

文章编号: 1672-8785(2020)02-031-06

具有乘性信号和随机频率的分数阶 振荡器中的随机共振

徐 江¹ 龚 巧² 郭 锋³

(1. 四川压电与声光技术研究所, 重庆 400060;

2. 中电科技集团重庆声光电有限公司, 重庆 401332;

3. 西南科技大学信息工程学院, 四川 绵阳 621010)

摘 要: 研究了具有乘性信号和随机特征频率的分数阶振荡器中的随机共振现象。在低驱动频率的条件下, 利用分数阶算子的性质推导出了系统输出信号的长时间解析表达式。结果表明, 由于乘性信号、噪声和分数阶振荡器的相互作用, 系统输出信号发生了共振现象。该现象出现在输出信号与噪声强度、噪声相关率、分数指数、粘滞阻尼系数以及系统特征频率的关系曲线上。此外, 还讨论了输出信号对摩擦系数的非单调依赖性。

关键词: 随机共振; 分数阶振荡器; 乘性信号; 随机频率

中图分类号: TN911.7 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1672-8785.2020.02.005

Stochastic Resonance for a Fractional Oscillator with Multiplicative Signal and Random Frequency

XU Jiang¹, GONG Qiao², GUO Feng³

(1. Sichuan Institute of Piezoelectric and Acoustooptic Technology, Chongqing 400060, China;

2. Chongqing Acoustic-Optic-Electronic Co., LTD., China Electronics Technology
Group Corporation, Chongqing 401332, China;

3. School of Information Engineering, Southwest University of
Science and Technology, Mianyang 621010, China)

Abstract: The stochastic resonance phenomenon for a fractional-order oscillator with multiplicative signal and random characteristic frequencies is studied. Under the condition of low driving frequency, the long-term analytical expression for the system output signal of the oscillator is derived by using the characteristics of the fractional-order operator. The results show that the resonance phenomenon of system output signal is observed, due to the interaction of multiplicative signal, noise and fractional-order oscillator. This phenomenon appears on the relationship curves of the output signal versus the noise intensity, versus the noise correlation rate, versus the fractional exponent, versus the viscous damping coefficient, as well as versus the system

收稿日期: 2020-02-19

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(61771411)

作者简介: 徐江(1974-), 男, 重庆人, 博士, 主要研究方向为电路与系统、惯性技术、汽车电子和医疗电子。E-mail: xj_1232005@163.com

characteristic-frequency. In addition, the non-monotonous dependence of the output signal on the friction coefficient is also discussed.

Key words: stochastic resonance; fractional-order oscillator; multiplicative signal; random frequency

0 引言

随机共振最初是作为地球周期性气候变化的数学模型提出的^[1],用于描述非线性系统中的合作效应。在这种非线性现象中,由于非线性系统、输入信号和噪声之间的协同作用,在一定的噪声作用下,可以实现更好的系统输出性能^[1-4]。例如,蔺素珍等人利用阈上随机共振来增强图像的弱信号^[2];郑钢英等人提出了一种通过将可见-近红外光谱结合非线性分析来检测大黄鱼储存期的方法^[3];徐好民等人认为卫星热红外温度异常点是天线附近背景噪声与地球信息随机共振的结果^[4]。

相对于整数阶模型而言,分数阶微积分模型可以更准确地描述许多材料的固有特性和本构关系。相关结果表明,实际使用的分数阶模型比通常使用的整数阶模型更有优势^[5-6]。因此,分数阶微积分的理论研究和工程应用得到了广泛关注^[7-8]。分数阶微积分建模方法及理论在高能物理、反常扩散、系统控制、流变学、地球物理、生物医学工程、经济学等领域都得到了成功应用。

就分数系统的随机共振研究而言,加性信号作用下分数阶系统中的随机共振问题受到了广泛关注^[9-15]。然而,在某些情况下,输入信号会依赖于系统参数,所以应该具有与系统参数相乘的形式,即乘性信号。在通信系统中,由信道特性变化引起的干扰,如电离层和对流层的干扰,取决于传输信道,即取决于系统参数。当这种扰动周期性地发生时,可以将其看作是一个乘性周期信号。在膜蛋白系统中,由于许多蛋白质(特别是嵌入活细胞膜内的蛋白质)所固有的物理和化学参数的随机波动和周期振荡,输入信号也具有状态依赖性,同样也是乘性信号。另外,学者们还研究了双稳态系

统^[16]、随机昆虫爆发系统^[17]以及由乘法信号驱动的基因转录调控模型^[18]的随机共振。然而,据我们所知,针对由乘性信号驱动的分数阶振荡器中的随机共振现象的研究还比较少。因此,本文旨在研究具有乘性信号的分数阶振荡器中的随机共振现象。

1 具有乘性信号和随机频率的分数振荡器

考虑下面的二阶分数振荡器:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{dt^2} + [r + \xi(t) + A\cos(\Omega t)] \frac{dx(t)}{dt} \\ + \beta \int_0^t \frac{\dot{x}(u)}{\Gamma(1-\alpha)(t-u)^\alpha} du + [\omega^2 + \eta(t)]x(t) \\ = \eta(t)A\cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (1)$$

式中, r 和 β 分别为线性粘性阻尼和摩擦系数; ω 为系统特征频率; $\Gamma(\cdot)$ 为伽玛函数; α 为分数指数或记忆指数($0 < \alpha < 1$); A 和 Ω 分别为输入信号的幅度和频率。本文设输入信号受噪声调制,即为信号调制噪声;同时,它还周期性地影响粘性阻尼系数 r 。 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 为零均值双值噪声,其相关函数为

$$\begin{aligned} \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle &= De^{-\lambda|t_1-t_2|} \\ \langle \eta(t_1)\eta(t_2) \rangle &= Pe^{-\lambda|t_1-t_2|} \\ \langle \xi\eta \rangle &= E \\ \langle \xi^2 \rangle &= G \end{aligned} \quad (2)$$

式中, D 和 P 分别为两种噪声的强度; λ 为噪声的相关率; E 和 G 为耦合噪声强度。

对式(1)两边进行随机平均,得

$$\begin{aligned} \langle \ddot{x} \rangle + r\langle \dot{x} \rangle + \langle \xi \dot{x} \rangle + A\cos(\Omega t)\langle \dot{x} \rangle \\ + \frac{\beta}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\langle \dot{x} \rangle(u)}{(t-u)^\alpha} du + \omega^2 \langle x \rangle + \langle \eta x \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

式(1)两边分别乘以 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 后作随机平均处理:

$$\langle \xi \ddot{x} \rangle + r\langle \xi \dot{x} \rangle + \langle \xi^2 \dot{x} \rangle + A\cos(\Omega t)\langle \xi \dot{x} \rangle$$

$$+\beta \left\langle \int_0^t \frac{\xi(u)\dot{x}(u)}{\Gamma(1-\alpha)(t-u)^\alpha} du \right\rangle + \omega^2 \langle \xi x \rangle + \langle \xi \eta x \rangle$$

$$= \langle \xi \eta \rangle \text{Acos}(\Omega t) \quad (4)$$

$$\langle \eta \dot{x} \rangle + r \langle \eta \dot{x} \rangle + \langle \xi \eta \dot{x} \rangle + \text{Acos}(\Omega t) \langle \eta \dot{x} \rangle$$

$$+\beta \left\langle \int_0^t \frac{\eta(u)\dot{x}(u)}{\Gamma(1-\alpha)(t-u)^\alpha} du \right\rangle + \omega^2 \langle \eta x \rangle + \langle \eta^2 x \rangle$$

$$= \langle \eta^2 \rangle \text{Acos}(\Omega t) \quad (5)$$

根据 Shapiro-Loginov 公式^[18], 对于指数相关噪声, 有

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{m} \rangle = \left\langle \dot{m} \frac{dm}{dt} \right\rangle - \lambda_0 \langle \dot{m} \rangle \quad (6)$$

式中, m 为噪声 $\zeta(t)$ 的任意函数, 即 $m = m(\zeta)$; λ_0 为噪声的相关率。

利用式(6)和分数阶导数的性质, 可将式(4)写成

$$\left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \langle \xi x \rangle + r \langle \xi \dot{x} \rangle + \langle \xi^2 \dot{x} \rangle + \text{Acos}(\Omega t) \langle \xi \dot{x} \rangle$$

$$+ \frac{\beta e^{-\lambda t}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{e^{\lambda u} \langle \xi \dot{x} \rangle(u)}{(t-u)^\alpha} du + \omega^2 \langle \xi x \rangle + \langle \xi \eta x \rangle$$

$$= A \langle \xi \eta \rangle \cos(\Omega t) \quad (7)$$

式(1)两边乘以 $\xi(t)\eta(t)$ 后取平均, 得

$$\langle \xi \eta \dot{x} \rangle + r \langle \xi \eta \dot{x} \rangle + \langle \xi \eta^2 \dot{x} \rangle + \text{Acos}(\Omega t) \langle \xi \eta \dot{x} \rangle$$

$$+ \frac{\beta e^{-2\lambda t}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{e^{-2\lambda u} \langle \xi \dot{x} \rangle(u)}{(t-u)^\alpha} du + \omega^2 \langle \xi \eta x \rangle + \langle \xi \eta^2 x \rangle$$

$$= \langle \xi \eta^2 \rangle \text{Acos}(\Omega t) \quad (8)$$

利用式(6), 有

$$\frac{d \langle \xi x \rangle}{dt} = \langle \xi \dot{x} \rangle - \lambda \langle \xi x \rangle \quad (9)$$

$$\frac{d \langle \eta x \rangle}{dt} = \langle \eta \dot{x} \rangle - \lambda \langle \eta x \rangle \quad (10)$$

$$\frac{d \langle \xi \eta x \rangle}{dt} = \langle \xi \eta \dot{x} \rangle - 2\lambda \langle \xi \eta x \rangle \quad (11)$$

另外, 有

$$\frac{d \langle x \rangle}{dt} = \langle \dot{x} \rangle. \quad (12)$$

式(3)、式(5)以及式(7)~式(12)组成变量 $x_1 = \langle x \rangle$ 、 $x_2 = \langle \dot{x} \rangle$ 、 $x_3 = \langle \xi x \rangle$ 、 $x_4 = \langle \xi \dot{x} \rangle$ 、 $x_5 = \langle \eta x \rangle$ 、 $x_6 = \langle \eta \dot{x} \rangle$ 、 $x_7 = \langle \xi \eta x \rangle$ 、 $x_8 = \langle \xi \eta \dot{x} \rangle$ 的线性方程组。对这些方程进行拉普拉斯变换, 即 $\langle x \rangle \underline{LTX}_1$ 、 $\langle \dot{x} \rangle \underline{LTX}_2$ 、 $\langle \xi x \rangle \underline{LTX}_3$ 、 $\langle \xi \dot{x} \rangle \underline{LTX}_4$ 、 $\langle \eta x \rangle \underline{LTX}_5$ 、 $\langle \eta \dot{x} \rangle \underline{LTX}_6$ 、 $\langle \xi \eta x \rangle \underline{LTX}_7$ 、 $\langle \xi \eta \dot{x} \rangle \underline{LTX}_8$, 同时设信

号频率 Ω 很低, 则有 $LT[\text{Acos}(\Omega t)x_i] \approx \text{Acos}(\Omega t)LT[x_i]$ 。此时可得以下方程:

$$[s^2 + \omega^2]X_1 + [r + \beta s^{\alpha-1} + \text{Acos}(\Omega t)]X_2 + X_4 + X_5 = 0 \quad (13)$$

$$[(s+\lambda)^2 + \omega^2]X_3 + [r + \beta(s+\lambda)^{\alpha-1} + \text{Acos}(\Omega t)]X_4 + DX_2 + X_7 = E \cdot LT[\text{Acos}(\Omega t)] \quad (14)$$

$$[(s+\lambda)^2 + \omega^2]X_5 + [r + \beta(s+\lambda)^{\alpha-1} + \text{Acos}(\Omega t)]X_6 + X_8 + PX_1 = P \cdot LT[\text{Acos}(\Omega t)] \quad (15)$$

$$[(s+2\lambda)^2 + \omega^2]X_7 + [r + \beta(s+2\lambda)^{\alpha-1} + \text{Acos}(\Omega t)]X_8 + PX_3 + DX_6 = G \cdot LT[\text{Acos}(\Omega t)] \quad (16)$$

$$sX_3 = X_4 - \lambda X_3 \quad (17)$$

$$sX_5 = X_6 - \lambda X_5 \quad (18)$$

$$sX_7 = X_8 - 2\lambda X_7 \quad (19)$$

$$sX_1 = X_2 \quad (20)$$

求解式(13)~式(20), 在

$$3\lambda + 2r - 1 > 0, \quad (21)$$

$$15\lambda^2 + 4\omega^2 + 5r^2 + 22\lambda r - 15\lambda - 6r > 0 \quad (22)$$

条件下, 可得系统输出均值拉式变换的稳态解。然后对其进行拉普拉斯反变换, 可得系统的平均输出幅度:

$$B = \sqrt{\frac{(g_{le} + g_{lle})^2 + (g_{lo} + g_{llo})^2}{(f_{le} + f_{lle})^2 + (f_{lo} + f_{llo})^2}} \quad (23)$$

其中,

$$g_{lo} = g_{lo1} + g_{lo2}, \quad g_{le} = g_{le1} + g_{le2} \quad (24)$$

$$f_{llo} = f_{llo1} + f_{llo2}, \quad f_{lo} = f_{lo1} + f_{lo2} \quad (25)$$

$$f_{lle} = f_{lle1} + f_{lle2}, \quad f_{le} = f_{le1} + f_{le2} \quad (26)$$

$$f_{le1} = -D\Omega^2 - [\omega^2 - \Omega^2 + \beta\Omega^\alpha \cos(\pi\alpha/2)]$$

$$- 2\Omega r [2\lambda\Omega + r\Omega + \Omega(\Omega^2 + \lambda^2)^{\alpha/2} \cos(\alpha) \arctan(\Omega/\lambda)]$$

$$+ \frac{A^2}{2} [-4\Omega^2\lambda - 2\Omega^2\beta(\Omega^2 + \lambda^2)^{\alpha/2} \cos(\alpha \arctan(\Omega/\lambda))] \quad (27)$$

$$f_{le2} = -2D\lambda\Omega - \Omega^2 + \omega^2 + \beta\Omega^\alpha \cos(\pi\alpha/2)$$

$$+ \frac{A^2}{2} [4\Omega^2\lambda - 2\Omega^2\beta(\Omega^2 + \lambda^2)^{\alpha/2} \cos(\alpha \arctan(\Omega/\lambda))] \quad (28)$$

$$f_{lle1} = -D\beta\Omega(\Omega^2 + 4\lambda^2)^{\alpha/2} \sin(\alpha \arctan(\Omega/(2\lambda)))$$

$$- 2D\beta\Omega(\Omega^2 + 4\lambda^2)^{\alpha/2} \cos(\alpha \arctan(\Omega/(2\lambda))) + 2\Omega^4 A^2 D \quad (29)$$

$$f_{lle2} = D\lambda\beta\Omega^\alpha \sin(\pi\alpha/2) - D\beta\Omega(\Omega^2 + 4\lambda^2)^{\alpha/2}$$

$$\times \cos(\alpha \arctan(\Omega/(2\lambda))) - A^2 \Omega^2 (2D\Omega + \Omega D\lambda + 2\lambda D) \quad (30)$$

$$f_{i01} = [-r\Omega + \beta\Omega^\alpha \sin(\pi\alpha/2)] \times [-\Omega^2 + \lambda^2 + \omega^2 - \Omega(\Omega^2 + \lambda^2)^{\alpha/2} \sin(\alpha \arctan(\Omega/\lambda))] + \frac{A^2}{2} [4\Omega^2\lambda - 2\Omega^2\beta(\Omega^2 + \lambda^2)^{\alpha/2} \cos(\alpha \arctan(\Omega/\lambda))] \quad (31)$$

$$f_{i02} = 3\beta\Omega\lambda(\Omega^2 + \lambda^2)^{\alpha/2} \sin(\alpha \arctan(\Omega/\lambda)) + 3\lambda^3 + 3\lambda\omega^2 + 3\lambda[-\Omega^2 + \lambda^2 + \omega^2 - \Omega\beta(\Omega^2 + \lambda^2)^{\alpha/2} \cos(\alpha \arctan(\Omega/\lambda))] + \frac{A^2}{2} (-2\Omega^2 - 2D\Omega)(D\lambda + 2\lambda) \quad (32)$$

$$f_{i101} = \{-D\Omega^2 - [\omega^2 - \Omega^2 + \beta\Omega^\alpha \cos(\pi\alpha/2)] \times [\lambda^2 + \omega^2 - \Omega^2 - \Omega(\Omega^2 + \lambda^2)^{\alpha/2} \sin(\alpha \arctan(\Omega/\lambda))] - 2\Omega r [2\lambda\Omega + r\Omega + \Omega(\Omega^2 + \lambda^2)^{\alpha/2} \cos(\alpha \arctan(\Omega/\lambda))]\} \quad (33)$$

$$f_{i102} = \{2\Omega^3 - 2\Omega\lambda^2 - 2\Omega\omega^2 - 2\beta\Omega^2(\Omega^2 + \lambda^2)^{\alpha/2} \times \sin(\alpha \arctan(\Omega/\lambda)) - 3\lambda\beta\Omega(\Omega^2 + \lambda^2)^{\alpha/2} \times \cos(\alpha \arctan(\Omega/\lambda))\} \quad (34)$$

$$g_{Ie1} = \Omega^2 - \beta\Omega(\Omega^2 + \lambda^2)^{\alpha/2} \cos(\alpha \arctan(\Omega/\lambda)) + \lambda^2 + \omega^2 + D(\lambda^2 - \Omega^2) - P \quad (35)$$

$$g_{Ie2} = E[-\Omega^2 + 4\lambda^2 + \omega^2 - \Omega\beta(\Omega^2 + 4\lambda^2)^{\alpha/2} \sin(\alpha \arctan(\Omega/\lambda)) + 2\lambda\beta(\Omega^2 + 4\lambda^2)^{\alpha/2} \cos(\alpha \arctan(\Omega/\lambda))] - G \quad (36)$$

$$g_{Ie} = \{3\lambda[-2\Omega\lambda - \Omega\beta(\Omega^2 + \lambda^2)^{\alpha/2} \sin(\alpha \arctan(\Omega/\lambda))] - 2\Omega[-\Omega^2 + \lambda^2 + \omega^2 - \Omega\beta(\Omega^2 + \lambda^2)^{\alpha/2} \cos(\alpha \arctan(\Omega/\lambda))]\} \times E[-2\Omega\lambda - \Omega\beta(\Omega^2 + 4\lambda^2)^{\alpha/2} \times \sin(\alpha \arctan(\Omega/2\lambda))] \quad (37)$$

$$g_{I01} = \{[-\Omega - \beta\Omega(\Omega^2 + 4\lambda^2)^{\alpha/2} \cos(\alpha \arctan(\Omega/(2\lambda)))] + \lambda^2 + \omega^2 + 2\lambda r\} \times [-\Omega r + 2\lambda] - \beta\Omega(\Omega^2 + 4\lambda^2)^{\alpha/2} \times \cos(\alpha \arctan(\Omega/(2\lambda))) \quad (38)$$

$$g_{I02} = E[-\Omega^2 + 4\lambda^2 + \omega^2 - \Omega\beta(\Omega^2 + 4\lambda^2)^{\alpha/2} \sin(\alpha \arctan(\Omega/(2\lambda))) + 2\lambda\beta(\Omega^2 + 4\lambda^2)^{\alpha/2} \times \cos(\alpha \arctan(\Omega/(2\lambda)))] - G \quad (39)$$

$$g_{I10} = \{-2\Omega^2[-2\Omega\lambda - \Omega\beta(\Omega^2 + \lambda^2)^{\alpha/2} \sin(\alpha \arctan(\Omega/\lambda))] + 3\lambda[-\Omega^2 + \lambda^2 + \omega^2 - \Omega\beta(\Omega^2 + \lambda^2)^{\alpha/2} \times \cos(\alpha \arctan(\Omega/\lambda))]\} \times E[-2\Omega\lambda - \Omega\beta(\Omega^2 + 4\lambda^2)^{\alpha/2} \times \sin(\alpha \arctan(\Omega/(2\lambda)))] \quad (40)$$

2 讨论

前面我们推导出了分数振荡器输出振幅的表达式, 现在利用式(23)~式(40)分析输出幅度的非单调性。我们根据图 1 来分析系统输出幅度 B 对乘性噪声强度 D 的非单调依赖关系。可以看出, 在 $0 < D < 0.7$ 的范围内, 系统 $D=0$ 的输出幅度大于时的输出幅值。即通过引入一定量的乘性噪声, 可以提高系统输出。此外, 对于一定的噪声强度 ($D \approx 0.25$), 输出振幅可以实现最大化。因此, 出现了传统的随机共振现象。随着 D 的增大, 输出幅度先达到一个最大值, 然后达到一个最小值, 随后再缓慢增大。我们注意到, 扰动对粘滞阻尼系数的影响与文献[14]中的结果不同。在文献[14]中, 输出幅值可以得到三个极值, 即两个最大值和一个最小值。这里出现的现象可以解释为乘性信号对粘性阻尼系数的非线性影响。噪声强度 P 对输出幅度的影响可由图 2 来分析。在图 2 中很容易地发现两个峰值, 即出现了随机多共振现象。因此, 可以选择两个 P 值, 使系统输出信号最大化。其中一个相对较小, 另一个相对较大。这种多共振现象是一个新的结果, 在文献[12-13]中没有研究过。

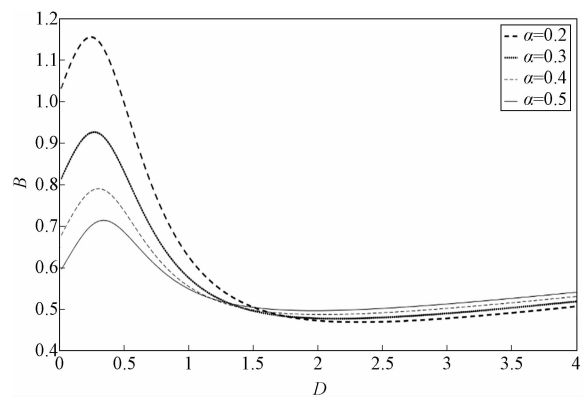


图 1 分数指数 α 取不同值时输出幅度 B 与乘性噪声强度 D 的关系曲线(参数为 $\Omega=0.01, \omega=0.2, \lambda=0.6, A=1, r=5, \beta=0.15, P=0.01, E=0.5, F=0.5, G=0.5$)

从图 3 中可以看出, 随着噪声相关率的增加, 输出幅度表现出了非单调性。对于 $\lambda \rightarrow 0$ 的白噪声情况, 振幅获得了某个值。随

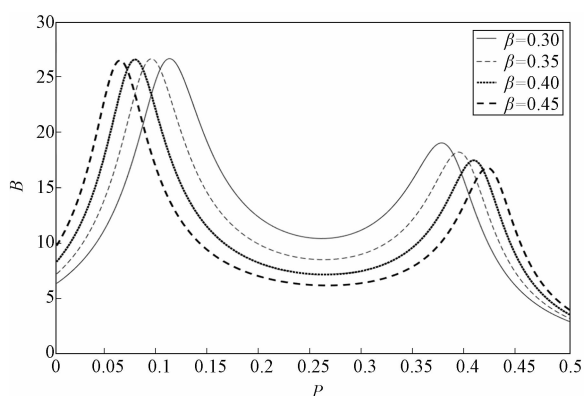


图 2 摩擦系数 β 取不同值时输出幅度 B 与信号调制噪声强度 P 的关系曲线(参数为 $D=0.1$ 、 $\Omega=0.05$ 、 $\omega=0.75$ 、 $\alpha=0.9$ 、 $\lambda=0.3$ 、 $A=1$ 、 $r=0.7$ 、 $E=0.5$ 、 $F=0.5$ 、 $G=0.5$)

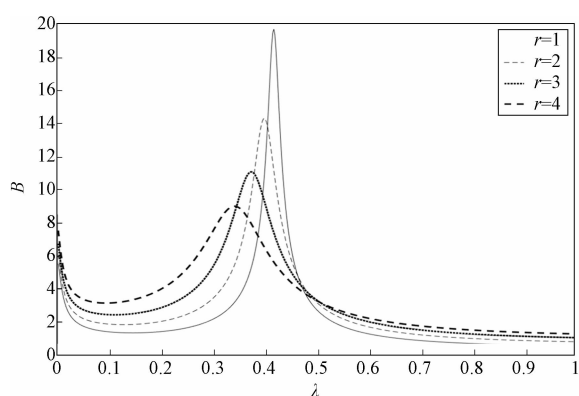


图 3 粘性阻尼系数 r 取不同值时输出幅度 B 与噪声相关率 λ 的关系曲线(参数为 $D=0.1$ 、 $\Omega=0.01$ 、 $\omega=0.5$ 、 $\beta=0.8$ 、 $\alpha=0.1$ 、 $A=1$ 、 $P=0.01$ 、 $E=0.5$ 、 $F=0.5$ 、 $G=0.5$)

着噪声相关率 λ 的增加, 噪声相关时间变得越来越短, 即变成色噪声。振幅先减小到最小值, 然后单调增加, 直至达到峰值, 最后单调减小直到趋于零。图 4 所示为摩擦系数 β 取不同值时输出幅度 B 与分数指数 α (记忆指数) 的关系曲线。从中可以看到典型的共振行为。在强记忆 ($\alpha \rightarrow 0$) 条件下, 振幅得到了一个相对中间的值。随着 α 增大, 振幅先取得最小值, 然后达到最大值。因此, 相对较大的记忆指数 ($\alpha \approx 0.2$) 可以改善系统信号, 而较小的记忆指数则会降低系统输出。随着摩擦系数 β 的增大, 输出幅度也表现出了非单调性。如图 4 所示, 在 $0 < \alpha < 0.45$ 的范围

内, 振幅随着 β 的增大而减小; 而当 $\alpha > 0.5$ 时, 振幅随着 β 的增大而增大。

图 5 所示为分数指数 α 取不同值时输出幅度 B 与粘性阻尼系数 r 的关系曲线。可以看出, 振幅呈现峰值。在参考文献 [13] 中也观察到类似效应。图 6 所示为摩擦系数 β 取不同值时振幅 B 与系统特征频率 ω 的关系曲线。可以看出, 在出现共振现象时, 系统特征频率不等于驱动信号频率。这可以解释为是噪声和乘性信号对系统的非线性作用导致系统在低驱动频率下出现共振响应。此外, 对于给定的参数, 输出振幅随着特征频率的增大而增大。这与文献 [12-13] 中观察到的现象不同, 后者的输出幅度在更高的特征频率下单调地减小。

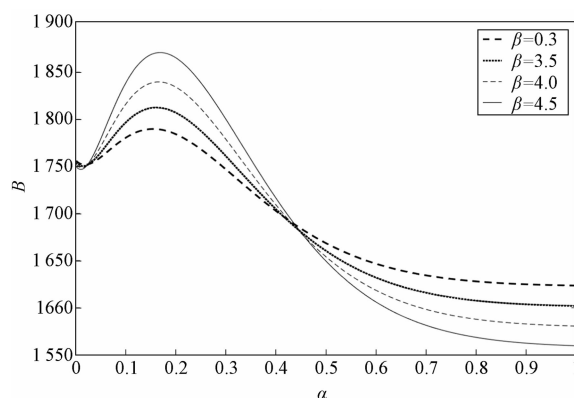


图 4 摩擦系数 β 取不同值时输出幅度 B 与分数指数 α 的关系曲线(参数为 $D=0.1$ 、 $\Omega=0.01$ 、 $\omega=6$ 、 $\lambda=0.5$ 、 $A=1$ 、 $r=0.2$ 、 $P=0.1$ 、 $E=0.5$ 、 $F=0.5$ 、 $G=0.5$)

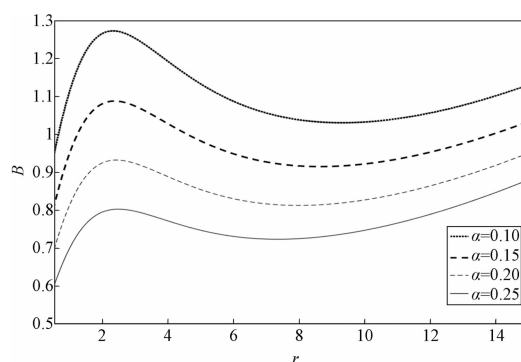


图 5 分数指数 α 取不同值时输出幅度 B 与粘性阻尼系数 r 的关系曲线(参数为 $D=0.2$ 、 $\Omega=0.02$ 、 $\omega=0.3$ 、 $\beta=0.5$ 、 $\lambda=0.6$ 、 $A=1$ 、 $P=0.1$ 、 $E=0.5$ 、 $F=0.5$ 、 $G=0.5$)

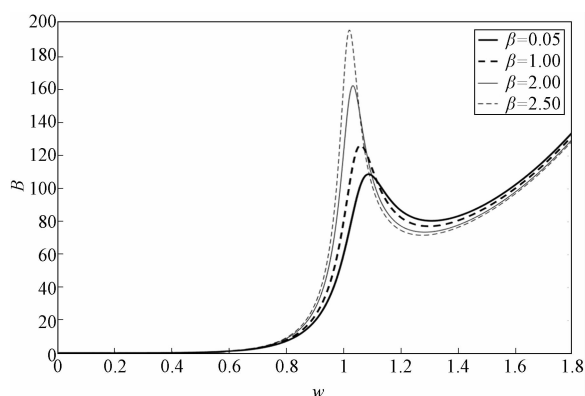


图 6 摩擦系数 β 取不同值时输出幅度 B 与系统特征频率 ω 的关系曲线(参数为 $D=0.1, \Omega=0.01, \alpha=0.9, \lambda=0.1, A=1, r=5, P=0.2, E=0.5, F=0.5, G=0.5$)

3 总结

本文研究了线性振荡器中的随机共振现象。基于双值噪声对特征频率、粘滞阻尼和摩擦系数的波动进行了建模。此外,设粘性阻尼系数受到周期信号的扰动。在驱动频率较低且满足某些条件的情况下,得到了系统输出幅值的表达式。分析结果表明,系统输出幅度随噪声强度、噪声相关率、分数指数、线性粘滞阻尼系数以及系统特征频率的变化而出现随机共振行为。由于乘性信号和分数阶振荡器在工程领域中广泛存在,本文结果将有助于对具有乘性信号的随机动态系统的非线性行为进行研究。

参考文献

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A. The Mechanism of Stochastic Resonance [J]. *Journal of Physics A*, 1981, **14** (11): 453-457.
- [2] 蔺素珍, 杨风暴, 吉琳娜, 等. 基于阈上随机共振的弱信号双色中波红外图像融合 [J]. *红外与毫米波学报*, 2011, **30**(6): 546-550.
- [3] 郑钢英, 葛阳杨, 刘伟, 等. 可见-近红外光谱结合非周期随机共振检测大黄鱼储藏期 [J]. *中国食品学报*, 2015, **15**(1): 230-235.
- [4] 徐好民, 王煜. 随机共振新实例——卫星热红外温度异常点的发现及其意义 [J]. *国际地震动态*, 2003, **12**(2): 4-7.
- [5] Podlubny I. *Fractional Differential Equations* [M]. New York: Academic Press, 1999.
- [6] Kilbas A A, Sarivastava H M, Trujillo J J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* [M]. New York: Elsevier, 2006.
- [7] Mainardi F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity* [M]. London: Imperial College Press, 2010.
- [8] Klafter J, Lim S C, Metzler R. *Fractional Dynamics* [M]. London: World Scientific, 2011.
- [9] So F, Liu K L. A Study of the Subdiffusive Fractional Fokker-Planck Equation of Bistable Systems [J]. *Physica A*, 2004, **331**(3): 378-390.
- [10] Chow C W, Liu K L. Fokker-Planck Equation and Subdiffusive Fractional Fokker-Planck Equation of Bistable Systems with Sinks [J]. *Physica A*, 2004, **334**(6): 87-106.
- [11] Yim M Y, Liu K L. Linear Response and Stochastic Resonance of Subdiffusive Bistable Fractional Fokker-Planck Systems [J]. *Physica A*, 2006, **369** (9): 329-342.
- [12] Guo F, Zhu C Y, Cheng X F, et. al. Stochastic Resonance in a Fractional Harmonic Oscillator Subject to Random Mass and Signal-modulated Noise [J]. *Physica A*, 2016, **459**(2): 86-91.
- [13] Guo F, Wang X Y, Zhu C Y, et. al. Stochastic Multiresonance for a Fractional Linear Oscillator with Time-delayed Kernel and Quadratic Noise [J]. *Physica A*, 2017, **487**(3): 205-211.
- [14] Yu T, Zhang L, Ji Y D, et. al. Stochastic Resonance of Two Coupled Fractional Harmonic Oscillators with Fluctuating Mass [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, **72**(2): 26-38.
- [15] Du L C, Mei D C. Stochastic Resonance in a Tumor-immune System Subject to Bounded Noises and Time Delay [J]. *Journal of Statistical Mechanics*, 2008, **11**(6): 11020-11025.
- [16] Wang K K, Ye H, Wang Y J, et. al. Impact of Colored Cross-correlated Noises on Stochastic Resonance and Mean Extinction Rate for a Metapopulation System with a Multiplicative Periodic Signal [J]. *Chinese Journal of Physics*, 2018, **56** (5): 2191-2203.

(下转第 48 页)