

文章编号: 1672-8785(2020)03-0038-08

乘性色噪声和加性双值噪声作用下 延迟双稳系统中的随机共振

徐 江¹ 郭 锋²

(1. 四川压电与声光技术研究所, 重庆 400060;

2. 西南科技大学信息工程学院, 四川绵阳 621010)

摘 要: 研究了在乘性和加性色噪声以及加性非对称双值噪声作用下方波信号驱动的延迟双稳系统中的随机共振现象。基于小延迟近似, 在绝热近似条件下推导出了系统输出信噪比(Signal-to-Noise Ratio, SNR)的解析形式。分析结果表明, 随着双值噪声强度与非对称性参数、方波信号幅度以及乘性和加性色噪声强度的变化, SNR 表现出了随机共振行为。随着延迟时间、色噪声相关时间和系统参数的增大, SNR 作非单调变化。

关键词: 随机共振; 延迟; 色噪声; 信噪比

中图分类号: TN911.7 文献标志码: A DOI: 10.3969/j.issn.1672-8785.2020.03.006

Stochastic Resonance in a Time-Delayed Bistable System with Multiplicative Colored Noise and Additive Dichotomous Noise

XU Jiang¹, GUO Feng²

(1. Sichuan Institute of Piezoelectric and Acoustooptic Technology, Chongqing 400060, China;

2. School of Information Engineering, Southwest University of
Science and Technology, Mianyang 621010, China)

Abstract: The stochastic resonance (SR) in a time-delayed bistable system driven by square-wave signal under the action of multiplicative and additive colored noise and additive asymmetric dichotomous noise is studied. Based on the small delay-time approximation, the expression of the output signal-to-noise ratio (SNR) of this system is derived under the adiabatic approximation condition. The analysis results shows that the SNR exhibits SR behavior with the change of the intensity and asymmetry of the dichotomous noise, the amplitude of the square-wave signal, and the intensity of the multiplicative and additive colored noise. The SNR varies non-monotonously with the delayed-time, correlation time of colored noises, and system parameters.

Key words: stochastic resonance; time-delay; colored noise; signal-to-noise ratio

收稿日期: 2020-03-15

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(61771411)

作者简介: 徐江(1974-), 男, 重庆人, 博士, 主要研究方向为电路与系统、惯性技术、汽车电子和医疗电子。E-mail: xj_1232005@163.com

0 引言

随机共振是一种非线性现象,即在含噪声的非线性系统中,适量的噪声对弱信号具有放大作用^[1]。这种现象已经在不同的学科系统中得到发现,比如物理、化学、生物以及生命科学^[1-5]等等。张宇等人研究了一种利用随机共振进行弱信号检测的 Labview 虚拟实验系统^[6]。邵耀椿等人研究了激光与脱氧核糖核酸(DeoxyriboNucleic Acid, DNA)作用下系统的随机共振现象^[7]。藺素珍等人利用阈上随机共振来增强图像的弱信号^[8]。郑钢英等人提出了一种通过将可见-近红外光谱结合非线性分析来检测大黄鱼储存期的方法^[9]。徐好民等人认为卫星的热红外温度异常点是天线附近背景噪声与地球信息随机共振的结果^[10]。许多随机系统在输出端利用延迟反馈将信号或其他重要特性(如信息、能量等)馈入输入端。延迟系统中的随机共振受到了许多学者的广泛关注。Guillouzic S 等人^[11]研究了外部噪声扰动对延迟微分方程的影响。对于小的延迟,他们推导出了稳态概率密度和条件平均漂移。Frank T D^[12]利用时滞 Fokker-Planck 方程研究了具有时滞反馈的非线性随机系统,并基于一阶摄动理论推导出了平稳分布的解析表达式。

正弦信号驱动的或者无延迟的双稳系统中的随机共振得到了广泛研究^[1-5,11-12]。方波信号可以看作是在两个电平之间切换的数字信号。随着集成电路的快速发展,方波信号在数字通信系统中起着越来越重要的作用。比如,它可以作为数字逻辑系统的输入信号,也可作为时钟信号来准确地触发同步电路。但是据我们所知,较少有学者研究延迟色噪声及方波信号对双稳系统输出的影响。基于此,本文拟研究延迟双稳系统中色噪声及输入方波信号对系统输出信噪比的非单调影响。

1 色噪声作用下的延迟双稳系统及其输出信噪比

我们研究由随机微分方程描述的延迟双稳

系统:

$$\frac{dx}{dt} = ax(t-\theta) - bx^3 + x\xi(t) + \eta(t) + f(t) \quad (1)$$

式中, a 和 b 均为系统参数($a > 0, b > 0$); θ 为系统的延迟时间。这里 θ 值很小,故该系统仍可看成是一个双稳系统。在后面的讨论中,满足此条件。 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 为不相关的色噪声,均值为零,相关函数为

$$\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = 2D \exp\left(-\frac{|t_1-t_2|}{\tau_1}\right) \quad (2)$$

$$\langle \eta(t_1)\eta(t_2) \rangle = 2P \exp\left(-\frac{|t_1-t_2|}{\tau_2}\right) \quad (3)$$

式中, D 和 t_1 分别为乘性噪声 $\xi(t)$ 的强度和自相关时间; P 和 t_2 分别为加性噪声 $\eta(t)$ 的强度和自相关时间。系统输入信号为

$$f(t) = q(t) + As(t) \quad (4)$$

式中, $s(t)$ 是周期为 T 的方波:

$$s(t) = \begin{cases} -1, & 0 < t \leq T/2 \\ 1, & T/2 < t \leq T \end{cases} \quad (5)$$

$q(t)$ 为非对称双值噪声^[13],取值为 $-B$, KB ($K > 0, B > 0$)。其中 K 为双值噪声的非对称参数。设 r 为 $q(t)$ 从 $-B$ 到 KB 的转移率, r' 为 $q(t)$ 从 KB 到 $-B$ 的转移率。设

$$\langle q(t) \rangle = \frac{KB r - B r'}{r + r'} = 0 \quad (6)$$

可见 $Kr = r'$ 。 $q(t)$ 的相关函数为

$$\langle q(t_1)q(t_2) \rangle = \sigma \lambda \exp(-\lambda |t_1 - t_2|) = KB^2 \times \exp(-\lambda |t_1 - t_2|) \quad (7)$$

式中, λ 为噪声 $q(t)$ 的相关率, $\lambda = r + r'$; σ 为双值噪声的强度。

$$\sigma = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle q(s)q(0) \rangle ds = \frac{KB^2}{\lambda} \quad (8)$$

非对称双值噪声 $q(t)$ 可以分解为两部分之和,即一个对称的双值噪声和一个常量:

$$q(t) = \Gamma(t) + m, m = \frac{K-1}{2}B \quad (9)$$

式中, $\Gamma(t)$ 为对称双值噪声, $\Gamma(t) = \{c, -c\}$, $c = \frac{(K+1)B}{2}$ 。由式(5)和式(8),有

$$\langle \Gamma(t) \rangle = -m, \langle \Gamma(t_1)\Gamma(t_2) \rangle = m^2 + \sigma \lambda \times \exp[-\lambda |t_1 - t_2|] \quad (10)$$

模型(1)用于描述在扰动力 $\eta(t)$ 和外部力 $f(t)$ 作用下粒子在双稳系统中的布朗运动。

基于 Fox 近似条件和 Novikov 原理, 系统(1)所对应的 Fokker-Plank 方程可以表示为^[14-15]

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}[F(x)\rho(x,t)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}[G(x)\rho(x,t)] \quad (11)$$

其中

$$F(x) = gx - hx^3 + kf(t) \quad (12)$$

$$g = a(1+a\theta) + \frac{D}{1+2a\tau_1}, h = b(1+a\theta), k = 1+a\theta \quad (13)$$

$$G(x) = nx^2 + p_1, n = \frac{D}{1+2a\tau_1}, P_1 = \frac{P}{1+2a\tau_2} \quad (14)$$

注意这里对延迟时间 τ 没有限制, 因为本文中的条件

$$1 - \tau_1 \left[g_1'(x_{\pm}) - \frac{g_2'(x_{\pm})}{g_2(x_{\pm})} g_1(x_{\pm}) \right] > 0, i = 1, 2 \quad (15)$$

$g_1(x) = \frac{dU_0(x)}{dx} = ax - bx^3$ 和 $g_2(x) = 1$, 对于所有的 $\tau_i > 0 (i = 1, 2)$ 始终满足^[16-17]。由式(12)可见, $(x_{\pm}) = \pm\sqrt{g/h}$ 为系统的两个稳态, 其非稳态为 $x_0 = 0$ 。设系统满足绝热极限近似条件, 则由式(12)~式(15)可以得到绝热极限下系统的准稳态概率分布函数:

$$\rho_s = \frac{M}{\sqrt{G(x)}} \exp\left[-\frac{V(x)}{D}\right] \quad (16)$$

式中, M 为归一化系数; $V(x)$ 为势能函数。

$$V(x) = \int_{-\infty}^x dx \frac{DF(x)}{G(x)} \\ = \frac{Dhx^2}{2n} - \frac{D(gn+hP_1)}{2n^2} \ln(nx^2+P_1) - \frac{Dkf(t)}{\sqrt{nP_1}} \\ \times \arctan(\sqrt{n/P_1}x) \quad (17)$$

在绝热极限条件下, 系统在 x_{\pm} 间的转移率可表示为

$$W_{\pm}[f(t)] = \frac{\sqrt{|U'(x_0)U'(x_{\pm})|}}{2\pi} \exp\left(\frac{V(x_{\pm})-V(x_0)}{D}\right)$$

$$= W_0 \exp[\mp v f(t)] \quad (18)$$

式中, $v = \frac{k}{\sqrt{nP_1}} \arctan\left[\sqrt{\frac{ng}{hP_1}}\right]$; $U'(x) = \frac{d^2U(x)}{dx^2}$, $\frac{dU(x)}{dx} = -gx + hx^3$; W_0 为仅在乘性和加性噪声作用时双稳系统的特征转移频率。

$$W_0 = \frac{g}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{g}{2n} - \frac{gn+hP_1}{2n^2} \ln\left(1 + \frac{ng}{hP_1}\right)\right] \quad (19)$$

利用文献[18]的方法, 可得系统输出信号所对应的自相关函数:

$$\langle x(\tau)x(t+\tau) \rangle = [B_1(m,c,A) + B_3(m,c,A)] \\ \exp(-\lambda|\tau|) + B_2(m,c,A)\varphi(\tau) + C(m,c,A)\delta(\tau) \quad (20)$$

其中

$$B_1(m,c,A) = \frac{1}{16} [\omega(m+c+A) - \omega(m-c-A) \\ + \omega(m+c-A) - \omega(m-c+A)]^2 \quad (21)$$

$$B_2(m,c,A) = \frac{1}{16} [\omega(m+c+A) - \omega(m-c-A) \\ - \omega(m+c-A) + \omega(m-c+A)]^2 \quad (22)$$

$$B_3(m,c,A) = \frac{1}{16} [\omega(m+c+A) + \omega(m-c-A) \\ - \omega(m+c-A) - \omega(m-c+A)]^2 \quad (23)$$

$$C(m,c,A) = \frac{1}{4} [C_0(m+c+A) + C_0(m-c-A) \\ + C_0(m+c-A) + C_0(m-c+A)] \quad (24)$$

$$\varphi(\tau) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1)^{-2} \exp[-i(2j+1)\Omega\tau] \quad (25)$$

$$\omega(\mu) = \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{\exp(2v\mu) - 1}{\exp(2v\mu) + 1},$$

$$C_0(\mu) = \frac{8W_0^2}{[W_-(\mu) + W_+(\mu)]^3} \quad (26)$$

对式(20)两边进行傅里叶变换, 可得系统输出的概率谱:

$$S(\omega) = S_N(0) + S_S(\omega) \quad (27)$$

其中

$$S_N(0) = \frac{2}{\lambda} [B_1(m,c,A) + B_3(m,c,A)] + C(m,c,A) \quad (28)$$

$$S_S(\omega) = B_2(m, c, A)\Phi(\omega),$$

$$\Phi(\omega) = \frac{8}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1)^{-2} \delta[\omega - (2j+1)\Omega] \quad (29)$$

这里 $S_N(0)$ 为零频率处的噪声本底功率谱密度, $S_N(\omega)$ 为输出信号的功率谱。将输出信噪比定义为信号的功率与噪声在信号频率处的功率谱的比值:

$$SNR = \frac{8}{\pi} \frac{B_2(m, c, A)}{C(m, c, A) + 2[B_1(m, c, A) + B_3(m, c, A)]/\lambda} \quad (30)$$

2 分析与讨论

双值噪声广泛存在于物理系统中。例如, 在数字电路中, 高频数字信号会影响其附近的数字和模拟电路。这种波动就可以看作是一种双值噪声。由于双值噪声计算相对简单, 其极限可以得到高斯白噪声和白冲击噪声。双值噪声对系统的影响受到了越来越多学者的研究^[19-20]。图 1 和图 2 所示分别为 SNR 随双值噪声强度和不对称性参数的变化曲线。由图 1 可见, 在 SNR 曲线上呈现出两个极值: 一个极小值和一个极大值。随着噪声强度的增大,

SNR 先取得极小值。同时, 与图 1 类似, 随着非对称性参数 K 的增大, SNR 也取得了两个极值(见图 2), 即出现了传统随机共振现象与广义随机共振。对于一个实际的物理系统来说, 其噪声一般都有一定的相关时间, 即是色噪声。比如 $1/f$ 噪声, 其单位带宽的功率随频率的增大而减小, 为 $1/f^\beta$ 。对于闪烁或粉红色噪声, $\beta=1$; 对于布朗噪声, $\beta=2$ ^[21]。从图 2 中可以看出, SNR 随着相关时间 τ_2 的增大而作非单调变化。实际上, 由图 2 可见, 在 $0 < K < 0.1$ 和 $0.5 < K < 1.8$ 区间, SNR 随着加性噪声相关时间 τ_2 的增大而单调变小, 而在 $0.1 < K < 0.5$ 和 $2.5 < K < 3.5$ 区间, SNR 随着相关时间的增大而提高。

当受加性噪声影响的双稳态系统的势能受到小周期(以远小于阱内弛豫速率的调制频率)调制时, 粒子的运动速率也被周期性调制。在一定的最佳噪声水平下, 两个势阱之间的跃迁也几乎周期性地发生, 与 Kramer 速率相关的时间尺度约等于信号周期的一半。此时, 由于噪声与系统的共同作用, 出现了随机共振现象。由图 3 可见, 在 SNR 曲线上呈现出一个共振峰, 即发生了随机共振现象。由图 4 可

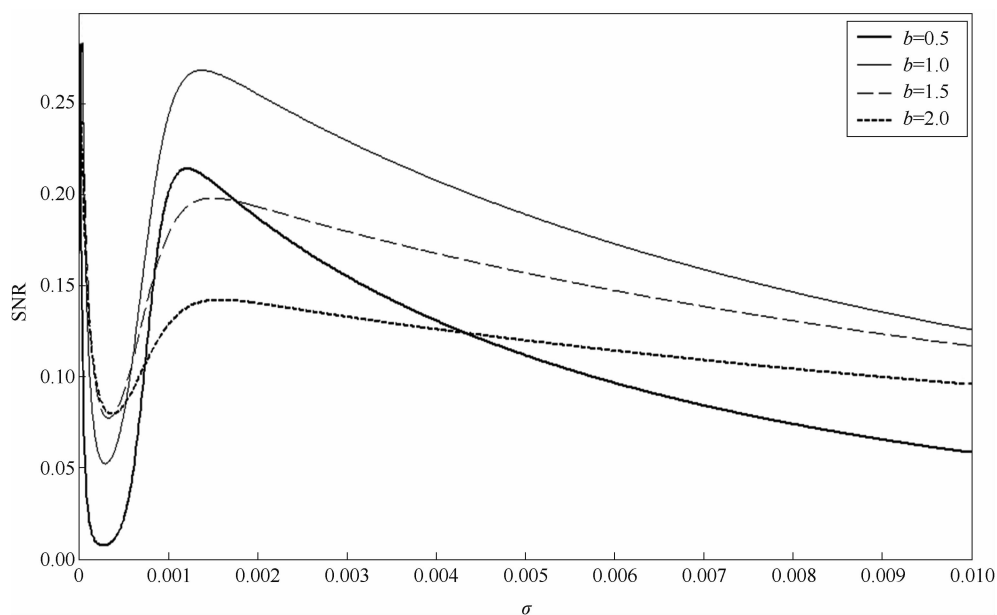


图 1 系统参数 b 取不同值时 SNR 与双值噪声强度 σ 的关系曲线(参数为 $a=1$ 、 $A=0.15$ 、 $\theta=0.01$ 、 $D=0.01$ 、 $P=0.1$ 、 $\lambda=5$ 、 $K=0.05$ 、 $\tau_1=0.1$ 、 $\tau_2=0.1$)

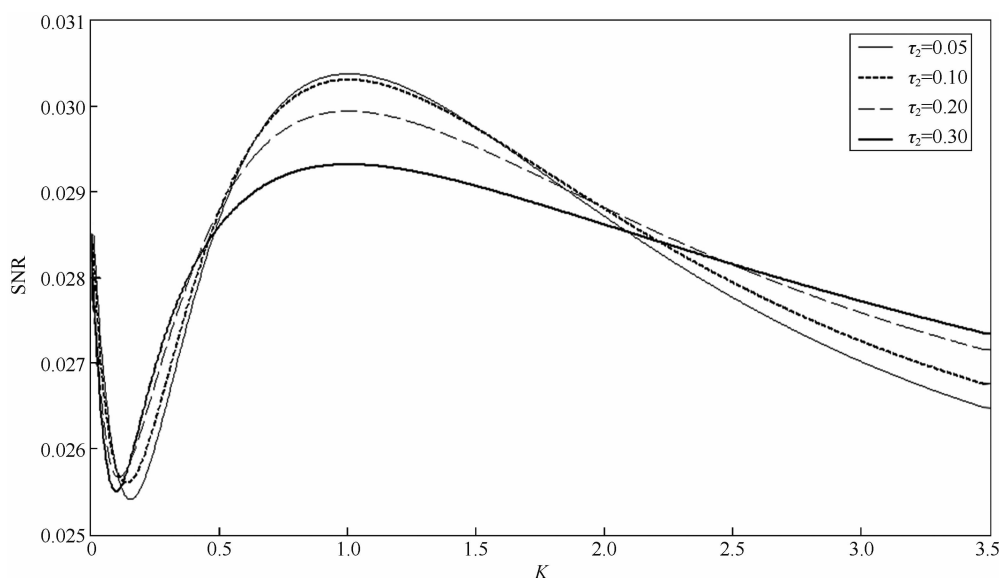


图2 加性噪声的相关时间 τ_2 取不同值时 SNR 与双值噪声非对称性参数 K 的关系曲线(参数为 $a=1$ 、 $b=1.8$ 、 $A=0.15$ 、 $\theta=0.01$ 、 $D=0.2$ 、 $P=0.3$ 、 $\lambda=0.5$ 、 $\sigma=0.1$ 、 $\tau_1=0.1$)

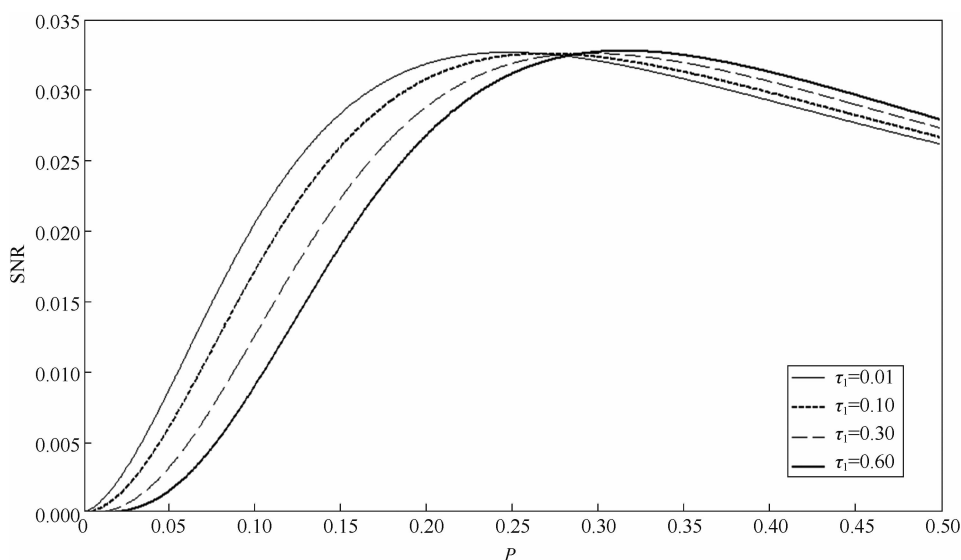


图3 乘性噪声的相关时间 τ_1 取不同值时 SNR 与加性噪声强度 P 的关系曲线(参数为 $a=1.5$ 、 $b=1$ 、 $A=0.18$ 、 $\theta=0.01$ 、 $D=0.5$ 、 $\lambda=1$ 、 $K=0.1$ 、 $\sigma=0.25$ 、 $\tau_2=0.01$)

见, SNR 随着乘性噪声强度的增大也出现了随机共振现象。

方波在数字开关电路中普遍存在。它一般由二进制逻辑器件产生, 常被用作计时基准或“时钟信号”。我们利用图 5 和图 6 来研究方波信号对 SNR 的非线性作用。从这两张图中可以看出, SNR 随着方波信号幅度的变化而非单调变化。随着方波幅度的增大, SNR 先增大到一个最大值然后减小到一个最小值, 最后

单调增大。因此, 通过调节方波幅度可使 SNR 取得最大值或最小值。该现象在参考文献 [18, 22] 中没有涉及。同时, 从图 1 和图 5 中可以看出, SNR 也非单调地依赖系统参数 a 和 b 。我们利用势能函数来分析这种非线性现象^[23]。由式(15)可见, 势能函数随 a 和 b 的变化而非线性变化, 故势垒高度 $\Delta V = V(x_0) - V(x_{\pm})$ 也随这些参数变化而非线性变化。所以, 它们会对 SNR 产生非单调的影响。另外, 由

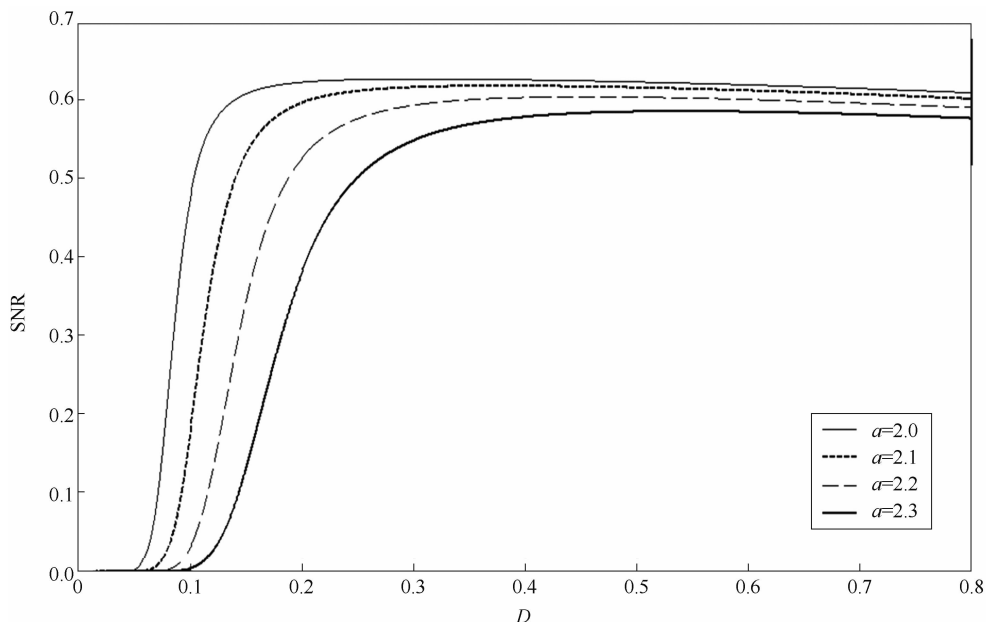


图 4 系统参数 α 取不同值时 SNR 与乘性噪声强度 D 的关系曲线(参数为 $b=7$ 、 $A=0.1$ 、 $\theta=0.01$ 、 $P=0.005$ 、 $\lambda=1$ 、 $K=0.2$ 、 $\sigma=0.01$ 、 $\tau_1=0.01$ 、 $\tau_2=0.1$)

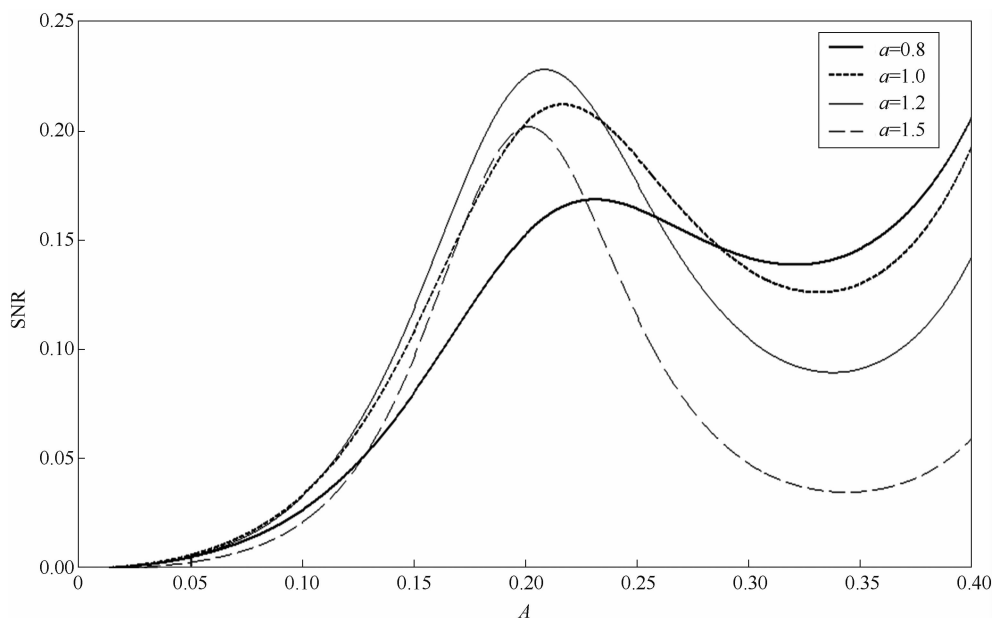


图 5 系统参数 α 取不同值时 SNR 与方波信号幅值 A 的关系曲线(参数为 $b=2$ 、 $\theta=0.01$ 、 $D=0.01$ 、 $P=0.1$ 、 $\lambda=0.8$ 、 $K=0.06$ 、 $\sigma=0.01$ 、 $\tau_1=0.1$ 、 $\tau_2=0.1$)

图 6 可见, 在 $0 < A < 0.3$ 区间, SNR 随延迟时间 θ 的增大而增强, 而在 $0.3 < A < 0.4$ 区间随之减弱, 因此 SNR 也随 θ 的变化而非单调变化。

3 结论

本文分析了延迟双稳系统在双值噪声、乘性和加性噪声以及方波信号作用下的系统输

出 SNR 的随机共振行为。在绝热极限近似条件下, 基于 Fox 近似条件及 Novikov 理论, 推导出了系统 SNR 的解析表达式。分析结果表明, 在 SNR 与方波信号幅度以及与双值噪声强度和幅度的关系曲线上呈现出两个极值; 而在 SNR 与乘性噪声强度及加性噪声强度的关系曲线上仅有一个极值(即最大值)。另外,

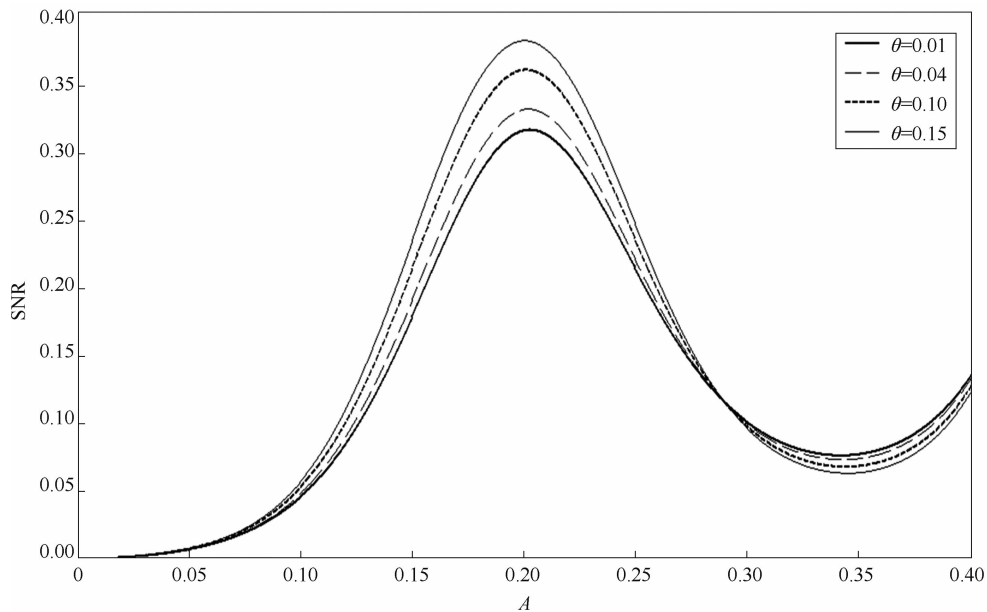


图 6 延迟时间 θ 取不同值时 SNR 与方波信号幅度 A 的关系曲线 (参数为 $a=1$ 、 $b=1.5$ 、 $D=0.01$ 、 $P=0.1$ 、 $\lambda=0.8$ 、 $K=0.06$ 、 $\sigma=0.01$ 、 $\tau_1=0.15$ 、 $\tau_2=0.2$)

SNR 随色噪声相关时间与延迟时间的变化而非单调变化。下一步拟进行色噪声在多稳系统中的随机共振研究。

参考文献

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A. The Mechanism of Stochastic Resonance [J]. *Journal of Physics A*, 1981, **14**(11): 453-457.
- [2] McNamara B, Wiesenfeld K. Theory of Stochastic Resonance [J]. *Physical Review A*, 1989, **39**(5): 4854-4861.
- [3] Dykman M I. Theory of Stochastic Resonance [J]. *Physics Review Letter*, 1990, **65**(10): 2606-2612.
- [4] Hu G, Nicolis G, Nicolis C. Periodically Forced Fokker-Planck Equation and Stochastic Resonance [J]. *Physical Review A*, 1990, **42**(7): 2030-22040.
- [5] Zhou T, Moss F, Jung P. Escape-time Distributions of a Periodically Modulated Bistable System with Noise [J]. *Physical Review A*, 1990, **42**(8): 3161-3168.
- [6] 张宇, 赵远, 吕海峰, 等. 利用随机共振进行弱信号检测的 Labview 虚拟实验系统 [J]. *红外与激光工程*, 2006, **35**(9): 349-353.
- [7] 邵耀椿, 封国林. 激光与 DNA 作用系统的随机共振研究 [J]. *红外与毫米波学报*, 1996, **15**(9): 450-454.
- [8] 蔺素珍, 杨风暴, 吉琳娜, 等. 基于阈上随机共振的弱信号双色中波红外图像融合 [J]. *红外与毫米波学报*, 2011, **30**(10): 546-550.
- [9] 郑钢英, 葛阳杨, 刘伟, 等. 可见-近红外光谱结合非周期随机共振检测大黄鱼储藏期 [J]. *中国食品报*, 2015, **15**(5): 230-235.
- [10] 徐好民, 王煜. 随机共振新实例——卫星热红外温度异常点的发现及其意义 [J]. *国际地震动态*, 2003, **12**(3): 4-7.
- [11] Guillouzic S, L'Heureux I, Longtin A. Small Delay Approximation of Stochastic Delay Differential Equations [J]. *Physical Review E*, 1999, **59**(8): 3970-3974.
- [12] Frank T D. Delay Fokker-Planck Equations, Perturbation Theory, and Data Analysis for Nonlinear Stochastic Systems with Time Delays [J]. *Physical Review E*, 2005, **71**(9): 031106.
- [13] Li J H, Han Y X. Phenomenon of Stochastic Resonance Caused by Multiplicative Asymmetric Dichotomous Noise [J]. *Physical Review E*, 2006, **74**(6): 051115.
- [14] Luo X Q, Zhu S Q. Stochastic Resonance Driv-

- en by Two Different Kinds of Colored Noise in a Bistable System [J]. *Physical Review E*, 2003, **67**(10): 021104.
- [15] Han L B, Gong X L, Cao L. et. al. Influence of Coloured Correlated Noises on Probability Distribution and Mean of Tumour Cell Number in the Logistic Growth Model [J]. *Chinese Physics Letters*, 2007, **24**(5): 632-635.
- [16] Liang G Y, Cao L, Wu D J. Approximate Fokker-Planck Equation of System Driven by Multiplicative Colored Noises with Colored Cross-correlation [J]. *Physica A*, 2004, **335**(6): 371-384.
- [17] Mei D C, Xie C W, Zhang L. The Stationary Properties and The State Transition of The Tumor Cell Growth Mode [J]. *European Physics Journal B*, 2004, **41**(8): 107-112.
- [18] Ginzburg S L, Pustovoi M A. Stochastic Resonance in Two-state Model of Membrane Channel with Comparable Opening and Closing Rates [J]. *Physical Review E*, 2002, **66**(9): 021107.
- [19] Gitterman M. Harmonic Oscillator with Multiplicative Noise; Nonmonotonic Dependence on The Strength and The Rate of Dichotomous Noise [J]. *Physical Review E*, 2003, **67**(3): 057103.
- [20] Calisto H, Mora F, Tirapegui E. Stochastic Resonance in a Linear System: An Exact Solution [J]. *Physical Review E*, 2006, **74**(6): 022102.
- [21] Daniel L R, Russ E D. Red Noise and Regime Shifts [J]. *Deep Sea Research Part I: Oceanographic Research Papers*, 2003, **50**(6): 691-699.
- [22] Zeng W M. Square-wave-driven Stochastic Resonance [J]. *Physical Review A*, 1999, **44**(8): 6443-6450.
- [23] Guo F, Zhou Y R, Jiang S Q, et. al. Stochastic Resonance in a Mono-stable System with Multiplicative and Additive Noise [J]. *Journal of Physical A*, 2006, **39**(1): 13861-13868.