

文章编号: 2095-4980(2023)01-0102-10

新型任意阶分抗逼近电路及新型标度方程

张月荣, 袁 晓*

(四川大学 电子信息学院, 四川 成都 610064)

摘 要: 介绍并研究一类具有物理可实现性的描述分数算子有理迭代过程的非正则标度方程, 提出几种新型分抗逼近电路, 并用广义非正则标度方程描述。推广出基于未知参量 m, n 的一类非正则标度方程, 并研究其描述的分数算子有理迭代过程的特性。置换已知分抗逼近电路中元件位置获得 4 种新的分抗逼近电路, 并用相应的广义非正则标度方程描述。研究表明, 广义非正则标度方程具有不同的近似解。最后, 介绍广义非正则标度方程描述的阻抗函数代数迭代过程的优化方法, 基于新型分抗逼近电路, 提出几种具有高运算恒定性的任意阶标度分形分抗逼近电路设计方案。设计分数阶微电路仿真实验, 验证新型分抗逼近电路的运算性能。

关键词: 分数微积分; 分数算子; 广义非正则标度方程; 优化; 运算恒定性

中图分类号: TN701

文献标志码: A

doi: 10.11805/TKYDA2020460

New arbitrary order fractance approximation circuits and new scaling equations

ZHANG Yuerong, YUAN Xiao*

(College of Electronic and Information Engineering, Sichuan University, Chengdu Sichuan 610064, China)

Abstract: A kind of irregular scaling equations with physical feasibility is introduced and studied to describe the rational iterative process of fractional-order operators. Several new Frantance Approximation Circuits(FACs) are put forward and described by generalized irregular scaling equations. A class of irregular scaling equations based on the unknown parameters m, n is extended, and the characteristics of the rational iterative processes of the fractional order operators described by this type of equation are studied. Four new FACs are obtained by replacing the position of the components of the known FACs, and described by the corresponding generalized irregular scaling equations. Research shows that generalized irregular scaling equations have different approach solutions. Finally, the optimization methods for the algebraic iterative processes of impedance functions described by generalized irregular scaling equations are introduced. Based on the new FACs, several design schemes of arbitrary-order scaling fractal FACs with high operational constancy are proposed. A simulation experiment of fractional-order differential circuit is designed to verify the operational performance of the new FACs.

Keywords: fractional calculus; fractional operator; generalized irregular scaling equation; optimization; operational constancy

许多自然现象及过程并非整数维度纯线性的, 更广泛和更现实的是分数维度的。分数阶微积分理论与应用在分数阶混沌系统^[1]、神经网络^[2-3]、遗传结构^[4-5]、图像处理等众多领域中引起人们的广泛关注。由于具有长记忆性、非定域性和弱奇异性等特点, 分数阶微积分更能准确刻画大多数非整数维^[6]物理现象及过程。分数阶电路与系统用于许多复杂的分数阶现象及过程的建模, 并可用于分数阶混沌模型及分数阶信号处理等新问题的研究。

分数阶元件可用于构建具有分数阶微积分运算功能的电路与系统—分数阶电路与系统^[7]。最简单的具有 2 根引出端线的分数阶元件称为分抗元, 早期的分抗元也被称为恒相元^[8]。理想的分抗元是不存在的, 工程上实现分抗元的常用方法是借助有限无源整数阶元件(电阻、电容、电感)构建一个无源二端电路网络, 该网络在特定频段内具有分抗元的运算性能^[9-10], 此类无源二端网络被称为分抗逼近电路^[11]。许多经典的分抗逼近电路都具有半阶

收稿日期: 2020-09-14; 修回日期: 2020-11-14

*通信作者: 袁 晓 email:chuandazyr@126.com

积分算子的运算功能，例如 Oldham RC 分形链分抗逼近电路、Haba 分形线分抗逼近电路、Nakagawa-Sorimachi 分形树分抗逼近电路等。标度拓展^[12]这些负半阶分抗逼近电路，可获得具有任意实数阶微积分算子运算功能的分抗逼近电路。这些电路的阻抗函数代数迭代方程都是非正则标度方程^[13]，这些非正则标度方程蕴含了电路的迭代结构及运算性能等特性。

本文对比描述三类任意阶标度分形分抗的非正则标度方程的代数结构形式，推广出一类非正则标度方程，并分析其描述的有理迭代过程是否满足分抗的阻抗函数序列构造条件^[14-15]。通过置换元件位置构造新型分抗，获得两类新型分形塔结构和两类新型分形树结构的分抗逼近电路，并分别用广义非正则标度方程描述。研究发现广义非正则标度方程的近似求解结果不同于以往非正则标度方程的 Liu 氏近似解结果，数值仿真分析新型结构电路的运算有效性。结合任意阶标度分形分抗的优化原理，探讨基于未知参数 m, n 的非正则标度方程描述的阻抗函数有理迭代过程的优化方法^[16]，以及新型任意阶分抗逼近电路优化方法。频域运算振荡现象必然影响分抗逼近电路的实际应用，使用 4 种新型结构的分抗逼近电路与原标度分形塔分抗及标度分形树分抗，设计具有高运算恒定性^[17]的任意阶标度分形分抗逼近电路。

1 基于未知参量 m, n 的非正则标度方程及广义非正则标度方程

1.1 三类分抗逼近电路的统一数学描述

经典的 Carlson 分形格分抗逼近电路具有半阶积分算子 $s^{-1/2}$ 的运算性能，该电路的原理图及等效迭代电路如图 1(a),(b)所示。

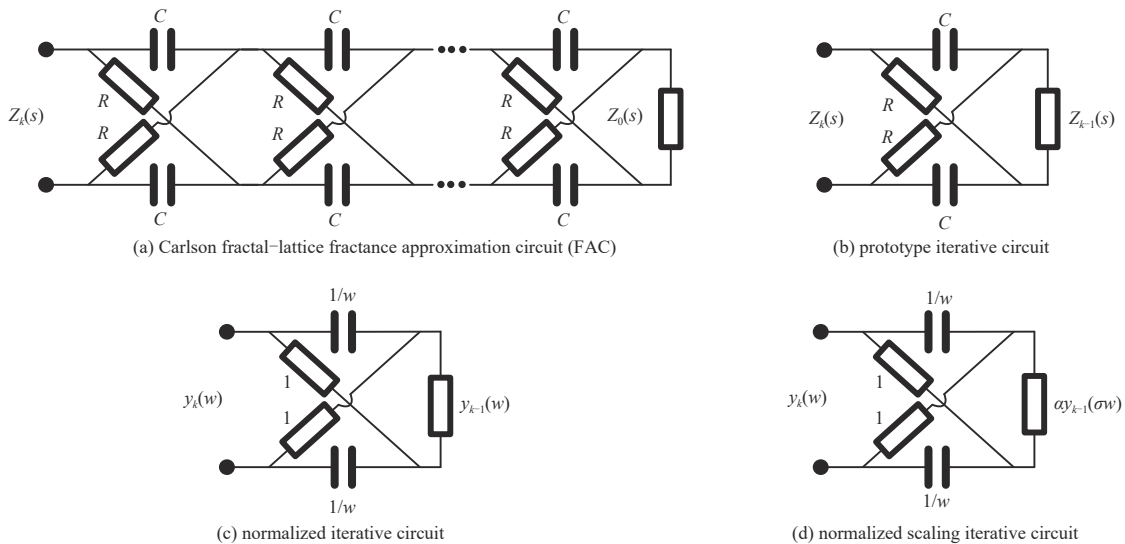


Fig.1 Prototype Carlson fractal-lattice FAC and iterative circuit; normalized iterative circuit and normalized scaling iterative circuit
图 1 Carlson 分形格分抗原型电路及其迭代电路;归一化迭代电路及归一化标度迭代电路

图 1(a)中 R 表示电阻的阻值， C 表示电容的容值。 k 为电路的节数(也称迭代次数)， $Z_k(s)$ 表示该电路的阻抗函数。为简化分析该分抗逼近电路的运算特征曲线，往往进行归一化处理。取归一化复频率变量 $w = \tau s$ ，特征时间常数 $\tau = RC$ ，得到 Carlson 分形格分抗的等效归一化迭代电路(图 1(c))。标度拓展是实现任意阶分抗逼近电路的有效方法，很多经典的负半阶分抗逼近电路标度拓展后^[13]，可以获得任意阶标度分形分抗逼近电路。结合标度拓展理论，可获得任意实数阶标度分形格分抗逼近电路^[10]。取电阻递进比 α ，电容递进比 β ，标度因子 $\sigma = \alpha\beta$ 。根据标度特征参量的取值范围，标度拓展按照 α, β, σ 的取值，可分为正比标度拓展($1 < \alpha, \beta, \sigma < \infty$)和反比标度拓展($0 < \alpha, \beta, \sigma < 1$)。由标度分形格分抗逼近电路的归一化迭代电路(图 1(d))，可得到其阻抗函数的代数迭代方程为：

$$y(w) = \frac{2 + (1+w)\alpha y(\sigma w)}{1 + w + 2w\alpha y(\sigma w)} \quad (1)$$

该方程为非正则标度方程，解析求解该方程目前还存在困难。考虑正比标度拓展时，在甚低频条件 $0 \leftarrow |w| \ll 1$ 下，整个电路呈现出电容特性。在甚高频条件 $1 \ll |w| \rightarrow \infty$ 下，整个电路呈现电阻特性。只有当频率满足条件 $0 \leftarrow w_{k-1} < |w| \ll 1$ 时，方程(1)可简化为正则标度方程：

$$y(w) \approx \frac{2 + \alpha y(\sigma w)}{1 + 2w\alpha y(\sigma w)} \approx \alpha y(\sigma w) \tag{2}$$

并有 Liu 氏近似解析解：

$$y(w) \approx \zeta w^{\mu_{Liu}}, \mu_{Liu} = -\frac{\lg \alpha}{\lg \sigma} \tag{3}$$

近似解结果表明标度分形格分抗具有任意 Liu 氏运算阶，反比拓展时甚高频条件下具有相同的近似解。同理，具有任意 Liu 氏运算阶的 B 型标度分形塔分抗^[18]及 2h 型标度分形树分抗^[11]的归一化迭代电路如图 2 所示。对应的非正则标度方程如式(4)、式(5)。

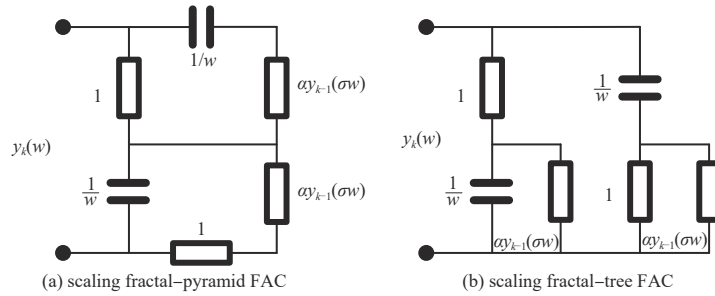


Fig. 2 Arbitrary order scaling fractal Fractance Approximation Circuits(FACs) and normalized iterative circuits
图2 任意阶标度分形分抗逼近电路的归一化迭代电路

$$y(w) = \frac{2 + (1 + w)\alpha y(\sigma w)}{1 + w + w\alpha y(\sigma w)} \tag{4}$$

$$y(w) = \frac{1 + (1 + w)\alpha y(\sigma w)}{1 + w + 2w\alpha y(\sigma w)} \tag{5}$$

对比非正则标度方程(1)、(4)、(5)，可知描述标度分形格分抗、标度分形塔分抗、标度分形树分抗的非正则标度方程具有类似的代数形式。若引入 2 个未知参数 m, n ，可将 3 个非正则标度方程归类为统一形式：

$$y(w) = \frac{m + (1 + w)\alpha y(\sigma w)}{1 + w + n w \alpha y(\sigma w)} \tag{6}$$

当 $m=n=2$ 时，方程(6)为描述标度分形格分抗的非正则标度方程。当 $m=2, n=1$ 时，方程(6)表示 B 型标度分形塔分抗的非正则标度方程。当 $m=1, n=2$ 时，方程(6)表示 2h 型标度分形树分抗的非正则标度方程。

1.2 非正则标度方程的参数条件及其运算有效性

方程(6)中归一化运算变量 w 只存在有理运算，满足计算有理性。当 m, n 取不同值时可以得到不同的非正则标度方程，对应不同结构形式的任意阶分抗逼近电路。非正则标度方程(6)标度拓展前的代数形式为：

$$y(w) = \frac{m + (1 + w)y(w)}{1 + w + n w y(w)} \tag{7}$$

该方程的解析解为：

$$y(w) = \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot w^{-\frac{1}{2}} \tag{8}$$

因此，未知参数 m, n 取值必须同号，且标度拓展前同样具有半阶积分算子运算功能。当 $m=2, n=-1$ 时，选择初始迭代阻抗 $y_0(w) = \infty$ ，正比拓展后数值分析的不同运算阶下零极点分布如图 3 所示。

数值仿真表明，当 m, n 的取值异号时，标度拓展后的阻抗函数部分零极点分布在 w 平面的右半平面，不满足无源电路网络综合理论中正实性原理的构造条件。当 $m=n=\pi$ ，初始阻抗 $y_0(w) = \infty$ 时，正比拓展数值求解的运算特征曲线如图 4 所示。

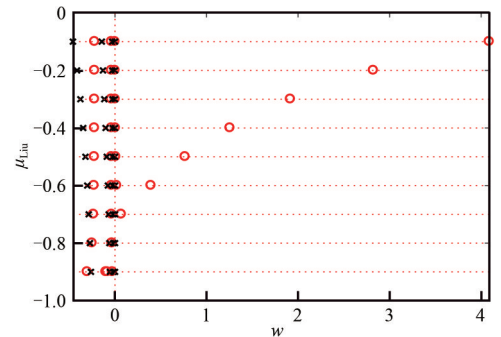


Fig.3 Zero-pole distribution when $m=2, n=-1$ in direct proportion extension ($k=4, \sigma=5$)
图3 正比拓展 $m=2, n=-1$ 时的零极点分布图 ($k=4, \sigma=5$)

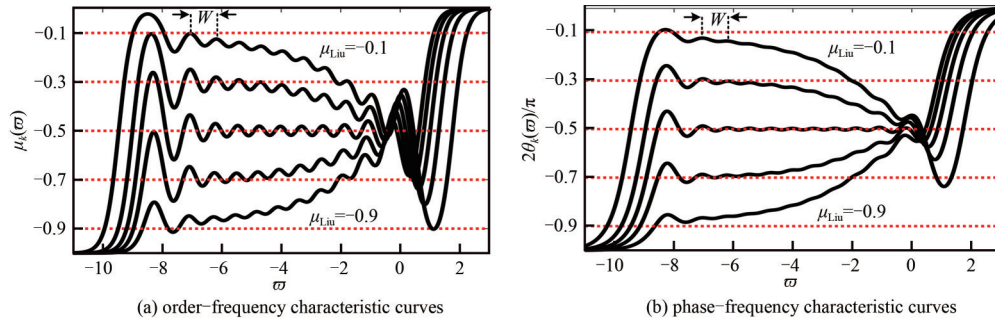


Fig.4 Operational characteristic curves when $m=n=\pi$ in direct proportion extension ($k=12, \sigma=5$)
图 4 $m=n=\pi$ 时正比拓展运算特征曲线 ($k=12, \sigma=5$)

由此可知，从阻抗函数构造的基本数学要求的角度分析， m, n 的取值不仅限于整数。只需满足条件：

$$m \cdot n > 0, m, n \in \mathbb{R} \tag{9}$$

方程(6)描述的分数算子有理迭代过程都是有效的，且同样存在运算振荡现象，运算振荡周期 $W = |\lg \sigma|$ 。

1.3 新型分形分抗逼近电路与广义非正则标度方程

考虑任意阶 B 型标度分形塔分抗逼近电路与 2h 型标度分形树分抗逼近电路(见图 2)，交换原电路中的一个电阻和一个电容的位置，可分别得到 2 种新形分形塔结构和新型分形树结构的电路(见图 5)。

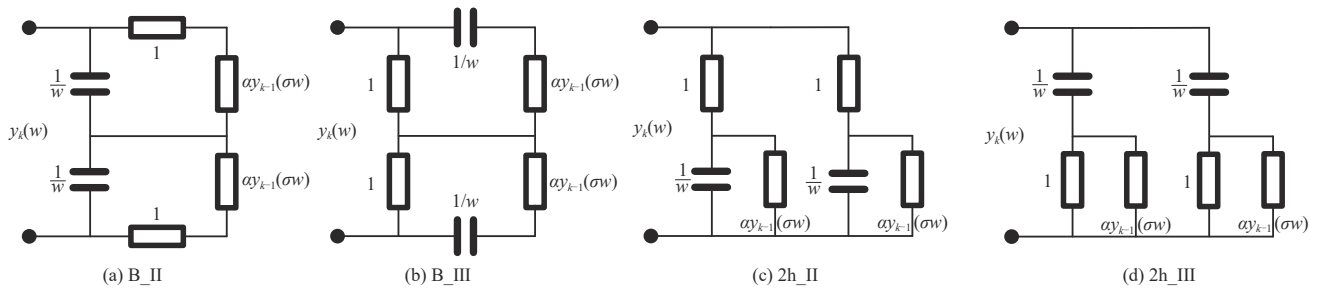


Fig.5 Normalized iterative circuits of novel fractal fractance approximation circuits
图 5 新型分形分抗的归一化迭代电路

分析可知标度拓展前，新型电路无分数阶微积算子运算功能。标度拓展后，由归一化迭代电路可得描述 4 种新型电路的广义非正则标度方程为：

$$y_{B_II}(w) = \frac{2(1 + \alpha y_{B_II}(\sigma w))}{1 + w + w \alpha y_{B_II}(\sigma w)} \tag{10}$$

$$y_{B_III}(w) = \frac{2(1 + w \alpha y_{B_III}(\sigma w))}{1 + w + w \alpha y_{B_III}(\sigma w)} \tag{11}$$

$$y_{2h_II}(w) = \frac{1 + (1 + w) \alpha y_{2h_II}(\sigma w)}{2(1 + w \alpha y_{2h_II}(\sigma w))} \tag{12}$$

$$y_{2h_III}(w) = \frac{1 + (1 + w) \alpha y_{2h_III}(\sigma w)}{2(w + w \alpha y_{2h_III}(\sigma w))} \tag{13}$$

1.4 近似求解与数值求解——运算有效性

正比拓展时，在甚低频条件 $0 \leftarrow |w| \ll 1$ 下，广义非正则标度方程(11)可化简为广义正则标度方程：

$$y(w) \approx 2(1 + \alpha y(\sigma w)) \approx 2\alpha y(\sigma w) \tag{14}$$

并有近似解：

$$y(w) \approx \rho w^\mu, \quad \mu = -\frac{\lg 2\alpha}{\lg \sigma} \tag{15}$$

反比拓展时，无法获得方程(15)的近似解。方程(12)在正比拓展时同样无法获得方程(15)的近似解，但反比拓展时，在甚高频条件 $1 \ll |w| \rightarrow \infty$ 下，同样可简化为广义正则标度方程(14)并有同样的近似解。近似方程(15)的解表明，广义非正则标度方程(10)、(11)不同于描述经典分形分抗的非正则标度方程，该类方程近似解具有全新的运算阶：

$$\mu = -\frac{\lg \alpha}{\lg \sigma} - \frac{\lg 2}{\lg \sigma} = \mu_{Liu} - \frac{\lg 2}{\lg \sigma} \tag{16}$$

另外，也可从电路的角度近似求解非正则标度方程。考虑正比拓展时，在极限频率条件 $0 \leftarrow |w| \ll 1$ 下，图 5(c) 电路中的电容容抗 $1/w \rightarrow \infty$ ，电容可近似为开路状态。此时 2h_II 型标度分形树分抗的归一化迭代电路可近似为如图 6(a) 的形式。反比拓展时，在极限频率条件 $1 \ll |w| \rightarrow \infty$ 下，图 5(d) 电路中的电容容抗 $1/w \rightarrow 0$ ，电容可近似做短路处理。此时 2h_III 型标度分形树分抗的归一化迭代电路可近似为如图 6(b) 的形式。

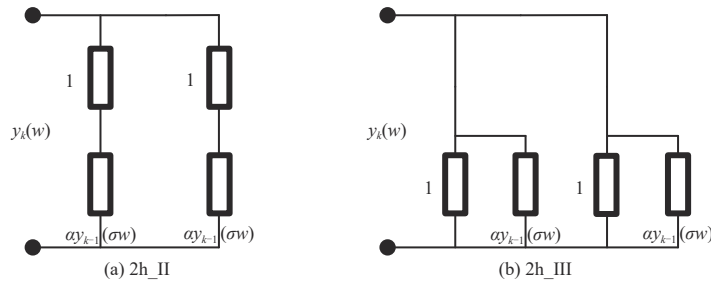


Fig.6 Simplified circuit diagrams of novel scaling fractal-tree FAC under extreme frequency conditions
图 6 极限频率条件下新型标度分形树分抗简化电路图

根据简化的归一化迭代电路图，广义非正则标度方程(12)、(13)可简化为广义正则标度方程：

$$y(w) = \frac{1}{2} \alpha y(\sigma w) \tag{17}$$

并有近似解：

$$y(w) \approx \rho w^\mu, \quad \mu = -\frac{\lg \frac{\alpha}{2}}{\lg \sigma} \tag{18}$$

近似解结果表明，新型 2h_II 型和 2h_III 型标度分形树分抗分别在正比拓展和反比拓展条件下具有任意实数阶运算性能。同理，描述 2 种新型分形树分抗电路的广义非正则标度方程(12)、(13)不同于描述经典标度分形分抗的非正则标度方程。新型结构的电路具有不同的运算阶：

$$\mu = -\frac{\lg \alpha}{\lg \sigma} + \frac{\lg 2}{\lg \sigma} = \mu_{Liu} + \frac{\lg 2}{\lg \sigma} \tag{19}$$

数值求解可验证非正则标度方程近似求解的正确性，且便于直观分析分抗逼近电路的运算性能。当初始阻抗 $y_0(w) = 1$ 时，根据迭代算法公式求解阻抗函数 $y_k(w)$ 的数值解，该数值解必定为非正则标度方程的一个真实解。不同标度拓展情形下，数值仿真的 B_II 型分抗与 B_III 型分抗的运算特征曲线如图 7 和图 8 所示。

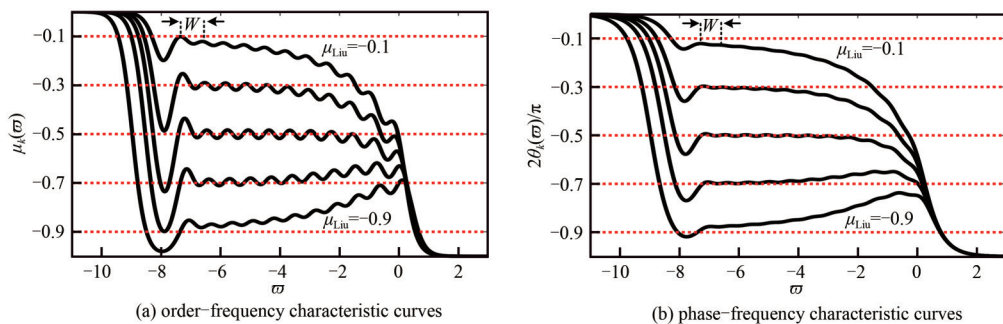


Fig.7 Operational characteristic curves of B_II fractal-pyramid FAC in direct proportion extension ($k=12, \sigma=5$)
图 7 正比拓展 B_II 分形塔分抗运算特征曲线 ($k=12, \sigma=5$)

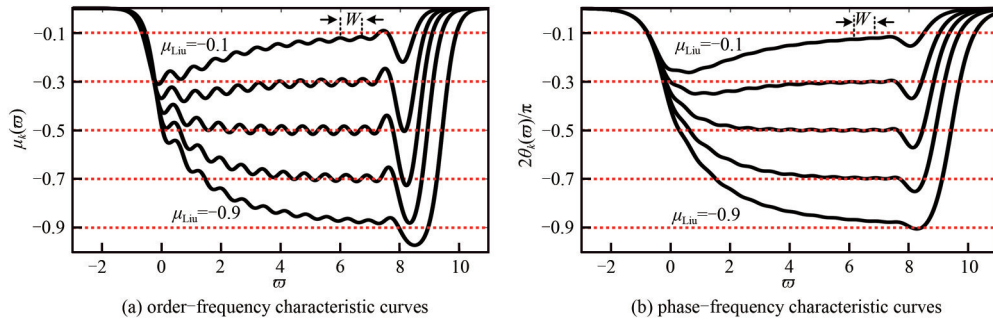


Fig.8 Operational characteristic curves of B_III fractal-pyramid FAC in inverse proportion extension($k=12, \sigma=1/5$)
图 8 反比拓展 B_III 分形塔分抗运算特征曲线($k=12, \sigma=1/5$)

数值仿真结果表明，2 种新型标度分形树分抗与新型标度分形塔分抗具有类似的频域曲线形状。正比拓展时，B_II 型分抗与 2h_II 型分抗在高频段具有任意阶分数算子运算性能。反比拓展时，B_III 型分抗与 2h_III 型分抗在低频段同样具有任意阶分数算子运算性，且都具有相同的运算振荡周期 W 。

2 逼近性能的优化与高运算恒定性分抗逼近电路设计

2.1 频域逼近性能的优化

基于未知参数 m, n 的非正则标度方程描述了任意实数阶微积分算子的运算性能，但只有 $m=n=2, m=1, n=2, m=2, n=1$ 三种取值情形下对应的具体电路结构是已知的。由运算特征曲线可知，该非正则标度方程描述的有理迭代过程在频域的分数算子逼近效果不甚理想，电路优化可以有效改善频域的逼近效果。假设该非正则标度方程对应的二端电路网络已知，使用电阻、电容等基本电路元件便可对该电路进行优化。由运算特征曲线的形状特点及分抗逼近电路优化原理，选用对称阻容 T 型节，电路优化的原理示意图如图 9 所示。

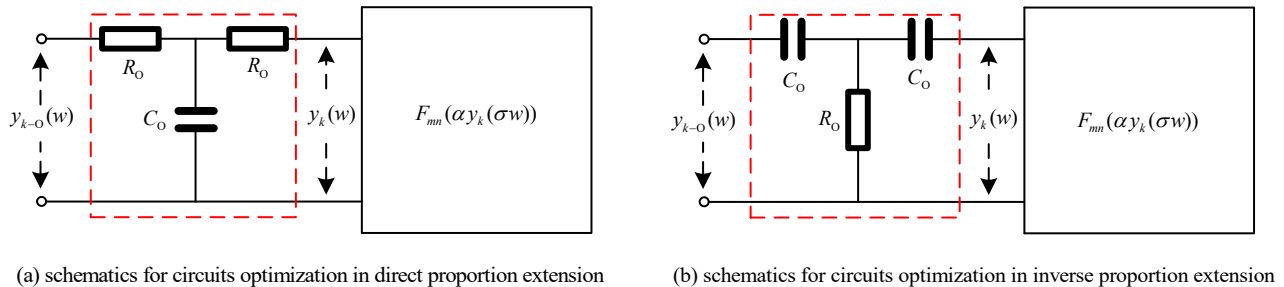


Fig.9 Schematic diagram for circuit optimization of irregular scaling equation based on parameters m, n
图 9 基于参数 m, n 的非正则标度方程电路优化原理图

优化结构中的电路元件取值与未知参数 m, n 及标度特征参量 α, β, σ 有关。理想情况下电路可以存在无穷节，考虑无穷个电阻串联的总阻抗为 $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i$ ，无穷个电容并联的总容抗为 $1/(\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i w)$ 。从电路补偿的角度思考并由数值计算验证，可得到正比拓展时的电路优化参数为：

$$R_o = \frac{m}{2} \sum_{i=-\infty}^{-1} \alpha^i = \frac{m}{2(\alpha-1)}, \quad C_o = \frac{1}{n} \sum_{i=-\infty}^{-1} \beta^i w = \frac{\beta-1}{nw} \quad (20)$$

反比拓展时电路优化元件的取值为：

$$C_o = \frac{m}{2} \sum_{i=-\infty}^{-1} \frac{1}{\beta^i w} = \frac{m\beta}{2(1-\beta)w}, \quad R_o = \frac{1}{n} \sum_{i=-\infty}^{-1} \frac{1}{\alpha^i} = \frac{1-\alpha}{n\alpha} \quad (21)$$

当 $m=\pi, n=\pi$ ，初始阻抗 $y_0(w) = \infty$ 时，不同标度拓展下优化前后的阶频特征曲线对比如图 10 所示。其中黑色曲线表示优化前的运算特征曲线，红色曲线为优化后的运算特征曲线。

同理，任意阶 B_II 型标度分形塔分抗与 2h_II 型标度分形树分抗的电路优化原理图如图 9(a)。新型任意阶 B_III 型标度分形塔分抗及 2h_III 型标度分形树分抗的电路优化原理图如图 9(b) 所示，优化参数取值分别为式(22)~(25)。

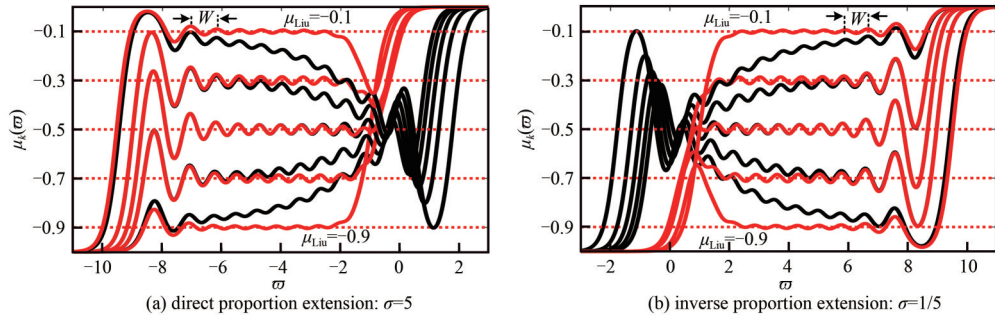


Fig.10 Comparison of order-frequency characteristic curves before and after optimization of irregular scaling equation based on the parameters m, n ($m = \pi, n = \pi, k = 12, y_0(w) = \infty$)

图 10 基于参数 m, n 的非正则标度方程优化前后阶频特征曲线对比图 ($m = \pi, n = \pi, k = 12, y_0(w) = \infty$)

$$R_o = \sum_{i=-\infty}^{-1} (2\alpha)^i = \frac{1}{2\alpha-1}, C_o = 2 \frac{1}{\sum_{i=-\infty}^{-1} \left(\frac{\beta}{2}\right)^i w} = \frac{\beta-2}{w} \quad (22)$$

$$R_o = \frac{1}{4} \sum_{i=-\infty}^{-1} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^i = \frac{1}{2\alpha-4}, C_o = \frac{1}{2} \frac{1}{\sum_{i=-\infty}^{-1} (2\beta)^i w} = \frac{2\beta-1}{2w} \quad (23)$$

$$R_o = 2 \frac{1}{\sum_{i=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2\alpha)^i}} = \frac{1-2\alpha}{\alpha}, C_o = \sum_{i=-\infty}^{-1} \frac{1}{\left(\frac{\beta}{2}\right)^i w} = \frac{\beta}{w(2-\beta)} \quad (24)$$

$$R_o = \frac{1}{2} \frac{1}{\sum_{i=-\infty}^{-1} \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^i}} = \frac{2-\alpha}{2\alpha}, C_o = \frac{1}{4} \sum_{i=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2\beta)^i w} = \frac{\beta}{2w(1-2\beta)} \quad (25)$$

数值实验表明，新型分抗逼近电路优化后的运算特征曲线逼近效果类似图 10。电路的优化能够有效改善频域的逼近性能，使得分抗逼近电路具有更宽的逼近频段。

2.2 任意阶高运算恒定性分抗逼近电路

新型分抗逼近电路同样存在运算振荡现象，运算阶具有不恒定性。运算特征曲线的振荡势必会影响分抗逼近电路的分数算子运算性能，因此，设计具有高运算恒定性的任意阶分抗逼近电路具有重要应用价值。考虑正比拓展时，B 型标度分形塔分抗与 B_II 型标度分形塔分抗串联(见图 11)。图 11 中 F_B, F_{2h} 分别表示有限 k 节 B 型标度分形塔分抗逼近电路和有限 k 节 2h 型标度分形树分抗逼近电路。符号 F_{B_II}, F_{B_III} 和符号 F_{2h_II}, F_{2h_III} 分别表示 2 种新型 B 型分形塔分抗及两种新型 2h 型分形树分抗。鉴于电路节数 k 为有限值，为区别理想分抗元的电路符号，使用图 11 中所示的分抗符号。2 种分抗逼近电路取相同的标度因子 $\sigma=5$ 和初始阻抗 $y_0(w)=1$ ，串联后的分抗逼近电路与 B 型标度分形塔分抗的运算特征曲线对比如图 12。其中黑色曲线表示 B 型标度分形塔分抗的运算特征曲线，红色曲线表示串联后分抗逼近电路的运算特征曲线。

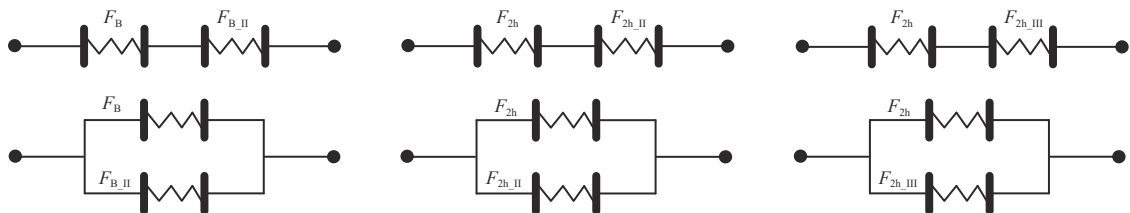


Fig.11 Schematic diagram of the series-parallel networks of original FACs and the novel FACs

图 11 原分抗逼近电路与新型分抗逼近电路的串并联网络示意图

对比可知，2 个分抗逼近电路串联后的运算振荡幅度明显减小。尤其当运算阶 $\mu = -0.5$ 时，串联后的电路几乎具有恒定的运算性能。当运算阶 $\mu = -0.1, -0.9$ 时，串联后的电路运算特征曲线的振荡幅度几乎与 B 型标度分形塔分抗的运算振荡幅度相等。根据数值分析，发现 B 型标度分形塔分抗与 B_II 型标度分形塔分抗的并联，2h 型标

度分形树分抗分别与 2h_II、2h_III 型标度分形树分抗的串并联组合，都可获得具有高运算恒定性的任意阶分抗逼近电路网络。各种组合电路示意图如图 11 所示。

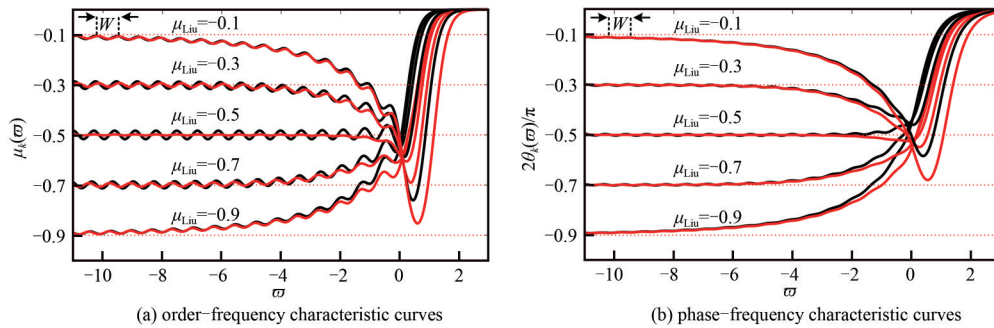


Fig. 12 Comparison of operational characteristic curves of the two fractors in series and B_type scaling fractal-pyramid FAC
图 12 两个分抗串联后的运算特征曲线与 B 型标度分形塔分抗的运算特征曲线对比图

2.3 电路的仿真实验与信号的分数阶微分运算

借助 Multisim 电路仿真软件，可以分析模拟电路的频域特征曲线。以正比标度拓展的 B_II 型标度分形塔分抗为例，取运算阶 $\mu_{Lin} = -0.5$ ，标度因子 $\sigma = 5$ ，根据式(15)求解的标度特征参数为 $\alpha = 1.118, \beta = 4.4721$ 。当电路中的电阻阻值 $R = 1 \text{ k}\Omega$ ，电容容值 $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$ 时，数值仿真获得此时的 5 节 -0.5 阶 B_II 型标度分形塔分抗的阻抗函数为：

$$Z_5(s) = F^{(\mu)} s^\mu = 1.8836 \times 10^4 \tag{26}$$

优化前后 5 次迭代 -0.5 阶 B_II 型标度分形塔分抗模拟电路的频域仿真曲线对比如图 13 所示。

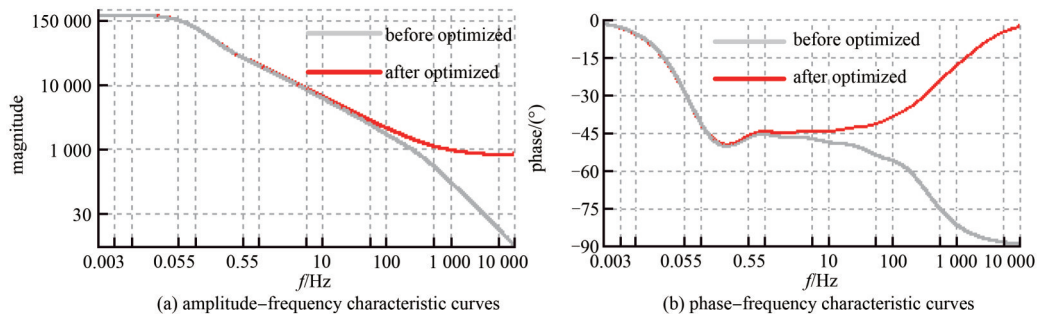


Fig. 13 Frequency-domain simulation curves of B_II fractal-pyramid analog circuit before and after optimization
图 13 优化前后 B_II 型标度分形塔分抗模拟电路频域仿真曲线

电路仿真获得的优化前后的频域曲线与理论数值分析结果一致，由相频特征曲线可知，新的 B_II 型分形塔分抗具有分数阶运算性能，对称阻容 T 型节电路优化方法是有效的。使用运算放大器等有源电路与 5 节 -0.5 阶 B_II 型标度分形塔分抗逼近电路，可以设计具有分数阶运算性能的电路与系统。使用运算放大芯片 OP37AZ，设计的负半阶微分运算电路原理图如图 14。其中元件参数为 $R_1 = 1 \text{ k}\Omega, R_{b1} = R_{b1} = 820 \text{ }\Omega, R_{in} = 500 \text{ }\Omega, R_f = 5 \text{ k}\Omega$ ，分抗元件 F 使用 5 节 -0.5 阶 B_II 型标度分形塔分抗逼近电路。

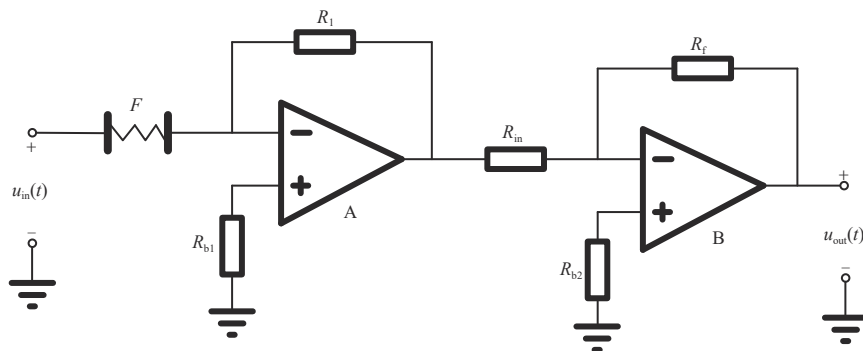


Fig. 14 Principle circuit of active fractional differential operation
图 14 有源分数阶微分运算原理电路

该分数阶运算电路的电压传输函数为：

$$H(s) = \frac{U_{\text{out}}(s)}{U_{\text{in}}(s)} = \frac{R_2 R_f}{R_{\text{in}} F} = 0.5309s^{0.5} \quad (27)$$

选择周期对称方波为测试信号 $u_{\text{in}}(t)$ ，由图 13 中的频域仿真曲线可知该分抗逼近电路的有效运算频段大概为 0.3~300 Hz。选择输入周期方波信号 $u_{\text{in}}(t)$ 的基波角频率 $\Omega_0=1$ Hz，峰峰值 $E=0.5$ V。理论计算的周期对称方波的 0.5 阶微分运算后的波形及电路仿真结果如图 15 所示。其中黑色曲线为输入波形 $u_{\text{in}}(t)$ ，红色波形为输出波形 $u_{\text{out}}(t)$ 。

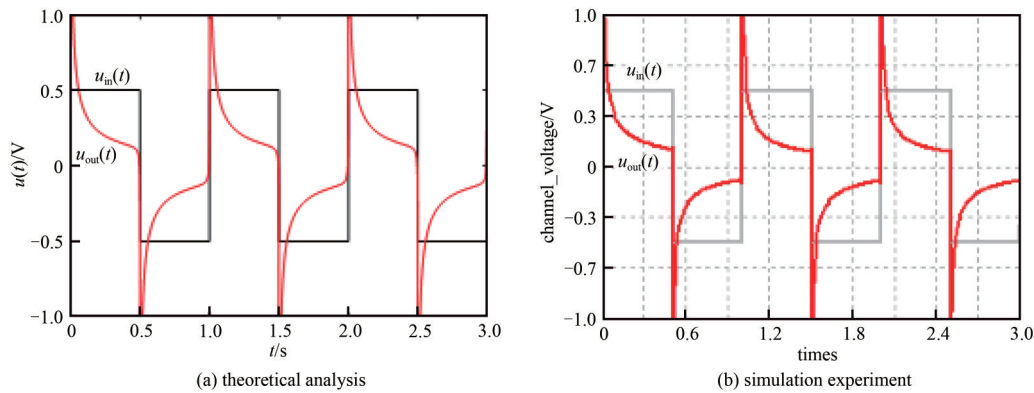


Fig.15 0.5-order differential operation of a periodic square wave
图15 周期方波的0.5阶微分运算

模拟电路的仿真结果与理论分析一致，实验仿真表明，本文提出的新型 B_II 型标度分形塔分抗逼近电路具有分数阶运算性能，可以用于构建分数阶电路与系统。同理可证明其他几类新型分抗逼近电路的分数阶运算性能。

3 结论

描述三类任意阶标度分形分抗逼近电路的非正则标度方程具有相似的代数形式，从而获得基于未知参数 m, n 的一类非正则标度方程。当未知参数 $mn > 0$ 时，该非正则标度方程描述的阻抗函数有理迭代过程满足计算有理性、运算有效性及物理可实现性。通过置换电阻和电容的位置获得 4 种新型分抗逼近电路，并研究其运算有效性及对应的非正则标度方程——广义非正则标度方程，发现广义非正则标度方程具有不同以往非正则标度方程的近似解结果，该类方程描述的阻抗函数有理迭代过程具有新的运算阶 $\mu = -\frac{\lg \alpha}{\lg \sigma} \pm \frac{\lg 2}{\lg \sigma}$ 。结合信号的分数阶微分运算仿真实验，证明了新型分抗逼近电路的有效性。新型任意阶标度分形分抗与原分抗的串并联组合，构成新的无源二端电路网络，具有更高的运算恒定性。本文关于新型分抗逼近电路及新型标度方程的研究仅仅只是一个开端，还存在相关的有待继续研究的问题：

1) 文中提出的新型非正则标度方程如何解析求解。如果能够获得非正则标度方程的解析解形式，或许可以从解析表达式的角度，获得电路的优化方法及优化元件参数取值。

2) 考虑新型非正则标度方程(6)，除了描述标度分形格分抗、标度分形塔分抗和标度分形树分抗，当 m, n 取其他参数时，对应的具体的分抗逼近电路是怎样的？

参考文献：

- [1] TANG Y, LI H M, LIN J M. Ring-projection-wavelet-fractal signatures: a novel approach to feature extraction[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing, 1998,45(8):1130-1134.
- [2] ZHANG Weiwei, ZHANG Hai, CAO Jinde, et al. Synchronization of delayed fractional-order complex-valued neural networks with leakage delay[J]. Physica A, 2020. doi:10.1016/j.physa.2020.124710.
- [3] SINGH A K. Fractionally delayed Kalman filter[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2020,7(1):169-177.
- [4] KULKARNI P, GRANT S, MORRISON T R, et al. Characterizing the human APOE epsilon 4 knock-in transgene in female and male rats with multimodal magnetic resonance imaging[J]. Brain Research, 2020. doi:10.21203/rs.3.rs-18040/v1.
- [5] USHAKOV P A, MAKSIMOV K O, STOYCHEV S V, et al. Synthesis of elements with fractional-order impedance based on

- homogenous distributed resistive-capacitive structures and genetic algorithm[J]. Journal of Advanced Research, 2020(25): 275–283.
- [6] DING S, WANG J, ZHENG W X. Second-order sliding mode control for nonlinear uncertain systems bounded by positive functions[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2015,62(9):5899–5909.
- [7] MATHITALAGAN K, SANGEETHA G. Second-order sliding mode control for nonlinear fractional-order systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2020. doi:10.1016/j.amc.2020.125264.
- [8] VALSA J, JIRI V. RC models of a constant phase element[J]. International Journal of Circuit Theory and Applications, 2013,41(1):59–67.
- [9] GLUSKIN E. One-port composed of power-law resistors[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2004, 51(9):464–467.
- [10] ARAIN S, PHOTOS V, ABDUL Q, et al. Reconfigurable BPF with constant centre frequency and wide tuning range of bandwidth [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II, Express Briefs, 2019,67(8):1374–1378.
- [11] 袁晓. 分抗逼近电路之数学原理[M]. 北京:科学出版社, 2015. (YUAN Xiao. Mathematical principles of fractance approximation circuits[M]. Beijing: Science Press, 2015.)
- [12] PU Y F, YUAN X, YU B. Analog circuit implementation of fractional-order memristor: arbitrary-order lattice scaling fracmemristor[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2018,65(9):2903–2916.
- [13] 余波, 何秋燕, 袁晓. 任意阶标度分形格分抗与非正则格型标度方程[J]. 物理学报, 2018,67(7):070202-1–10. (YU Bo, HE Qiuyan, YUAN Xiao. Scaling fractal-lattice fractance approximation circuits of arbitrary order and irregular lattice type scaling equation[J]. Acta Physica Sinica, 2018,67(7):070202-1–10.)
- [14] 易舟, 袁晓. 分形分抗逼近电路零极点的数值求解与验证[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2017,15(1):98–103. (YI Zhou, YUAN Xiao. The numerical solution and verification of zero-pole for some fractal fractance approximation circuits[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2017,15(1):98–103.)
- [15] 高小龙, 袁晓, 施卜椿. Oldham分形链与Liu-Kaplan分形链分抗的阻纳函数求解[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2019,17(3):474–481. (GAO X L, YUAN X, SHI B C. Immittance functions solution of Oldham fractal chain and Liu-Kaplan fractal chain fractance[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2019,17(3):474–481.)
- [16] HUANG C D, HENG L, CHEN X P, et al. Dynamic optimal control of enhancing feedback treatment for a delayed fractional order predator-prey model[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2020. doi:10.1016/j.physa.2020.124136.
- [17] HE Q Y, PU Y F, YU B, et al. Arbitrary-order fractance approximation circuits with high order-stability characteristic and wider approximation frequency bandwidth[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2020,7(5):1–12.
- [18] PU Y F, YUAN X, LIAO K, et al. Structuring analog fractance circuit for 1/2 order fractional calculus[C]// 2005 6th International Conference on ASIC. Shanghai, China: IEEE, 2005. doi:10.1109/ICASIC.2005.1611507.

作者简介:

张月荣(1994-), 男, 硕士, 主要研究方向为分数阶电路与系统、分抗逼近电路的优化设计等. email: scu_zyr@126.com.

袁晓(1964-), 男, 博士, 副教授, 主要研究方向为现代信号与信息处理、分数微积分理论与应用、现代电路及系统理论与技术等.