

文章编号: 2095-4980(2021)03-0541-08

电路元件周期表——蔡氏周期表与新型记忆元件

余波¹, 蒲亦非², 何秋燕²

(1.成都师范学院 物理与工程技术学院, 四川 成都 611130; 2.四川大学 计算机学院, 四川 成都 610065)

摘要: 在介绍蔡氏周期表的基础上, 给出已有电路元件(电阻、电容、电感、忆阻、忆容、忆感、分抗和分忆抗元等)在周期表中的位置。近年来, “分数阶忆阻”的概念开始逐渐出现在文献中, 但其概念并不统一。本文将已有的分数阶忆阻及电路总结为4种, 并确定对应的元件在蔡氏周期表中的位置。分数阶积分是表征有损记忆的有力工具, 本文不仅给出电路元件禀赋关系统一表示式, 还给出分数阶积分控制式记忆元件——电流分数阶积分控制式忆容(CFMC)、电压分数阶积分控制式忆容(VFMC)、电流分数阶积分控制式忆感(CFMI)、电压分数阶积分控制式忆感(VFMI)、电流分数阶积分控制式分忆抗(CFFM)、电压分数阶积分控制式分忆抗(VFFM)等的定义, 并给出部分分数阶积分控制式记忆元件的运算结构图。

关键词: 分数阶微积分; 分抗元; 分抗逼近电路; 记忆元件; 忆阻; 分忆抗

中图分类号: TN79⁺2

文献标志码: A

doi: 10.11805/TKYDA2019534

Periodic table of circuit elements—Chua's periodic table and new memory elements

YU Bo¹, PU Yifei², HE Qiuyan²

(1.School of Physics and Engineering, Chengdu Normal University, Chengdu Sichuan 611130, China;
2.School of Computer Science, Sichuan University, Chengdu Sichuan 610065, China)

Abstract: Based on the introduction of Chua's periodic table, the position of the existing circuit elements(resistor, capacitor, inductor, memristor, memcapacitor, meminductor, fractor and fracmemristor) in the periodic table are given. In recent years, the concept of Fractional Order Memristor(FOMR) has been developed, but the use of this name is not consistent. In this paper, the existing FOMR include circuit are summarized into four types, and the locations of the elements in Chua's periodic table are determined. Fractional integration is a powerful tool to represent memory loss. This paper not only gives the unified constitutive relation expressions for circuit elements, but also gives the definitions for fractional integral control type memory elements—Current Fractional integral controlled Memcapacitor (CFMC), Voltage Fractional integral controlled Memcapacitor(VFMC), Current Fractional integral controlled Meminductor(CFMI), Voltage Fractional integral controlled Meminductor(VFMI), and Current Fractional integral controlled Fracmemristor(CFFM), and Voltage Fractional integral controlled Fracmemristor(VFFM), etc. In addition, the operation structure diagrams of some fractional integral control memory elements are given, and their characteristic curves are analyzed theoretically.

Keywords: fractional calculus ;fractor ;fractance approximation circuits ;memory element ;memristor ;fracmemristor

电阻 R 、电容 C 和电感 L 是全世界公认的 3 种基本无源电路元件, 已在电路与系统中得到广泛应用。根据电路基本变量组合完备性原理, 1971 年美籍华裔科学家蔡少棠先生从理论预测出忆阻 M (memristor)的存在^[1], 并

收稿日期: 2019-12-12; 修回日期: 2020-02-09

基金项目: 国家重点研发计划资助项目(2018YFC0830300); 国家自然科学基金资助项目(61571312); 教育部产学合作协同育人质量工程资助项目(201702119108); 成都师范学院科研资助项目(CS18ZB05)

作者简介: 余波(1988-), 男, 硕士, 讲师, 主要研究方向为分数阶电路与系统理论及应用。email:analogyb@foxmail.com

将其推广到忆阻系统^[2]。人们称忆阻为第 4 种基本电路元件，理想的忆阻包括荷控忆阻(Charge Controlled Memristor, CCMR)和磁控忆阻(Flux Controlled Memristor, FCMR)等。2008 年,《Nature》报道了美国科学家 Williams 领导的团队在纳米尺度下制造出的忆阻物理实体^[3],震惊国际电工电子领域,掀起忆阻的研究热潮。忆容 M_C (memcapacitor)和忆感 M_L (meminductor)也被提出,包括磁控忆容(Flux Controlled Memcapacitor, FCMC)、电荷积分控制式忆容(Charge integral Controlled Memcapacitor, CCMC)、荷控忆感(Charge Controlled Meminductor, CCMi)和磁控忆感(Flux integral Controlled Meminductor, FCMi)等均得到人们的关注和研究^[4]。

蔡先生还依据电路变量与电路元件的公理完备性、逻辑相容性和形式对称性等,提出公理化的电路元件体系——蔡氏公理化元件系,进而得到电路元件的蔡氏周期表^[1,2,5-8]。蔡氏周期表中的电路元件具有 4-周期规律,可将蔡氏公理化元件分为四大互不相容的元件族类:频控容性元件族、频控正阻元件族、频控感性元件族和频控负阻元件族^[8]。文献[8]对蔡氏周期表进行了详细介绍。

分数阶微积分是运算阶为非整数的一种微积分,已成为数学分析的一个重要分支^[8-9]。由于分数阶微积分的长时记忆性、非定域性和弱奇异性,能更好地表征和刻画自然现象与过程的特性,已成为科学和工程技术领域中使用的—种新数学手段^[8-13]。能完成分数阶微积分运算的电路元件称为分抗元,分抗元的分抗量称为分抗。容性分抗元的运算特性介于电阻和电容之间,感性分抗元的运算特性介于电阻和电感之间^[10-12]。近几年,分数阶忆阻(FOMR)的概念应运而生,已有研究主要从 FOMR 的定义及基本特性展开^[14-25]。

目前关于 FOMR 的命名不统一,本文将已有的 FOMR 及电路总结为 4 种:a) 含有分数阶元件和忆阻元件的电路^[15]; b) 禀赋关系中对电压和电流进行了同等阶次分数阶运算的元件^[16]; c) 单位和电阻一致,忆阻量记忆了电压或电流的分数阶积分量^[14,17,20-22,24]。和忆阻在蔡氏周期表中的位置—样,具体可称为电流分数阶积分控制式忆阻(Current Fractional integral controlled Memristor, CFMR)和电压分数阶积分控制式忆阻(Voltage Fractional integral controlled Memristor, VFMR); d) 分数阶忆阻的单位和分抗元—致^[18-19,23,25],称为分忆抗,分忆抗的分忆抗值记忆电荷量或磁通量,具体称为荷控分忆抗(Charge Controlled Fracmemristor, CCFM)和磁控分忆抗(Flux Controlled Fracmemristor, FCFM)。那么,在已有的元件基础上,可否得到更多的分数阶积分控制式元件,它们的禀赋关系如何表达,具有如何的性质,在蔡氏周期表中的什么位置,这即是本文尝试回答的基本问题。

1 电路元件禀赋关系的统一表示

蔡氏周期表如图 1 所示。 $u(t)$ 和 $i(t)$ 分别为电压变量和电流变量, $u^{(\alpha)}(t)-i^{(\beta)}(t)$ 为电路元件的蔡氏禀赋变量对, α 和 β 表示积分阶次,即图 1 中的横坐标和纵坐标。各元件在图 1 中的位置由元件的禀赋关系所决定,如:电阻 R 的端口电压 $u(t)$ 和对应的电流 $i(t)$ 之间具有禀赋关系: $u(t)=Ri(t)$,此时 $\alpha=0,\beta=0$;电阻 C 的端口电压 $u(t)$ 和存储电荷量 $q(t)$ 之间具有禀赋关系: $u(t)=q(t)/C$,此时 $\alpha=0,\beta=-1$ 。电阻 R 、电容 C 、电感 L 、忆阻 M 、忆容 M_C 和忆感 M_L 等在蔡氏周期表中的位置如图 1 所示。

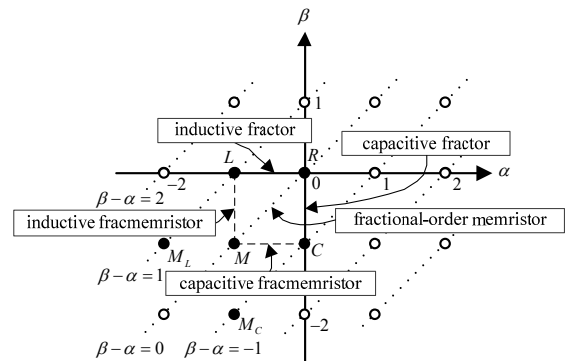


Fig.1 Chua's periodic table
图 1 蔡氏周期表

为方便理解电路元件之间的区别与联系,将电路元件的禀赋关系统一表示为:

$$\begin{cases} m(c_1)X(t)-Y(t)=0 \\ X(t)= {}_{t_0}D_{t_n}^{\lambda(c_2)}x(t) \\ Y(t)= {}_{t_0}D_{t_n}^{\nu}y(t) \\ c_1 = {}_{t_0}D_{t_n}^{w_1}x(t) \\ c_2 = {}_{t_0}D_{t_n}^{w_2}x(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中: t 为时间; t_0 和 t_n 为运算的起止时刻; ${}_{t_0}D_{t_n}^{\lambda(c_2)}$ 和 ${}_{t_0}D_{t_n}^{\nu}$ 为分数阶微分运算算子, $\lambda(c_2)$ 和 ν 是分数阶微分运算阶; $x(t)$ 表示电压 $u(t)$ 或电流 $i(t)$; $y(t)$ 表示电流 $i(t)$ 或电压 $u(t)$; $m(c_1)$ 为记忆元件的量值大小(如,忆阻量、忆容量或忆感量等); $X(t), Y(t), c_1, c_2$ 为状态变量。

依据式(1)得到已有电路元件的禀赋关系的符号含义如表 1 所示。式(1)表示电阻时,由表中第 2 行可知 $x(t)=i(t),\lambda(c_2)=0,y(t)=u(t),\nu=0,m(c_1)=R$,代入式(1)可得: $i(t)R-u(t)=0$,即通过表 1 符号含义验证了式(1)表示电阻禀赋关系的正确性。表 1 还给出了电荷分数阶积分控制式忆容(Charge fractional Integral controlled Memcapacitor,

CIMC)、电流分数阶积分控制式忆容(CFMC)、电压分数阶积分控制式忆容(VFMC)、电流分数阶积分控制式忆感(CFMI)、电压分数阶积分控制式忆感(VFMI)、电流分数阶积分控制式分忆抗(CFFM)和电压分数阶积分控制式分忆抗(VFFM)等的禀赋关系。

表 1 电路元件禀赋关系统一表示式的符号含义

Table1 Constitutive relations of memory elements

name	name	$x(t)$	$\lambda(c_2)$	$y(t)$	ν	$(w_{j,j=1,2})/m(c_1)$	reference of paper
resistor	resistor	$i(t)$	0	$u(t)$	0	$m(c_1)=R$	-
memristor	CCMR	$i(t)$	0	$u(t)$	0	$w_1=-1$	[1,2,5-7]
	FCMR	$u(t)$	0	$i(t)$	0	$w_1=-1$	[1,2,5-7]
	FOMR	$u(t)$	$\lambda=\nu$	$i(t)$	$\nu=\lambda$	$0< w_1 <1$	[16]
	CFMR	$i(t)$	0	$u(t)$	0	$-1<w_1<0$	[14,17,20-22,24]
	VFMR	$u(t)$	0	$i(t)$	0	$-1<w_1<0$	[14,17,20-22,24]
capacitor	capacitor	$u(t)$	0	$i(t)$	-1	$m(c_1)=C$	-
memcapacitor	CCMC	$i(t)$	-1	$u(t)$	0	$w_1=-2$	[4]
	FCMC	$u(t)$	0	$i(t)$	-1	$w_1=-1$	[4]
	CIMC	$i(t)$	-1	$u(t)$	0	$-2<w_1<-1$	[26]
	CFMC	$i(t)$	-1	$u(t)$	0	$-1<w_1<0$	this paper
	VFMC	$u(t)$	0	$i(t)$	-1	$-1<w_1<0$	this paper
inductor	inductor	$u(t)$	-1	$i(t)$	0	$m(c_1)=L$	-
meminductor	CCMI	$i(t)$	0	$u(t)$	-1	$w_1=-1$	[4]
	FCMI	$u(t)$	-1	$i(t)$	0	$w_1=-2$	[4]
	CFMI	$i(t)$	0	$u(t)$	-1	$-1<w_1<0$	this paper
	VFMI	$u(t)$	-1	$i(t)$	0	$-1<w_1<0$	this paper
fractor	fractor	$i(t)$	0	$u(t)$	$0< \nu <1$	$m(c_1)=m$	-
fracmemristor	CCFM	$i(t)$	0	$u(t)$	$0< \nu <1$	$w_1=-1$	[18,19,23,25]
	FCFM	$u(t)$	0	$i(t)$	$0< \nu <1$	$w_1=-1$	[18,19,23,25]
	CFFM	$i(t)$	0	$u(t)$	$0< \nu <1$	$-1<w_1<0$	this paper
	VFFM	$u(t)$	0	$i(t)$	$0< \nu <1$	$-1<w_1<0$	this paper

2 分数阶积分控制式记忆元件的运算结构与数学描述

2.1 几种典型的单元电路

图 2 为构造分数阶积分控制式记忆元件(CFMR,VFMR,VFMC,CFMI)所需的几种单元电路及符号。压控电阻 U_R 包括电压控制端 u_c 和受控电阻 R_u 。受控电阻 $R_u=K_r u_c$ ， K_r 为压控电阻 U_R 的控制系数。压控电容 U_C 包括电压控制端 u_c 和受控电容 C_u ，电容量 $C_u=K_c u_c$ ， K_c 为压控电容 U_C 的控制系数。压控电感器 U_L 包括电压控制端 u_c 和受控电感 L_u ，电感量 $L_u=K_l u_c$ ， K_l 为压控电感器 U_L 的控制系数。电流控制电压源 I_U 包括电流控制端 i 和电压源输出端 u_i ，输出电压 $u_i=K_j i$ ， K_j 为电流控制电压源 I_U 的控制系数。电压分数阶积分器 A 包括电压输入端 u_i 和电压输出端 u_c 。 t_0 时刻， $u_c=0$ ，从时刻 t_0 至 t_n ，电压值 $u_c=K_i {}_0D_t^\mu u_i(t)$ ， ${}_0D_t^\mu$ 为分数阶积分运算符号， μ 为积分运算阶次数， K_i 为电压分数阶积分器的控制系数。这几种单元电路可在 Multisim 中的元器件库里找到，为完成仿真提供了方便，其中的电压分数阶积分器需要由传输函数模块 $H(s)$ 逼近。

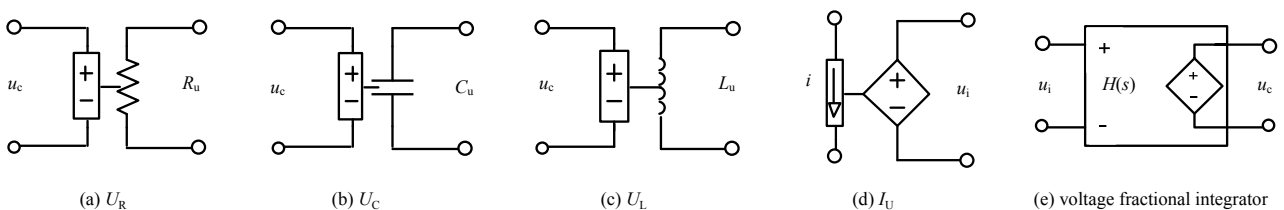


Fig.2 Several unit circuits
图 2 几种单元电路

2.2 运算结构图与数学描述

分数阶积分控制式记忆元件的运算结构如图 3 所示，对应的数学描述如表 2 所示。电流分数阶积分控制式忆阻器忆阻值 $M(q)$ 依赖于电流 $i(t)$ 的分数阶积分值 $q(t)$ ， $q(t)$ 为内部状态变量。电压分数阶积分控制式忆阻器忆导值

$W(\varphi)$ 依赖于二引脚电压 $u(t)$ 的分数阶积分值 $\varphi(t)$, $\varphi(t)$ 为内部状态变量。电压分数阶积分控制式忆容器的忆容量 $C_M(\varphi)$ 依赖于电压 $u(t)$ 的分数阶积分 $\varphi(t)$ 。电流分数阶积分控制式忆感器的忆感值 $L(q)$ 依赖于电流 $i(t)$ 的分数阶积分值 $q(t)$ 。图 3 所示的运算结构图也可以直接作为仿真模型。

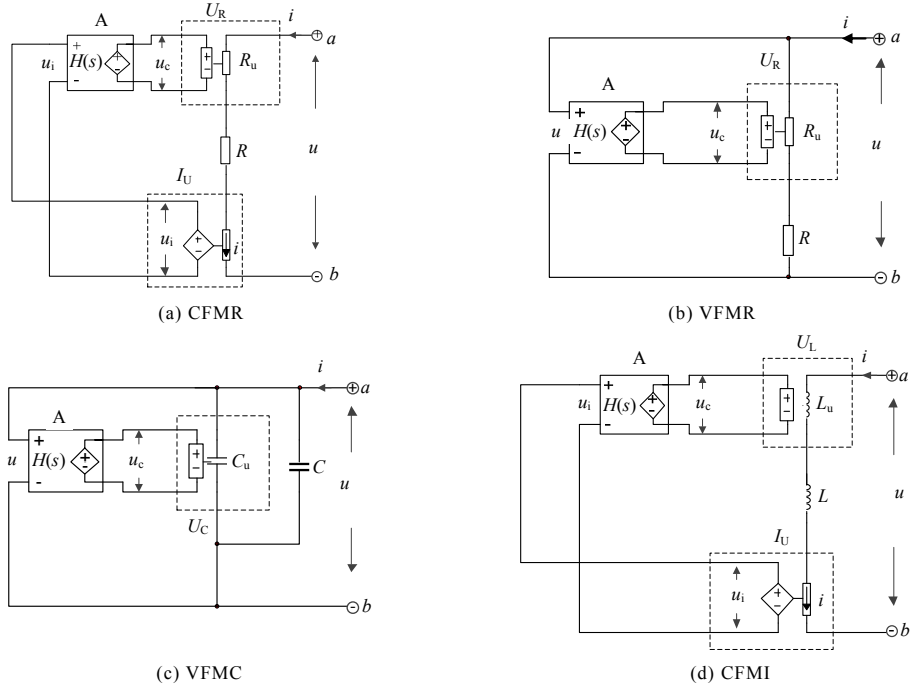


Fig.3 Operational structure diagrams of fractional integral controlled memory element
图 3 分数阶积分控制式记忆元件的运算结构图

表 2 分数阶积分控制式记忆元件运算结构的数学描述

Table2 Mathematical descriptions of operational structures of fractional integral controlled memory element		
structure diagram	mathematical description	explanation
CFMR Fig.3(a)	$u(t) = M(q)i(t)$, $M(q) = R + K_r K_i K_f q$, $q(t) = {}_0 D_t^\mu i(t)$	R is the initial memristance
VFMR Fig.3(b)	$i(t) = W(\varphi)u(t)$, $W(\varphi) = 1 / (R + K_r K_i \varphi)$, $\varphi(t) = {}_0 D_t^\mu u(t)$	R is the initial memristance
VFMC Fig.3(c)	$q(t) = C_M(\varphi)u(t)$, $C_M(\varphi) = C + K_c K_i \varphi$, $\varphi(t) = {}_0 D_t^\mu u(t)$	C is the initial emcapacitance
CFMI Fig.3(d)	$\varphi(t) = L_M(q)i(t)$, $L(q) = L + K_l K_f K_i q$, $q(t) = {}_0 D_t^\mu i(t)$	L is the initial meminductance

3 分数阶积分控制式记忆元件的数值计算与分析结果

3.1 分数阶微积分的定义

常见的分数阶微积分定义有黎曼-刘维尔(Riemann-Liouville)定义、卡普图(Caputo)定义和格林瓦尔-莱特尼科夫(Grünwald-Letnikov)定义等。从时刻 0 到时刻 t

$${}_0 D_t^\mu f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^t (t-\xi)^{-\mu-1} f(\xi) d\xi \quad (-1 < \mu < 0) \tag{2}$$

称为函数 $f(t)$ 的 $-\mu$ 阶黎曼-刘维尔分数阶积分, 其中 ${}_0 D_t^\mu$ 为分数阶积分运算符号, $\Gamma(-\mu) = \int_0^\infty t^{-\mu-1} e^{-t} dt$ 为伽玛函数, 时刻 0 为分数阶积分的下限, 时刻 t 为分数阶积分的上限^[9]。

函数 $f(t)$ 及其各阶导数的初值均为 0, 若 $f(t) = \sin(\omega_0 t)$, 则有

$${}_0 D_t^\mu \sin(\omega_0 t) = \omega_0^\mu \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi\mu}{2}\right) \tag{3}$$

若 $f(t) = \cos(\omega_0 t)$, 则有

$${}_0 D_t^\mu \cos(\omega_0 t) = \omega_0^\mu \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi\mu}{2}\right) \tag{4}$$

式中 ω_0 为信号角频率^[9]。

若函数 $f(t)$ 及其各阶导数的初值均为 0，则其分数阶微积分的拉普拉斯变换为：

$$\mathcal{L}[{}_0 D_t^\mu f(t)] = s^\mu \mathcal{L}[f(t)] \quad (5)$$

式中 s 是拉普拉斯变量，亦称运算变量^[9]。

3.2 分数阶积分控制式记忆元件的数值计算

将电流分数阶积分控制式忆阻器 a、b 二引脚连接正弦电流源 $i(t)$ 作为激励信号，且 $i(t) = I_m \times \sin(2\pi ft)$ ， I_m 为电流源的电流峰值， f 为正弦电流源的频率，角频率 $\omega = 2\pi f$ 。则电流分数阶积分控制式忆阻器内部状态变量：

$$q(t) = {}_0 D_t^\mu i(t) = {}_0 D_t^\mu [I_m \sin(\omega t)] = I_m \omega^\mu \sin\left(\omega t + \frac{\mu}{2} \pi\right) \quad (6)$$

忆阻值：

$$M(t) = R + K_r K_j K_i I_m \omega^\mu \sin\left(\omega t + \frac{\mu}{2} \pi\right) \quad (7)$$

由此得到电流分数阶积分控制式忆阻器二引脚的电压：

$$u(t) = M(t) \times i(t) = \left[R + K_r K_j K_i I_m \omega^\mu \sin\left(\omega t + \frac{\mu}{2} \pi\right) \right] \times I_m \sin(2\pi ft) \quad (8)$$

设定电流分数阶积分控制式忆阻器中的电阻 $R = 10 \Omega$ ，压控电阻控制系数 $K_r = 100 \Omega/V$ ，电流控制电压源控制系数 $K_j = 30 \Omega$ 和电压分数阶积分器比例系数 $K_i = 1$ 。取激励正弦电流源 $i(t)$ 的峰值 $I_m = 10 \text{ mA}$ 。电压分数阶积分器 A 的运算阶 $\mu = -0.4$ ，正弦电流源 $i(t)$ 频率 f 分别为 3 Hz, 30 Hz, 300 Hz 和 3 000 Hz 时，电流分数阶积分控制式忆阻器的激励正弦电流源 $i(t)$ 电流值和对应二引脚电压 $u(t)$ 的伏安关系理论曲线如图 4(a) 所示。电压分数阶积分器 A 的运算阶 $\mu = -0.6$ ，正弦电流源 $i(t)$ 频率 f 分别为 1 Hz, 50 Hz 和 500 Hz 时，电流分数阶积分控制式忆阻器的激励正弦电流源 $i(t)$ 电流值和对应二引脚电压 $u(t)$ 的伏安关系理论曲线如图 4(b) 所示。电压分数阶积分器 A 的运算阶 $\mu = -0.8$ ，正弦电流源 $i(t)$ 频率 f 分别为 1 Hz, 50 Hz 和 100 Hz 时，电流分数阶积分控制式忆阻器的激励正弦电流源 $i(t)$ 电流值和对应二引脚电压 $u(t)$ 的伏安关系理论曲线如图 4(c) 所示。同理可得：电压分数阶积分控制式忆阻器的伏安关系曲线数值分析结果如图 5 所示。电压分数阶积分控制式忆容器的伏库关系曲线数值分析结果如图 6 所示。电流分数阶积分控制式忆感器的韦安关系曲线数值分析结果如图 7 所示。

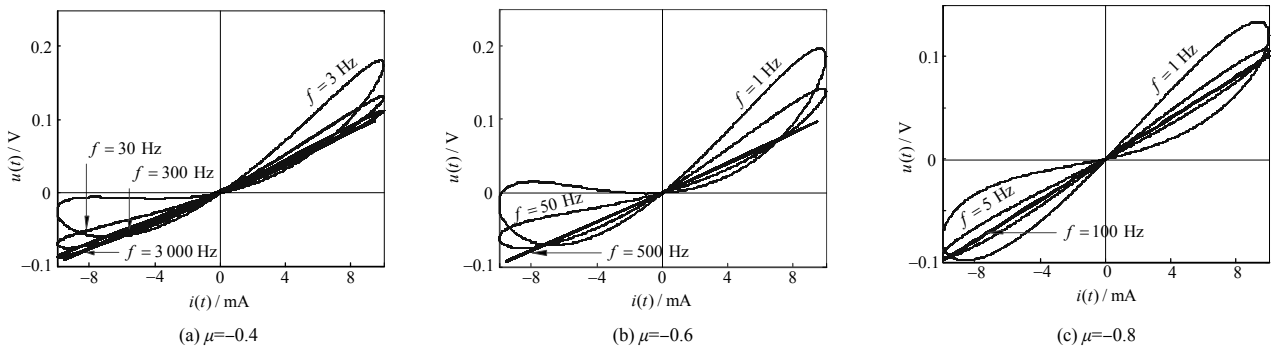


Fig.4 Results of numerical analysis of voltage-Ampere relation curves of CFMR
图 4 电流分数阶积分控制式忆阻器的伏安关系曲线数值分析结果

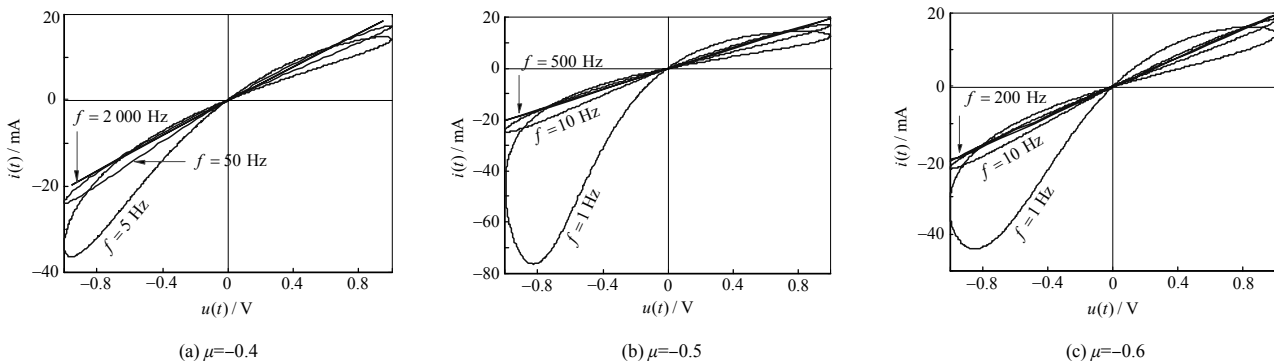


Fig.5 Results of numerical analysis of voltage-Ampere relation curves of VFMR
图 5 电压分数阶积分控制式忆阻器的伏安关系曲线数值分析结果

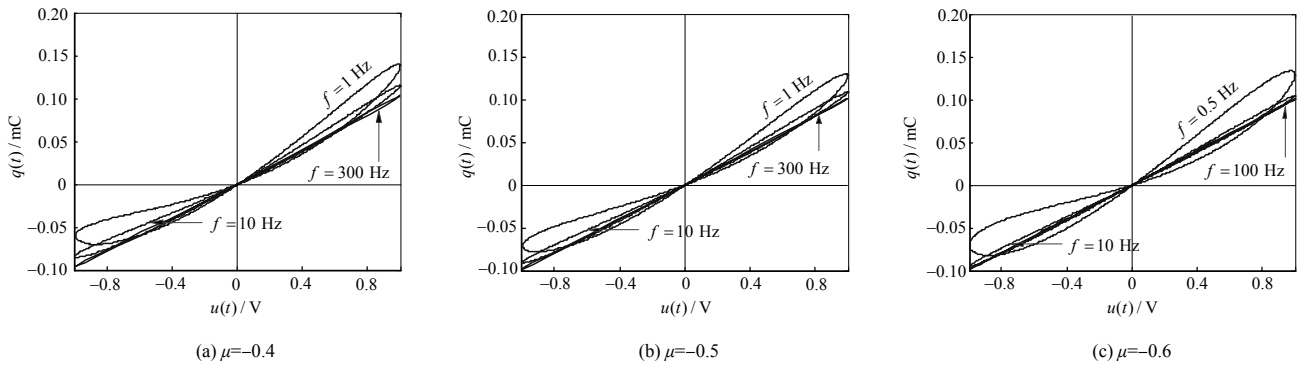


Fig.6 Results of numerical analysis of voltage-coulomb relation curves of VFMC
图 6 电压分数阶积分控制式忆容器的伏库关系曲线数值分析结果

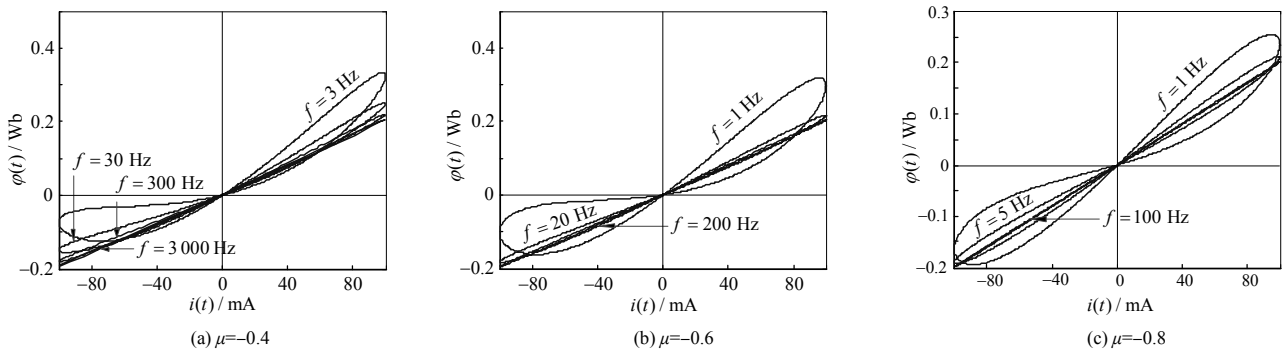


Fig.7 Results of numerical analysis of Weber-Ampere relation curves of CFMI
图 7 电流分数阶积分控制式忆感器的韦安关系曲线数值分析结果

从图 4 至图 7 的分析结果可知,分数阶积分控制式记忆元件在双极性周期信号的激励下,其特性曲线具有如下特点:

1) 呈现出忆阻具有的捏滞回线特性,夹断面积随信号频率的增加而减小,当激励信号频率为无穷大时,特性曲线呈现出一条单值函数曲线。原因与分数阶积分控制运算有关,随着激励信号频率的增加,分数阶积分控制运算后得到的状态变量值变化范围变小。

2) 捏滞回线的夹断面积与积分阶次有关,相同激励信号的频率,在不同的积分阶次情形下,得到的捏滞回线的夹断面积有所区别。主要原因应该是分数阶积分控制运算得到的状态变量值变化范围与积分阶次有关。

3) 捏滞回线在坐标轴的一、四象限并不对称,呈现此特点的主要原因估计与式(3)和式(4)有关,此时,信号运算前后的相位差不再是 90° 的整数倍。

4) 由图 4(b)可知,在信号频率为 1 Hz 时,电流分数阶积分控制忆阻器的伏安特性曲线经过了第二象限,呈现出和积分阶次、信号源频率值有关的局部有源。

4 结论

本文厘清了“分数阶忆阻”的概念,并给出 6 种分数阶积分控制式记忆元件的定义。统一表示了已有的电路元件的禀赋关系,给出已有元件和新元件在蔡氏周期表中的位置。本文工作只是相关工作的开始,还有很多问题等待进一步研究:

- 1) 进一步研究分数阶积分控制式记忆元件的基本性质,积分初值对元件特性的影响也值得去总结;
- 2) 已有的关于分数阶积分控制式忆阻等的研究表明了有损记忆的存在^[20],但内涵还需要进一步明确;
- 3) 人们已使用实际元件完成了分数阶忆阻模拟器的设计^[23],本文给出的分数阶积分控制式记忆元件的模拟器电路如何设计?分抗逼近电路将会是分数阶积分控制式记忆元件模拟器设计的基础^[8,27-34]。

4) 分抗元已在模数转换器、超级电容器、神经网络等方面应用,那么本文得到的新记忆元件将会得到如何的应用?

参考文献:

- [1] CHUA L O. Memristor—the missing circuit element[J]. IEEE Transactions on Circuit Theory, 1971,18(5):507–519.
- [2] CHUA L O,KANG S M. Memristive devices and systems[J]. Proceedings of the IEEE, 1976,64(2):209–223.
- [3] STRUKOV D B,SNIDER G S,STEWART D R,et al. The missing memristor found[J]. Nature, 2008(453):80–83.
- [4] VENTRA D,PERSHIN Y V,CHUA L O. Circuit elements with memory:memristors,memcapacitors and meminductors[J]. Proceedings of the IEEE, 2009,97(10):1717–1724.
- [5] CHUA L O. Device modeling via nonlinear circuit elements[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1980,27(11):1014–1044.
- [6] CHUA L O. Nonlinear circuit foundations for nanodevices. I. The four-element torus[J]. Proceedings of the IEEE, 2003, 91(11):1830–1859.
- [7] CHUA L O. The fourth element[J]. Proceedings of the IEEE, 2012,100(6):1–8.
- [8] 袁晓. 分抗逼近电路之数学原理[M]. 北京:科学出版社, 2015. (YUAN Xiao. Mathematical principles of fractance approximation circuits[M]. Beijing:Science Press, 2015.)
- [9] PODLUBNY I. Fractional differential equations:an introduction to fractional derivatives,fractional differential equations,to methods of their solution and some of their applications[M]. San Diego:Academic Press, 1999.
- [10] SUN H G,ZHANG Y,BALEANU D,et al. A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2018(64):213–231.
- [11] 余波,何秋燕,袁晓. 任意阶标度分形格分抗与非正则格型标度方程[J]. 物理学报, 2018,67(7):070202. (YU Bo,HE Qiuyan,YUAN Xiao. Scaling fractal-lattice fractance approximation circuits of arbitrary order and irregular lattice type scaling equation[J]. Acta Physica Sinica, 2018,67(7):070202.
- [12] 余波,梁锐,蒲亦非,等. 超级电容器恒流充电的时域分数阶电路模型[J]. 电工技术学报, 2019,34(17):3533–3541. (YU Bo,LIANG Rui,PU Yifei,et al. Time-domain fractional circuit model for constant current charging of supercapacitor[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2019,34(17):3533–3541.)
- [13] YU B,PU Y F,HE Q Y. Fractional-order dual-slope integral fast analog-to-digital converter with high sensitivity[J]. Journal of Circuits Systems and Computers, 2019,29(5):2050083-1–20.
- [14] COOPMANS C,PETRAS I,CHEN Y Q. Analogue fractional-order generalized memristive devices[C]// 2009 ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers & Information in Engineering Conference. San Diego,California, USA:[s.n.], 2009:1127–1136.
- [15] PETRAS I. Fractional-order memristor-based Chua's circuit[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II:Express Briefs, 2010,57(12):975–979.
- [16] MACHADO J T. Fractional generalization of memristor and higher order elements[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013,18(2):264–275.
- [17] FOU DA M E,RADWAN A G. On the fractional-order memristor model[J]. Journal of Fractional Calculus and Applications, 2013,4(1):1–7.
- [18] ABDALOUAHAB M S,LOZI R,CHUA L. Memfractance:a mathematical paradigm for circuit elements with memory[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2014,24(9):1430023.
- [19] PU Y F,YUAN X. Fracmemristor:fractional-order memristor[J]. IEEE Access, 2016(4):1872–1888.
- [20] WANG F Z,SHI L,WU H,et al. Fractional memristor[J]. Applied Physics Letters, 2017,111(24):243502-1–5.
- [21] SI G,DIAO L,ZHU J. Fractional-order charge-controlled memristor:theoretical analysis and simulation[J]. Nonlinear Dynamics, 2017,87(4):2625–2634.
- [22] RAHSAD S H,HAMED E M,FOUDA M E,et al. On the analysis of current-controlled fractional-order memristor emulator[C]// 2017 6th International Conference on Modern Circuits and Systems Technologies(MOCAST). Thessaloniki,Greece:IEEE, 2017:1–4.
- [23] PU Y F,YUAN X,YU B. Analog circuit implementation of fractional-order memristor:arbitrary-order lattice scaling fracmemristor[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I:Regular Papers, 2018,65(9):2903–2916.
- [24] SANCHES L C,CARBAJAL G V H,CARRASCO A M A,et al. Fractional-order memristor emulator circuits[J]. Complexity, 2018(1):1–10.
- [25] NARIMAN A K,LOBNA A,SAID A G,et al. General fractional order mem-elements mutators[J]. Microelectronics Journal, 2019(90):211–221.

- [26] GUO Z,SI G,DIAO L,et al. Generalized modeling of the fractional-order memcapacitor and its character analysis[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2018(59):177–189.
- [27] 余波,袁晓,陶磊. 分抗逼近电路的 F 特征分析原理与应用实例[J]. *电子与信息学报*, 2015,37(Z):21–24. (YU Bo,YUAN Xiao,TAO Lei. Analysis principles of f characteristics of the fractance approximation circuits and application examples[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2015,37(Z):21–24.)
- [28] 余波,何秋燕,袁晓,等. 分抗的 F 特征逼近性能分析原理与应用[J]. *四川大学学报(自然科学版)*, 2018,55(2):301–306. (YU Bo,HE Qiuyan,YUAN Xiao,et al. Approximation performance analysis and applications of F characteristic in fractance approximation circuit[J]. *Journal of Sichuan University(Natural Science Edition)*, 2018,55(2):301–306.)
- [29] PU Y F. Measurement units and physical dimensions of fractance–part I:position of purely ideal fractor in Chua’s axiomatic circuit element system and fractional–order reactance of fractor in its natural implementation[J]. *IEEE Access*, 2016(4): 3379–3397.
- [30] PU Y F. Measurement units and physical dimensions of fractance–part II: fractional-order measurement units and physical dimensions of fractance and rules for fractors in series and parallel[J]. *IEEE Access*, 2016(4):3398–3416.
- [31] 何秋燕,袁晓. Carlson 与任意阶分数微积分算子的有理逼近[J]. *物理学报*, 2016,65(16):160202. (HE Qiuyan,YUAN Xiao. Carlson iterating and rational approximation of arbitrary order fractional calculus operator[J]. *Acta Physica Sinica*, 2016,65(16):160202.)
- [32] HE Q Y,YU B,YUAN X. Carlson iterating rational approximation and performance analysis of fractional operator with arbitrary order[J]. *Chinese Physics B*, 2017(4):66–74.
- [33] 易舟,袁晓. 分形分抗逼近电路零极点的数值求解与验证[J]. *太赫兹科学与电子信息学报*, 2017,15(1):98–103. (YI Zhou,YUAN Xiao. Numerical solution and verification of zero-pole for some fractal fractance approximation circuits[J]. *Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology*, 2017,15(1):98–103.)
- [34] 高小龙,袁晓,施卜椿. Oldham 分形链与 Liu–Kaplan 分形链分抗的阻纳函数求解[J]. *太赫兹科学与电子信息学报*, 2019,17(3):474–481. (GAO Xiaolong,YUAN Xiao,SHI Buchun. Immittance functions solution of Oldham fractal chain and Liu–Kaplan fractal chain fractance[J]. *Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology*, 2019, 17(3):474–481.)