差相位函数可依据 Zernike 多项式表示为

$$W(\sigma,\theta)=\sum_{i=1}^{N} c_i Z_i(\sigma,\theta) \tag{6}$$

其中,$Z_i(\sigma,\theta)$是多项式的第 i 项,σ 为出瞳的归一化半径,c_i为 Zernike 多项式的展开系数。因此,c_i 可以表示为

$$c_i=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} W(\sigma,\theta)Z_i(\sigma,\theta)\sigma\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\theta \tag{7}$$

采用 Zernike 多项式进行波前重构可实现对光学像差的完整描述,该方法具有峰值定位误差小、旁瓣抑制能力强的优势。此外,Zernike 多项式还可用于计算光学系统的 PSF,评估成像质量。PSF 描述了光学系统对点光源的成像响应。2023 年,柳少扬等人[39]在分析球差对超振荡望远系统 PSF 的影响时,提出用 Zernike 多项式表示球差,如式(8)所示。

$$W_{nm}(r,\theta)=\sqrt{\frac{2(n+1)}{1+\delta_{m0}}}R_n^m(r)[c_{nm}\cos(m\theta)+s_{nm}\sin(m\theta)] \tag{8}$$

其中,$\delta_{m0}=\begin{cases}1, m=0\\0,\text{其它}\end{cases}$,$R_n^m(r)=\sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}}\frac{(-1)^s(n-s)!}{s!\left(\frac{n+m}{2}-s\right)!\left(\frac{n-m}{2-s}\right)}\times r^{n-2s}$,$r$ 表示相位面上的归一化极坐标,c_{nm}、s_{nm}是像差系数。对于初级球差,由于 m 为 0,此时 Zernike 多项式 $W_{nm}(r,\theta)$与角度坐标 θ 无关,初级球差带来的相位变化是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kW_{nm}(r)}$。则球差影响下超振荡望远系统强度 PSF

$$I(r_2)=\left(\frac{2\pi}{\lambda f}\right)^2\left|\int_0^R u(r_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kW_{nm}(r_1)}\mathrm{J}_0\left(\frac{2\pi r_1 r_2}{\lambda f}\right)r_1\mathrm{d}r_1\right|^2 \tag{9}$$

其中,$u(r_1)$是平面波经过超震荡器件后的复振幅,$\mathrm{J}_0(\cdot)$是零阶 Bessel 函数,r_1、r_2分别表示出瞳面极坐标和焦面极坐标,λ 为工作波长,f 为透镜焦距,R 为透镜半径。

通过对比含有球差和无球差的 PSF,可评估球差对超振荡望远系统的影响,并优化光学系统成像质量。尽管 Zernike 多项式在描述像差方面有优势,但在空气扰动较大时可能存在局限性。

在自适应光学中,Noll 改进的 Zernike 多项式用于统计分析大气湍流引起的波前像差[40],实时校正波前畸变[41]。Zernike 多项式可以作为波前重构的基础集,用于诸如 Shack-Hartmann 波前倾斜传感器等波前感测工具中,这些工具在自适应光学和眼科光学中非常重要。此外,Zernike 多项式被用来表示各类像差,并且是自适应光学领域中常用的表示方法之一。例如,柯熙政团队[42-43]总结了自适应光学中的模式法,介绍了 Zernike 多项式的定义及波前畸变校正原理;通过计算光场自适应光学技术探测并重构波前畸变,利用 Zernike 多项式展开完整的波前,即

$$\varphi(\xi,\eta)=\sum_{k=0}^{l} a_k Z_k(\xi,\eta) \tag{10}$$

其中,l 为模式数,a_k 为第项 Zernike 多项式系数,$Z_k(\xi,\eta)$为第 k 项 Zernike 多项式。

对式(10)求偏导数可得波前斜率与 Zernike 系数的关系。在数值仿真研究中,利用 Zernike 多项式模拟输入待测像差,得到远场光斑阵列,再对远场光斑阵列进行斜率估计,从而进行重构波前。同年,杨珂[44]将计算光场成像应用到自适应光学波前传感领域,通过获取的光场数据可以解算出波前畸变信息;根据计算光场成像波前传感原理建立了波前复原仿真系统,前 15 项 Zernike 像差的波前相位分布经计算光场成像波前传感技术复原后,残余波前相位分布的波前残差均方根(RMS)值均小于 0.03λ,表明该技术对单项 Zernike 像差的复原精度较高,能够有效复原单项 Zernike 像差。

5 结束语

本文概述了 Zernike 多项式在描述像差方面的研究进展,展示了其在不同时间点、领域和方法中的广泛应用。文中对 Zernike 多项式的类型进行了分类,详

细介绍了它们的定义及其与像差的关系。Zernike 多项式在光学领域的应用已取得显著成果,并展现出独特的优势。展望未来,Zernike 多项式研究将朝以下几个方向发展:

1)高精度测量与校准:随着光学系统的复杂性不断增加,需要开发更高效且准确的 Zernike 多项式分解和拟合方法,以满足复杂系统的需求。结合自适应光学技术,可以更好地应对天文观测领域中环境因素带来的挑战。

2)跨领域应用:Zernike 多项式正在逐渐扩展到激光技术、眼科医学、天文学等多个领域,并与人工智能、大数据等新兴技术相结合,形成更加智能化和高效的像差描述和分析方法。例如,通过机器学习算法优化 Zernike 系数,可显著提高成像质量。

3)理论研究的深入:随着光学系统复杂性的增加以及需求的提升,有必要对高阶 Zernike 多项式进行更深入的研究,以便应对未来的挑战。这不仅有助于进一步理解光学系统中的高级像差现象,也为设计更为先进的光学系统提供了理论基础。

参考文献:

[1] ZERNIKE F. Beugungstheorie des Schneidenver-fahrens und seiner verbessertenForm, der Phasenkontrastme thode[J]. Physica, 1934, 1(8): 689–704.

[2] BHATIA A B, WOLF E. On the circle polynomials of Zernike and related orthogonal sets[J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1954, 50(1): 40–48.

[3] BOOTH M J. Direct measurement of Zernike aberration modes with a modal wavefrontsensor[J]. The International Society for Optical Engineering, 2003, 41(6): 79–90.

[4] SANCHEZ-ESCOBAR J J, ALONSO-MAGANA P H J, VAZUUE-MONTIEL S. Obtaining the wavefront aberrations of a real interferogram by use of a hybrid genetic algorithm[J]. Optical Engineering, 2006, 45(10): 105605-1–105605-7.

[5] SUNDUS Y H, S A S. Study of Zernike polynomials of an elliptical aperture obscured with an elliptical obscuration[J]. Applied Optics, 2012, 51(35): 8490–8497.

[6] KHORIN P A. Neural networks application to determine the types and magnitude of aberrations from the pattern of the point spread function out of the focal plane[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2021, 2086(1): 1–6.

[7] ROCHA M K, VABRE L, KHOA N J, et al. Effects of Zernike wavefront aberrations on visual acuity measured using electromagnetic adaptive optics technology[J]. Investigative Ophthalmology & Visual Science, 2007, 48 (13): 2782–2782.

[8] HASHEMI H, KHABAZKHOOB M, JAFARZADEHPUR E, et al. Higher order aberrations in a normal adult population[J]. Journal of Current Ophthalmology, 2015, 27(3-4): 115–124.

[9] KISHOR S, JESSICA G, SANDRA F. Effect of accommodation on peripheral higher order aberrations[J]. Photonics, 2022, 9(2): 64–64.

[10] TANABE T, SHIBUYA M, MAEHARA K. Convergence and differentiation of Zernike expansion: application for an analysis of odd-order surfaces[J]. Optical Engineering, 2016, 55(3): 035101–035101.

[11] MATEUSZ O, HERBERT G. Analysis of freeform mirror systems based on the decomposition of the total wave aberration into Zernike surface contributions[J]. Applied optics, 2018, 57(9): 1998–2006.

[12] SCHIESSER M, BAUER A, ROLLAND J P. Estimating field-dependent nodal aberration theory coefficients from Zernike full-field displays by utilizing eighth-order astigmatism[J]. Journal of the Optical Society of America A, Optics, Image Science, and vision, 2019, 36(12): 2115–2128.

[13] DIXON T F, RUSSELL L W, ANDRES-ARROYO A, et al. Using back focal plane interferometry to probe the influence of Zernike aberrations in optical tweezers[J]. Optics Letters, 2017, 42(15): 2968–2971.

[14] KESHAAN S, ANGELA D, ANDREW F. Versatile all-digital transport-of-intensity based wavefront sensor and adaptive optics using a DMD[J]. Optics Express, 2023, 31(5): 8987–8997.

[15] CHUAN H, AYESWARYA R, D G H, et al. Visual interaction of 2nd to 5th order Zernike aberration terms with vertical coma[J]. Ophthalmic Physiological Optics, 2020, 40(5): 669–679.

[16] 高必烈,李德培,潘君骅. φ2.16 米非球面主镜的二维哈特曼检验[J]. 光学学报,1985,5(10):916–925.

[17] 王帆,王向朝,马明英,等. 光刻机投影物镜像差的现场测量技术[J]. 激光与光电子学进展,2004,41(6):33–37.

[18] 杨晓飞,张晓辉,韩昌元.用像差逐项优化法装调离轴三反射镜光学系统[J]. 光学学报,2004,24(1):115–120.

[19] 李新阳,鲜浩,王春鸿,等. 波像差与光束质量 β 因子的关系[J]. 中国激光,2005,32(6):798–802.

[20] 叶红卫,李新阳,鲜浩,等. 光学系统的 Zernike 像差与光束质量 β 因子的关系[J]. 中国激光,2009,36(6):1420–1427.

[21] 张冬青,王向朝,施伟杰,等. 光刻机投影物镜的像差原位检测新技术[J]. 光学学报,2006,26(5):679–684.

[22] 杨济硕,李思坤,王向朝,等. 基于空间像自适应降噪的投影物镜波像差检测方法[J]. 光学学报,2013,33(1):75–83.

[23] 诸波尔,王向朝,李思坤,等. 超大数值孔径光刻机投影物镜波像差检测方法[J]. 光学学报,2016,36(1):137–147.

[24] 王茫茫,刘兆军,李博. 空间相机次镜在轨校正仿真分析[J]. 航天返回与遥感,2018,39(2):73–83.

[25] 蔡冬梅,凌宁,姜文汉. 纯相位液晶空间光调制器拟合 Zernike 像差性能分析[J]. 物理学报,2008,57(2):897–903.

[26] 周虹,宁禹,官春林,等. 双压电片变形反射镜样镜的设计与研制[J]. 光学学报,2009,29(6):1437–1442.

[27] 曲贺盟,张新,王灵杰. 基于轴向移动柱面 -Zernike 校正元件的动态像差校正技术[J]. 红外与激光工程,2012,41(5):1294–1299.

[28] 张博,王凌,常伟军,等. 头盔显示器自由曲面光学组件的优化设计[J]. 应用光学,2014,35(2):193–197.

[29] 张运强,常军,潘国庆. 二次曲面共形整流罩像差影响因素分析[J]. 应用光学,2019,40(6):965–972.

[30] 邵洪禹,李英超,王超,等. 超分辨望远光学系统像差影响及优化设

计[J]. 中国光学，2020，13(1)：106–120.

[31] 史宗佳，向振佼，杜应磊，等. 基于远场信息和卷积神经网络的波前重构方法[J]. 强激光与粒子束，2021，33(8)：128–133.

[32] 李远洋，刘立生，王挺峰，等. 应用 Collins 公式和像差的 Zernike 展开分析激光光束在实际光学系统传输特性[J]. 红外与激光工程，2015，44(3)：857–862.

[33] 靳程，孔令杰. 双光子荧光显微系统中波前像差对三维点扩散函数的影响[J]. 物理实验，2021，41(10)：23–28.

[34] NIU K, TIAN C. Zernike polynomials and their applications[J]. Journal of Optics, 2022, 24(12): 1–54.

[35] NIJBOER B R A. The diffraction theory of aberrations[J]. University of Groningen Press, 1942, 7(25): 103–107.

[36] JANSSEN A J E M. Extended Nijboer-Zernike approach for the computation of optical point-spread functions[J]. Journal of the Optical Society of America A, 2002, 19(5): 849–857.

[37] 梁殿明，王超，史浩东，等. 基于 Zernike 模型系数优化的椭球型窗口光学系统像差校正[J]. 物理学报，2020，69(24)：153–160.

[38] 李春艳，李丹琳，刘继红，等. GRIN 色散物镜光学像差对峰值波长提取的影响[J]. 光子学报，2024，53(3)：107–120.

[39] 柳少扬，杜文娟，焦蛟，等. 超振荡望远成像系统中球差影响分析[J]. 光电工程，2023，50(8)：120–132.

[40] ROBERT J N. Zernike polynomials and atmospheric turbulence[J]. Journal of the Optical Society of America, 1976, 3(66): 207–211.

[41] 徐晨露，郝士琦，王勇，等. 基于模式互信息的大气湍流畸变波前重构[J]. 空军工程大学学报(自然科学版)，2020，21(2)：65–70.

[42] 梁静远，林水清，韩美苗，等. 自适应光学中的模式法[J]. 现代应用物理，2023，14(2)：21–36.

[43] 柯熙政，杨珂，张颖. CAPIS 技术探测波前畸变的实验研究[J]. 激光与光电子学进展，2019，56(12)：30–37.

[44] 杨珂. 计算光场成像波前传感技术研究 [D]. 西安：西安理工大学，2019.