

文章编号: 2095-4980(2022)04-0366-06

## 一种基于子空间分析的快速信源个数估计方法

王晓君, 李笑添\*

(河北科技大学 信息科学与工程学院, 河北 石家庄 050000)

**摘要:** 针对阵列信号处理中传统信源个数估计方法如基于 Akaike 信息论准则方法(AIC)、最小描述长度准则方法(MDL)等特征值分解类算法计算量大, 且在小快拍数、低信噪比时性能下降甚至无法正确估计的问题, 提出了一种基于子空间分析的快速信源个数估计方法。该算法首先利用多级维纳滤波器(MWF)对信号进行快速的子空间估计, 然后计算阵列信号协方差在子空间匹配滤波器中的投影值, 通过分析其正交性来估计信源个数。研究表明, 该算法不但在小快拍数、低信噪比时相较于传统特征值分解类算法具有更优异的性能, 并且计算量大大降低。

**关键词:** 阵列信号处理; 信源个数估计; 子空间估计; 多级维纳滤波; 空间匹配滤波器

中图分类号: TN911.72

文献标志码: A

doi: 10.11805/TKYDA2020286

## A fast source number estimation method based on subspace analysis

WANG Xiaojun, LI Xiaotian\*

(College of Information Science and Engineering, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050000, China)

**Abstract:** Traditional algorithms based on eigenvalue decomposition such as Akaike Information Theory(AIC) and Minimum Description Length(MDL) criterion not only require a huge amount of computation, but also reduce the performance or even cannot correctly work under the condition of low SNR or few snapshots. A novel source number estimation method based on subspace analysis is proposed. Firstly, the subspace estimation of the signal is completed fast by using Multi-stage Wiener Filter(MWF), then the projection value of array signal covariance in subspace matched filters is calculated. At last, the number of sources is obtained by analyzing their orthogonality. The simulation results show that the proposed method has better performance than other algorithms mentioned above in the low SNR or few snapshots, and the amount of calculation is greatly reduced.

**Keywords:** array signal processing; source number estimation; subspace estimation; Multi-stage Wiener Filter(MWF); spatial matched filter

波达方向(DOA)估计一直是雷达、通信等领域的重要研究内容, 其中空间谱分析法具有超高分辨率特性。但诸如多重信号分类算法(MUSIC)、旋转子空间不变法(ESPIRIT)等基于子空间分解的算法皆是建立在信号源个数已知的前提下<sup>[1]</sup>, 继而能够准确区分信号子空间与噪声子空间。估计信源个数是阵列信号处理中的一个关键问题。典型的信源个数估计方法如基于 AIC 准则、MDL 准则的信息论方法、盖式圆盘(Gerschgorin Disk Estimator, GDE)方法等在高信噪比、大快拍数的条件下拥有优良的性能, 但是在低信噪比、小快拍数的条件下性能会急剧下降甚至无法正确估计, 并且这些方法都需要对输入信号的协方差矩阵进行特征值分解, 因此计算复杂度很大, 特别是在阵元数较大、快拍数较多的情况下, 计算量相当可观。近来, 涌现了许多改进算法<sup>[2-3]</sup>, 毛维平<sup>[4]</sup>通过重构协方差矩阵来使信号子空间的特征值增大, 从而抑制噪声功率; 吴微<sup>[5]</sup>利用信号分量与噪声分量特征值的转折来估计信源个数; 郭拓<sup>[6]</sup>利用噪声子空间特征矢量与其他子空间特征矢量夹角余弦的联合概率密度函数值来估计信源个数。这些算法虽然改善了在低信噪比、小快拍数下的算法性能, 但是同样要对协方差矩阵进行特征值分解。

收稿日期: 2020-06-19; 修回日期: 2020-09-20

基金项目: 国防科技重点实验室基金资助项目(6142205190401)

\*通信作者: 李笑添 email:849185826@qq.com

### 1 阵列信号模型

均匀圆阵(Uniform Circular Array, UCA)因其可以进行 360° 二维波达角估计, 并且不会出现相位模糊现象而在工程上得到广泛应用<sup>[7]</sup>, 所以本文算法将基于 UCA 的阵列排布。如图 1 所示, UCA 由  $M$  个阵元组成, 选取圆心为参考点, 其余阵元均匀分布在半径为  $R$  的圆周上。假设有  $L$  个相互独立的窄带信号从远场入射, 那么阵列天线接收到的第  $k$  次快拍数据可以表示为:

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{A}(\varphi, \theta) \mathbf{S}(k) + \mathbf{N}(k) \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{X}(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_M(k)]^T$ , 正体上标 T 表示矩阵的转置, 文中正体上标 H 表示共轭转置; 阵列流形矩阵  $\mathbf{A}(\varphi, \theta) = [\mathbf{a}(\varphi_1, \theta_1), \mathbf{a}(\varphi_2, \theta_2), \dots, \mathbf{a}(\varphi_L, \theta_L)]$ ,

$\mathbf{a}(\varphi_l, \theta_l) = [1, e^{j2\pi R \sin(\theta_l) \cos(\varphi_l) / \lambda}, \dots, e^{j2\pi R \sin(\theta_l) \cos(\varphi_l - 2\pi \frac{m-2}{M-1}) / \lambda}]$  ( $m = 2, 3, \dots, M$ ) 为第  $l$  个平面波的空域导向矢量,  $(\varphi_l, \theta_l)$  为其方位角和俯仰角,  $\lambda$  为其波长;  $\mathbf{S}(k) = [s_1(k), s_2(k), \dots, s_L(k)]^T$ ,  $s_l(k)$  为第  $l$  次快拍数据复包络;  $\mathbf{N}(k) = [n_1(k), n_2(k), \dots, n_M(k)]^T$  为各阵元接收到的加性高斯白噪声。

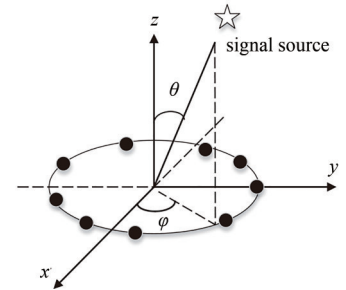


Fig.1 Array model  
图 1 阵列模型

### 2 基于 MWF 的信源个数估计方法

#### 2.1 算法提出

MWF 是一种降维算法, 由 Goldstein<sup>[8]</sup> 于 1998 年提出, 其性能与结构由阻塞矩阵来决定, 其中基于相关相减结构的多级维纳滤波(CSA-MWF)由于不需要显式计算输入信号的协方差矩阵和阻塞矩阵, 因此具有较低的计算复杂度。本文将利用 CSA-MWF 的前项分解过程来完成对信号子空间和噪声子空间的快速估计, CSA-MWF 前项分解结构如图 2 所示。根据图 2 滤波器结构, 可以得到第  $i$  级的期望信号:

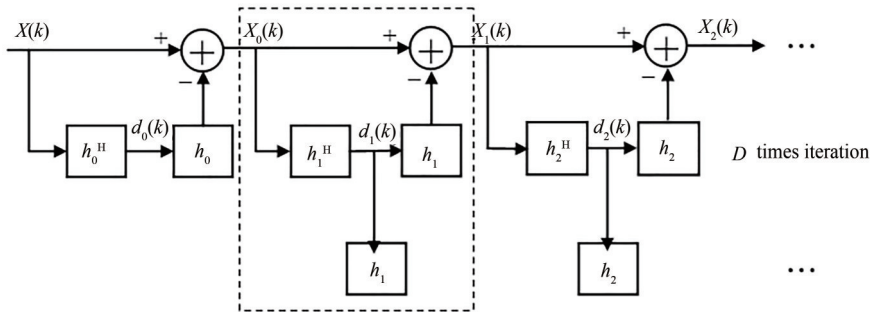


Fig.2 Antecedent structure of CSA-MWF  
图 2 CSA-MWF 前项分解结构

$$\mathbf{d}_i(k) = \mathbf{h}_i^H \mathbf{X}_{i-1}(k) \quad (2)$$

式中  $\mathbf{h}_i$  为第  $i$  级匹配滤波器, 为前一级期望信号  $\mathbf{d}_{i-1}$  与输入信号  $\mathbf{X}_{i-1}$  的互相关归一化矢量:

$$\mathbf{h}_i = \frac{\mathbf{r}_{\mathbf{X}_{i-1} \mathbf{d}_{i-1}}}{\sqrt{\mathbf{r}_{\mathbf{X}_{i-1} \mathbf{d}_{i-1}}^H \mathbf{r}_{\mathbf{X}_{i-1} \mathbf{d}_{i-1}}}} \quad (3)$$

结合式(2)、式(3)可以看到, 第  $i$  级期望信号  $\mathbf{d}_i(k)$  为  $\mathbf{X}_{i-1}(k)$  在互相关矢量  $\mathbf{r}_{\mathbf{X}_{i-1} \mathbf{d}_{i-1}}$  上的投影, 保证了  $\mathbf{d}_i(k)$  与  $\mathbf{d}_{i-1}(k)$  相关性最大。之后更新下一级输入信号:

$$\mathbf{X}_i(k) = \mathbf{X}_{i-1}(k) - \mathbf{h}_i \mathbf{d}_i(k) = (\mathbf{I} - \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H) \mathbf{X}_{i-1}(k) = \mathbf{B}_i \mathbf{X}_{i-1}(k) \quad (4)$$

由式(4)得第  $i$  级阻塞矩阵  $\mathbf{B}_i = \mathbf{I} - \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H$ , 易知阻塞矩阵  $\mathbf{B}_i$  与匹配滤波器权矢量  $\mathbf{h}_i$  正交, 所以输入信号  $\mathbf{X}_i(k)$  为  $\mathbf{X}_{i-1}(k)$  在与互相关矢量  $\mathbf{r}_{\mathbf{X}_{i-1} \mathbf{d}_{i-1}}$  正交的子空间上的投影, 不包含  $\mathbf{d}_{i-1}(k)$  中的任何信息。经过  $D$  次迭代后, 下一级输入信号  $\mathbf{X}_{D+1}(k)$  中将不包含任何期望信号的信息而只保留了噪声, 多级维纳滤波前项分解过程结束。

接下来分析各级匹配滤波器权矢量  $\mathbf{h}$  与信号子空间和噪声子空间的关系。多级维纳滤波器第一级输入信号  $\mathbf{X}_0$  为  $M-1$  行的矩阵, 其协方差矩阵为  $\mathbf{R}_{\mathbf{X}_0} = E(\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_0^H)$ , 对其进行特征值分解:

$$R_{X_s} = U\Sigma U^H = [U_S \ U_N]\Sigma[U_S \ U_N]^H = U_S\Sigma_S U_S^H + U_N\Sigma_N U_N^H \quad (5)$$

式中  $\Sigma$  为特征值组成的对角阵:

$$\Sigma = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{M-1}) \quad (6)$$

且满足  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_D \geq \lambda_{D+1} = \lambda_{D+2} = \dots = \lambda_{M-1} = \sigma^2$ , 可知  $D$  个大特征值组成的对角阵  $\Sigma_S = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_D)$  所对应特征矢量构成信号子空间  $U_S = [e_1, e_2, \dots, e_D]$ , 非零小特征值  $\Sigma_N = \text{diag}(\lambda_{D+1}, \lambda_{D+2}, \dots, \lambda_{M-1})$  所对应的特征矢量构成噪声子空间  $U_N = [e_{D+1}, e_{D+2}, \dots, e_{M-1}]$ 。从而各级匹配滤波器  $h_i$ ,  $i=1, 2, \dots, D$  与信号子空间有如下关系<sup>[9]</sup>:

$$U_S = \text{span}\{h_1, h_2, \dots, h_D\} = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_D\} \quad (7)$$

由于  $h_i$  是相互正交的, 所以有  $h_i \perp U_S$ ,  $i=D+1, D+2, \dots, M-1$ , 从而噪声子空间可表示为:

$$U_N = \text{span}\{h_{D+1}, h_{D+2}, \dots, h_{M-1}\} = \text{span}\{e_{D+1}, e_{D+2}, \dots, e_{M-1}\} \quad (8)$$

由以上推导可以得到结论, MWF 各级匹配滤波器  $h$  可以作为信号子空间和噪声子空间的基矢量, 即与相应子空间的特征矢量等效。本文通过计算阵列信号协方差在匹配滤波器中的投影函数 (Matched Filter Projection Function, MFPPF), 并将其等效于对子空间正交性的分析来估计信源个数。为了方便, 称本文算法为 MFPPF。

假设多级维纳滤波器为全维的,  $T_M = [h_1, h_2, \dots, h_{M-1}]$  为子空间匹配滤波器的集合, 满足:

$$T_M = [h_1, h_2, \dots, h_{M-1}] = [\hat{U}_S \ \hat{U}_N] \quad (9)$$

式中  $\hat{U}_S, \hat{U}_N$  分别为估计的信号子空间与噪声子空间。由于实际应用中只能得到有限的采样数据, 所以阵列信号的协方差  $R_X$  常用下面的估计值近似:

$$\hat{R}_X = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K X(k)X^H(k) \quad (10)$$

将阵列信号的协方差的估计  $\hat{R}_X$  向  $T_M$  中投影:

$$P = T_M^H \hat{R}_X = [p_1, p_2, \dots, p_{M-1}]^T \quad (11)$$

式中  $p_i (i=1, 2, \dots, M-1)$  为投影值的行向量。由于信号特征子空间  $\hat{U}_S$  与导向矢量处于同一空间内, 对应投影  $p_i$  中的元素应该是一些模相对较大的值, 而噪声特征子空间  $\hat{U}_N$  与导向矢量正交, 对应投影  $p_i$  中的元素理论上应该为零, 但实际上相对于信号子空间投影来说为很小的值。利用这一性质, 将每行  $p_i$  求和:

$$\hat{p}_i = \sum_{j=1}^M p_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, M-1) \quad (12)$$

计算相邻两级  $\hat{p}_i$  的比值:

$$\delta_i = \frac{\hat{p}_i}{\hat{p}_{i+1}} \quad (i=1, 2, \dots, M-2) \quad (13)$$

获得各级  $\delta_i$  后, 根据相邻两个  $\delta$  的变化幅度确定信源个数, 如果  $\delta$  出现较大幅度的变化, 证明特征子空间的投影值平稳性因子空间正交而受到极大挑战, 则此处为信号子空间与噪声子空间的分界点, 之后通过寻找  $\delta$  的峰值所对应的算法迭代次数  $i$  即可得到信源个数。然而, 由于实际噪声的不稳定性,  $\delta$  可能会在算法收敛之前出现伪峰现象, 针对这种情况, 实际工程中可以采用出现峰值之后相邻  $n$  级  $\delta$  连续小于一个很小的门限值  $\delta_T$  作为算法收敛的判决准则, 且为了最大限度地降低迭代次数, 可取  $n=3$ 。门限  $\delta_T$  可由先验信息或仿真获得, 也可通过适当调整阵列天线工作时间, 计算纯噪声情况下的  $\delta$  上下浮动区间来确定。

## 2.2 算法步骤及计算量分析

初始化参数: 阵元个数为  $M$ , 快拍数为  $K$ , 阵列天线接收到的数据为  $[X_1, X_2, \dots, X_M]^T$ , 多级维纳滤波器阶数为  $D$ , 在不进行自适应降维时可以先令  $D=M-1$ , 即最大迭代次数, 初始匹配滤波器权矢量  $h_0 = [1, 0, \dots, 0]$ 。

算法输出: 信源个数估计值  $\hat{L}$ 。

**步骤 1** 将快拍数据  $[X_1, X_2, \dots, X_M]^T$  与初始匹配滤波器权矢量  $h_0$  输入多级维纳滤波器前项分解过程中, 根据式(2)~式(4)计算出各级匹配滤波器权矢量  $T_D = [h_1, h_2, \dots, h_D]$ 。

步骤 2 计算阵列信号协方差的估计值： $\hat{R}_X = \frac{1}{K} \sum_{t=1}^K X(t)X^H(t)$

步骤 3 将  $\hat{R}_X$  向  $T_D$  中投影，并求模值： $P = abs(T_D^H \hat{R}_X) = [p_1, p_2, \dots, p_D]^T$

步骤 4 将  $P$  中的行向量求和： $\hat{p}_i = \sum_{j=1}^M p_{ij}, i=1, 2, \dots, D$

步骤 5 计算相邻两级  $\hat{p}_i$  的比值： $\delta_i = \frac{\hat{p}_i}{\hat{p}_{i+1}} (i=1, 2, \dots, D-1)$ ，若  $\delta_i = \max(\delta)$ ，则  $\hat{L} = i$ 。

对于步骤 1 所示过程，计算每级期望信号  $d_i$  需要  $MK$  次乘法，计算每级匹配滤波器权矢量需要  $M(2K+1)$  次乘法，计算每级输入信号  $X_i$  需要  $M^2(K+1)$  次乘法，一共需要  $[MK+M(2K+1)+M^2(K+1)]D$  次乘法；对于步骤 2 所示过程，计算阵列信号协方差矩阵一共需要  $M^2K$  次乘法；对于步骤 3 所示过程，计算匹配滤波器投影值一共需要  $M^2D$  次乘法。算法整个流程所需计算量仅为  $[MK+M(2K+1)+M^2(K+1)]D+M^2K+M^2D$ ，即计算复杂度为  $O(M^2)$ ，而常规基于特征值分解的算法需要的时间复杂度至少为  $O(M^3)^{[10-11]}$ ，可以看出本文所述算法所需计算量大大降低，更具有工程应用价值。

### 3 性能仿真

验证所提算法的仿真环境为阵元个数  $M=9$ ，组成如图 1 所示的均匀圆阵，半径  $R=\lambda/2$ ，5 个互相独立的远场窄带信号等功率从方位角、俯仰角为  $(30^\circ, 15^\circ), (11^\circ, 48^\circ), (188^\circ, 35^\circ), (312^\circ, 65^\circ), (240^\circ, 52^\circ)$  的角度入射，噪声为高斯白噪声。

实验 1 中，研究信源个数正确估计概率随阵元个数变化。阵元个数从 4 变化至 15，步长为 1，信噪比固定为 10 dB，快拍数固定为 90，观察在不同阵元个数下 MFPP 算法估计信源个数的正确率，每个阵元个数下均进行 1 000 次蒙特卡罗实验。仿真结果如图 3 所示，阵元个数为 7 之前完全不能正确估计，这是由于阵元自由度与信源个数相近，算法分解出的信号子空间与噪声子空间信息不足导致两者正交性降低。而当阵元个数为 7 时正确估计概率接近 100%，随着阵元个数增加，正确估计概率略有降低，这是因为随着阵元个数增加，算法迭代次数也在增加，过多的迭代次数会造成噪声的误差积累<sup>[12]</sup>，可以通过自适应迭代次数来解决，本文由于篇幅有限不再讨论。

实验 2 中，进行 MFPP 算法与 AIC 算法、MDL 算法信源个数正确估计概率随快拍数变化的对比。快拍数从 10 变化至 120，步长为 5，信噪比固定为 10 dB，观察在不同快拍数下各种算法估计信源个数的正确率  $\eta$ ，每个快拍数下均进行 1 000 次蒙特卡罗实验。仿真结果如图 4 所示，快拍数小于 90 时，AIC 算法和 MDL 算法几乎不能正确估计信源个数，而在快拍数大于 95 时，估计正确概率接近于 100%，而 MFPP 算法在快拍数为 60 时估计正确概率就达到了 95%。由此可见在快拍数相对较低的情况下，MFPP 算法的性能更好。

实验 3 中，进行 MFPP 算法与 AIC 算法、MDL 算法信源个数正确估计率随信噪比变化的对比。信噪比从 -5 dB 变化至 15 dB，步长为 2 dB，快拍数固定为 100，观察在不同信噪比下各种算法的估计信源个数正确率  $\eta$ ，每种算法在不同信噪比下均进行 1 000 次蒙特卡罗实验，需要说明的是，为了更好地模拟真实噪声环境，分别在高斯白噪声和色噪声下进行了仿真。在白噪声环境下的仿真结果如图 5 所示，在信噪比低于 5 dB 时，AIC 算法和 MDL 算法完全不能正确估计，在信噪比为 11 dB 时正确估计概率接近 100%，而 MFPP 算法在信噪比为 -5 dB 时依然有 50% 左右的正确估计概率，并且随着信噪比上升，在 11 dB 前正确估计概率一直高于 AIC 算法和 MDL 算法，之后算法性能略低于 AIC 算法与 MDL 算法；在色噪声环境下的仿真结果如图 6 所示，可以看

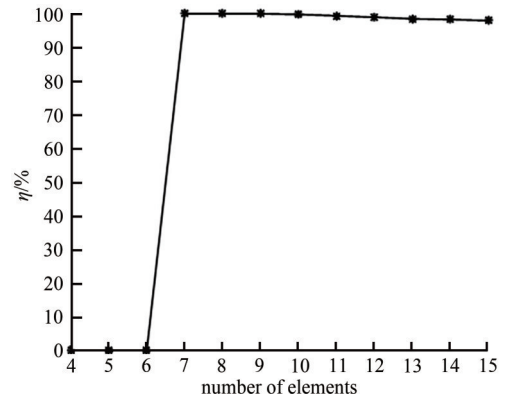


Fig.3 Probability change with elements estimated by MFPP  
图 3 MFPP 算法正确估计概率随阵元数变化

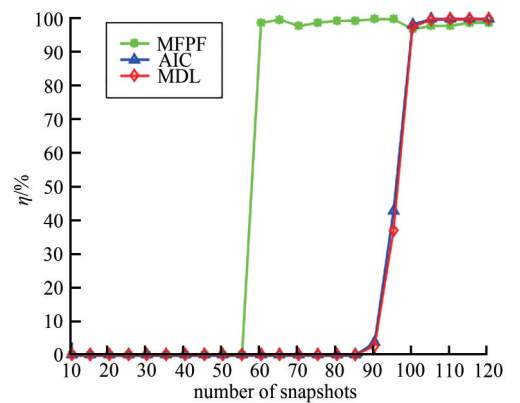


Fig.4 Probabilities change with snapshot number estimated by three algorithms  
图 4 3 种算法正确估计概率随快拍数变化

到 AIC 算法与 MDL 算法完全不能正确估计, 在信噪比为 10 dB 之前, 估计正确率为 0, 而 MFPP 算法在信噪比为 -5 dB 时, 估计正确率比在白噪声环境下降低了约 20%, 而随着信噪比的提升, 其估计正确率与在白噪声环境下的差距逐渐缩小, 最后估计正确率稳定在 95% 左右。

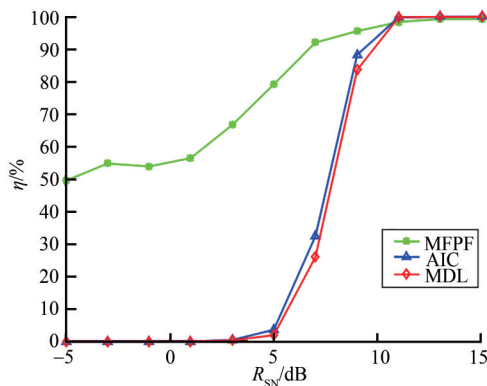


Fig.5 Probabilities change with SNR estimated by three algorithms in white noise

图 5 白噪声下 3 种算法正确估计概率随信噪比变化

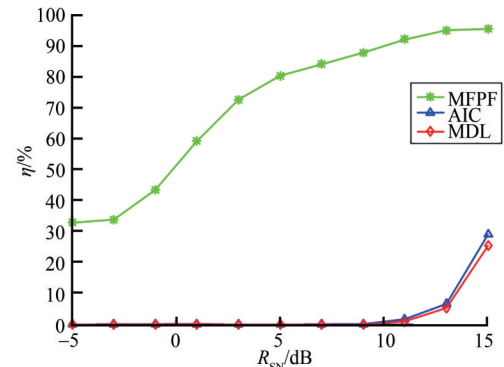


Fig.6 Probabilities change with SNR estimated by three algorithms in color noise

图 6 色噪声下 3 种算法正确估计概率随信噪比变化

由此可见, 不管是在白噪声环境下还是色噪声环境下, MFPP 算法在低信噪比下都具有更好的性能, 这是因为 AIC、MDL 等基于信息论准则的估计方法取决于特征值的大小, 较大者为信号特征值, 较小者为噪声特征值。在低信噪比时, 信号与噪声的特征值大小差距并不明显, 在负信噪比时, 噪声特征值甚至会大于信号特征值, 而在色噪声环境下噪声特征值会愈加发散, 从而使这类算法完全不能正确估计。而本文所提算法利用噪声子空间与信号子空间的正交性来估计信源个数, 这是两种信号空间方向的差别, 受信噪比的影响较低, 因而在低信噪比时依然具有一定的正确估计能力。

#### 4 结论

传统基于特征值分解的信源个数估计算法计算量大, 且在低信噪比、小快拍数的条件下性能下降。本文利用多级维纳滤波器实现对信号子空间和噪声子空间的快速分解, 避免了特征值分解过程, 降低了计算量, 之后将阵列信号协方差向匹配滤波器权矢量张成的子空间中投影, 通过分析其正交性来寻求信号子空间和噪声子空间的交界点, 从而估计出信源个数。仿真实验得出在低信噪比、小快拍数下, 本文所提 MFPP 算法较 AIC 算法、MDL 算法有更好的性能, 是一种更具有工程应用价值的算法。

#### 参考文献:

- [1] 陈明建, 龙国庆, 黄中瑞. 基于特征值线性拟合误差的信源数估计方法[J]. 火力与指挥控制, 2018, 43(7): 32-36. (CHEN Mingjian, LONG Guoqing, HUANG Zhongrui. Estimation of number of sources based on linear fitting error of eigenvalue[J]. Fire Control & Command Control, 2018, 43(7): 32-36.)
- [2] ZENG T, LI S, HU X, et al. Improved MDL method for estimation of source number at subarray level[J]. Electronics Letters, 2016, 52(1): 85-86.
- [3] YANG L, ZHANG H, LI J, et al. Blind source enumeration based on Gerschgorin Disk Estimator and virtual array extension[C]// 2016 8th International Conference on Wireless Communications & Signal Processing. Yangzhou, China: IEEE, 2016.
- [4] 毛维平, 李国林, 路翠华, 等. 联合特征值和特征子空间投影的信源数估计[J]. 上海交通大学学报, 2014, 48(3): 341-345, 350. (MAO Weiping, LI Guolin, LU Cuihua, et al. Source number estimation based on eigenvalue and eigen subspace projection[J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2014, 48(3): 341-345, 350.)
- [5] 吴微, 彭华. 一种改进的基于奇异值分解的信源数目估计算法[J]. 电讯技术, 2014, 54(3): 273-277. (WU Wei, PENG Hua. An improved algorithm based on SVD for blind estimation of the number of sources[J]. Telecommunication Engineering, 2014, 54(3): 273-277.)
- [6] 郭拓, 王英民, 张立琛. 采用特征向量夹角联合概率密度函数的信源个数估计方法[J]. 上海交通大学学报, 2018, 52(4): 469-473. (GUO Tuo, WANG Yingming, ZHANG Lichen. Source number estimation based on joint probability density function of the sample eigenvectors[J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2018, 52(4): 469-473.)

- [7] 王雅婧. 基于均匀圆阵的信源数估计和测向算法研究[D]. 西安:西安电子科技大学, 2017. (WANG Yajing. Research on signal source estimation and direction finding algorithm based on uniform circular array[D]. Xi'an, China: Xidian University, 2017.)
- [8] GOLDSTEIN J S, REED I S, SCHARF L L. A multistage representation of the Wiener filter based on orthogonal projections[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1998, 44(7): 2943-2959.
- [9] 黄磊. 快速子空间估计方法研究及其在阵列信号处理中的应用[D]. 西安:西安电子科技大学, 2005. (HUANG Lei. Study on fast subspace estimation method and its applications to array signal processing[D]. Xi'an, China: Xidian University, 2005.)
- [10] 赵文扬. 信号处理中矩阵运算的FPGA实现技术[D]. 成都:电子科技大学, 2018. (ZHAO Wenyang. The FPGA implementation of matrix calculation in signal processing[D]. Chengdu, China: University of Electronic Science and Technology of China, 2018.)
- [11] 袁生光. 对称矩阵特征值分解的硬件实现研究[D]. 杭州:浙江大学, 2008. (YUAN Shengguang. Research of eigenvalue decomposition implementation for symmetric matrix[D]. Hangzhou, China: Zhejiang University, 2008.)
- [12] 刘松. 均匀圆阵高效波达方向估计关键技术研究[D]. 重庆:重庆大学, 2016. (LIU Song. Study on key technologies of efficient direction-of-arrival estimation based on uniform circular array[D]. Chongqing, China: Chongqing University, 2016.)

#### 作者简介:

王晓君(1973-), 男, 河北省张家口市人, 博士, 教授, 主要研究方向为实时信号处理算法设计与工程实现等.  
email: 183515462@qq.com.

李笑添(1996-), 男, 河北省廊坊市人, 硕士, 主要研究方向为阵列信号处理.  
email: 849185826@qq.com.