

引用格式:高迎东,王宏力,由四海,等.基于小波基函数选取与改进阈值函数的脉冲星信号去噪算法研究[J].电光与控制,2020,27(4):15-19.
GAO Y D, WANG H L, YOU S H, et al. A pulsar signal denoising algorithm based on wavelet basis function selection and improved threshold function[J].
Electronics Optics & Control, 2020, 27(4):15-19.

基于小波基函数选取与改进阈值函数的脉冲星信号去噪算法研究

高迎东, 王宏力, 由四海, 冯磊, 何贻洋, 刘珂

(火箭军工程大学导弹工程学院,西安 710025)

摘要:在利用小波变换对脉冲星信号进行消噪时,小波基、分解层的选取以及阈值函数的构建很大程度上决定了脉冲星导航的准确性。首先研究了小波基与小波分解系数之间的从属关系,进而根据小波分解系数与原始信号的互相关大小来筛选合理的小波基和分解层。在对小波分解系数的研究中发现,噪声形成的小波系数随着分解层的增加而减小,考虑到这个特点,构建了一个基于分解层的阈值函数。实验结果表明,相比于传统小波域消噪方法,所提方法不仅能够准确地筛选出最优小波基和最佳分解层,而且利用所构建的阈值函数进行消噪可以明显改善去噪后脉冲星信号的信噪比、峰值信噪比以及峰位误差,为脉冲星信号消噪提供了新思路。

关键词:脉冲星;信号消噪;小波变换;互相关系数;阈值函数

中图分类号:V448.2 文献标志码:A doi:10.3969/j.issn.1671-637X.2020.04.004

A Pulsar Signal Denoising Algorithm Based on Wavelet Basis Function Selection and Improved Threshold Function

GAO Yingdong, WANG Hongli, YOU Sihai, FENG Lei, HE Yiyang, LIU Ke

(College of Missile Engineering, Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025, China)

Abstract: When the pulsar signal is denoised by using wavelet transform, the selection of wavelet basis and decomposition layer and the construction of the threshold function have a great effect on the accuracy of pulsar navigation. In this paper, the subordination relationship between the wavelet basis and the wavelet decomposition coefficient is studied firstly, and then the reasonable wavelet basis and decomposition layer are screened according to the cross correlation between the wavelet decomposition coefficient and the original signal. During the study of wavelet decomposition coefficients, it is found that the wavelet coefficients formed by noise decrease with the increase of the decomposition layer. Based on this feature, a threshold function based on the decomposition layer is constructed. The experimental results show that, compared with the traditional wavelet-domain denoising method, the proposed method can not only accurately select the optimal wavelet basis and the optimal decomposition layer, but also effectively improve the Signal-to-Noise Ratio (SNR), Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR) and decrease the Error of Peak Position (EPP) of the pulsar signal after denoising with our threshold function. The study provides a new idea for the denoising of pulsar signals.

Key words: pulsar; signal denoising; wavelet transform; cross correlation coefficient; threshold function

0 引言

脉冲星信号是一种典型的非平稳信号。小波变换具有多分辨率时频分析的优点,特别适合处理非平稳

信号^[1]。通常在小波域内选取一种小波基函数,将含噪信号在不同尺度下进行分解得到小波分解系数,再利用软、硬阈值函数对系数进行处理而后重构系数达到降噪的目的^[2]。在小波基选取方面,卢广森^[3]提出利用穷举法依次对含噪信号进行消噪并将最大信噪比下的小波基和分解层作为去噪小波基和分解层,然而此种方法实际是本末倒置的先去噪再选择小波基;而刘庆等^[4]提出利用小波基与含噪信号之间的互相关系数大小来选择最优小波基,虽然解决了本末倒置的问

收稿日期:2019-03-20

修回日期:2019-06-09

基金项目:国家自然科学基金青年基金(61503391);中国博士后科学基金(2017M613372)

作者简介:高迎东(1994—),男,河北廊坊人,硕士,研究方向为导航、制导与仿真。

题,但由于在小波变换过程中小波函数随伸缩因子和平移因子的变化而变化,因此需要对每一种小波基在每一个参数对下求互相关,严重增加了计算量,影响去噪进程。本文在分析小波分解系数与小波基二者间关系的基础上,得出小波分解系数可以用来刻画该种小波基在不同参数因子下与信号的相似程度,因此提出利用小波分解系数与信号求互相关来筛选最优小波基和最佳分解层的方法。在阈值函数构建方面,传统的软、硬阈值函数消噪存在明显的“一刀切”,国内外学者也基于此设计了多种阈值函数,如兼顾软、硬阈值函数的半软阈值函数、单参数阈值函数、双参数阈值函数等^[5],这些阈值函数在有效解决“一刀切”的同时,又会引起如何确定参数的问题,通常选取诸如模拟退火算法、蚁群算法、蜂群算法来确定参数,然而这些算法估计参数的不准确性会造成阈值函数去噪结果的不确定性。基于此,本文从本质上分析了小波分解系数中的噪声部分,得出噪声小波系数随分解层增加而减小的特点,而后构建了一种基于分解层参数的阈值函数。

1 基于互相关系数的小波基和分解层选取

一个含噪脉冲星信号模型可以表示为

$$y(t) = x(t) + s(t) \quad (1)$$

式中: $y(t)$ 为含噪脉冲星信号; $x(t)$ 为标准脉冲星信号; $s(t)$ 为噪声信号。

小波分解过程可由内积形式进行定义

$$W_{j,k} = \langle y(t), f(t) \rangle \quad (2)$$

式中, $f(t)$ 为小波基函数。

由式(1)及内积的性质可得

$$W_{j,k} = \langle x(t) + s(t), f(t) \rangle = \langle x(t), f(t) \rangle + \langle s(t), f(t) \rangle \quad (3)$$

$$w_{j,k} = u_{j,k} + v_{j,k} \quad (4)$$

考虑到噪声信号在全频率段均有分布,而由 B0531 + 21 产生的脉冲星信号仅在几个频段中分布,且由于 PSR B0531 + 21 蟹状脉冲星云的信噪比通常在 10 dB 以上^[6],因此 $u_{j,k}$ 通常要大于 $v_{j,k}$,通过合理选取阈值 T ,将小于阈值的小波系数置 0,大于阈值的小波系数直接保留(硬阈值函数),或者以一个固定量向 0 收缩(软阈值函数)就达到了去噪的目的。如选择与信号波形相似的小波基来提取脉冲星信号,由内积的定义可知所得小波分解系数也将更大,更有利于进行阈值去噪。

互相关性可以用来描述两个函数的相关程度,当 B0531 + 21 轮廓系数与信号数据的互相关系数较大时,则用此小波基来提取脉冲星信号可以达到一个更好的结果。而互相关系数的计算前提是两信号的数据长度一致,但是在用 Matlab 对信号进行小波变换时,低频

段的轮廓系数数据长度总是根据分解层数的变化而变化,而且其长度总小于标准信号数据长度,因此,需要对低频段数据进行上采样直至与标准信号数据长度相同。本文选用 Matlab 中 *resample* 函数进行上采样处理,其函数式为

$$x = \text{resample}(x, \text{length}(y), \text{length}(x)) \quad (5)$$

其含义为,对轮廓数据 x 进行上采样,经 *resample* 函数使轮廓系数的数据长度由 $\text{length}(x)$ 改变成 $\text{length}(y)$,而后将变更数据长度的轮廓数据 x 与真实信号 y 之间求互相关系数。其数学表达式为

$$P = \frac{\text{cov}(x, y)}{\delta_x \delta_y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n * \delta_x \delta_y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 * \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (6)$$

式中: P 为互相关系数; x 为变更数据长度的低频段轮廓数据; y 为真实信号数据; $\text{cov}(x, y)$ 为两个信号变量之间的协方差; δ_x, δ_y 为两个信号变量的标准差; x_i, y_i 为两个信号变量在 i 处的值; \bar{x}, \bar{y} 分别为 x 和 y 的平均值。

2 基于分解层参数的阈值函数构建

2.1 小波阈值消噪中常见的阈值函数

传统阈值函数有硬阈值函数、软阈值函数和含参数阈值函数。

硬阈值函数表达式为

$$\hat{w}_{j,k} = \begin{cases} w_{j,k} & |w_{j,k}| \geq T \\ 0 & |w_{j,k}| < T \end{cases} \quad (7)$$

软阈值函数表达式为

$$\hat{w}_{j,k} = \begin{cases} \text{sgn } w_{j,k} (|w_{j,k}| - T) & |w_{j,k}| \geq T \\ 0 & |w_{j,k}| < T \end{cases} \quad (8)$$

含参阈值函数表达式为

$$\hat{w}_{j,k} = \begin{cases} \text{sgn } w_{j,k} (|w_{j,k}| - \frac{(1-a) * T}{e^{(1/w_{j,k}) - T}} - \frac{a * T}{e^{b(|w_{j,k}| - T)}}) & |w_{j,k}| \geq T \\ 0 & |w_{j,k}| < T \end{cases} \quad (9)$$

其中,硬阈值函数是对小于阈值的小波系数置 0,而对大于阈值的小波系数不做处理,其“一刀切”的处理方法势必会使得小波系数在阈值处产生突变,从而造成去噪后信号的不连续。软阈值函数弥补了硬阈值处理方法的不连续性,但其在大于阈值处总是使得小波系数以固定的值进行衰减,从而使得去噪后信号总产生恒定的偏差量。含参数的阈值函数构建方法虽然使得去噪后信号连续且去噪效果也较软硬阈值函数有明显提升,但是参数的选择需要估计算法来实现,这就使得去噪的结果具有一定的随机性^[7]。

2.2 小波分解系数与分解层的关系

B0531 + 21 蟹状脉冲星云以每秒约 30 次的频率进行自转^[8],其相对于噪声而言属于低频,由于小波变换是一种线性变换,因此从高低频角度可将小波分解系数分为由脉冲星产生的低频系数和由噪声产生的高频系数。根据小波变换原理,其小波分解系数表征了对信号能量的压缩,因噪声随机分布于各频率段,因此经小波变换后噪声也是随机分布的,当分解层数变多时,其能量分配将会逐步减小,如图 1 所示,B0531 + 21 脉冲星噪声信号的小波分级系数随分解层的增加逐渐减小,而在同一分解层上,系数值变化不大,亦呈随机分布的特性。

考虑到噪声的小波系数随分解层数的增加而减小,因而构建的阈值函数也需要将分解层数考虑在内。

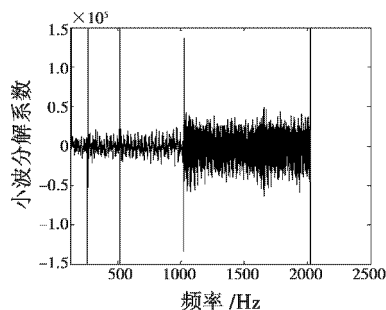


图 1 B0531 + 21 噪声信号经四层分解后的小波系数

Fig. 1 Wavelet coefficients of B0531 + 21 noise signal after four-layer decomposition

2.3 基于分解层参数的阈值函数

基于以上分析,本文构建的阈值函数应从以下 3 个方面进行考虑:1) 阈值函数在阈值处连续且在大于阈值处不存在恒定偏差;2) 为使得去噪结果不随机,阈值函数不应设置不确定性参数;3) 阈值函数的构建应与小波分解层数相关,而且构建的结果应使得噪声小波系数随分解层参数的增加而减小,即去噪后小波分解系数更加接近真实信号小波分解系数^[9]。基于此,构建的阈值函数表达式为

$$\hat{w}_{j,k} = \begin{cases} \operatorname{sgn} w_{j,k} \sqrt{|w_{j,k}|^j - T(j)^j} & |w_{j,k}| \geq T(j) \\ 0 & |w_{j,k}| < T(j) \end{cases} \quad (10)$$

式中: $w_{j,k}$ 表示第 j 分解层 k 位置处的小波系数, $\hat{w}_{j,k}$ 为其估计值; $\operatorname{sgn} w_{j,k}$ 是该处小波系数的符号; $|w_{j,k}|$ 是该处小波系数的绝对值; $T(j)$ 是第 j 分解层的阈值。

由构建的阈值函数表达式可知,当 $|w_{j,k}| \rightarrow T(j)$ 时, $\hat{w}_{j,k} \rightarrow 0$,该表达式趋近于软阈值函数;当 $\hat{w}_{j,k} \rightarrow \infty$ 时, $\hat{w}_{j,k} \rightarrow w_{j,k}$,该表达式趋近于硬阈值函数。

下面讨论此阈值函数与分解层数的关系。

设 $w_{j,k} \geq T(j)$ 且 $w_{j,k}$ 连续, $1 \leq j \leq 10$ 且连续,由于脉冲星信号阈值总是大于 0,即 $T(j) > 0$,则 $w_{j,k} > 0$ 且连续,在分解层 j 上对 $y = \sqrt{|w_{j,k}^j - T(j)^j|}$ 求导。

等式两边同时取对数

$$\ln y = \frac{1}{j} \ln(w^j - T^j) \quad (11)$$

同时求导

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{j} \frac{w^j \ln(w^j) - T^j \ln(T^j)}{w^j - T^j} - \frac{1}{j^2} \ln(w^j - T^j) \quad (12)$$

化简得

$$y' = (\sqrt{|w^j - T^j|}) * \left(\frac{1}{j} \frac{w^j \ln(w^j) - T^j \ln(T^j)}{w^j - T^j} - \frac{1}{j^2} \ln(w^j - T^j) \right). \quad (13)$$

由于 $w_{j,k} \geq T(j)$,且 $\frac{1}{j} \frac{w^j \ln(w^j) - T^j \ln(T^j)}{w^j - T^j} > \frac{1}{j^2}$.

$\ln(w^j - T^j)$,则 $y' > 0$,导数大于 0,原函数单调递增,由此可知估计的小波系数 $\hat{w}_{j,k}$ 随分解层数的增大而更接近含噪小波系数 $w_{j,k}$,由于噪声的小波系数成分随分解层的增加在 $w_{j,k}$ 中占比减小,在高分解层时由真实信号产生的小波系数比重远高于噪声小波系数,从而使得 $\hat{w}_{j,k}$ 更加接近真实信号数值,同时,从以上的求导中可知,构建的阈值函数是连续且可导的,这对于之后的数学应用具有重要意义^[10]。

3 实验结果及分析

本文选取脉冲星 PSR B0531 + 21 辐射的 X 射线光子脉冲信号进行实验,其观测数据来自澳大利亚 Parks 天文台脉冲星观测数据库,将观测得到的 X 射线光子脉冲序列进行历元折叠得到含噪脉冲星信号轮廓,如图 2(a) 所示,其中,数据时间长度为 $T = 560$ s。脉冲星信号标准轮廓来自欧洲脉冲星数据库 (EPN),如图 2(b) 所示。

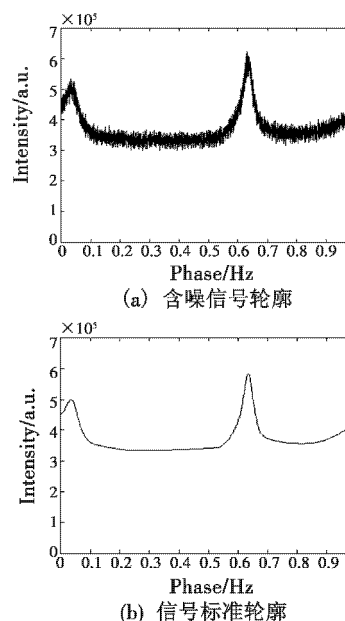


图 2 脉冲星 PSR B0531 + 21 信号轮廓

Fig. 2 Signal profile of PSR B0531 + 21

首先,根据相关系数法确定最优小波基和分解层数,由图3的相关系数与小波基和分解层数的三维散点图可知,选取相关系数为0.923的sym7作为最优小波基,此时分解层数为5,利用本文提出的阈值函数在基于各层噪声均方差估计值的阈值准则下对含噪脉冲星信号进行去噪处理,同时,用软、硬阈值函数、含参阈值函数进行对照试验,得到图4的去噪脉冲轮廓图。

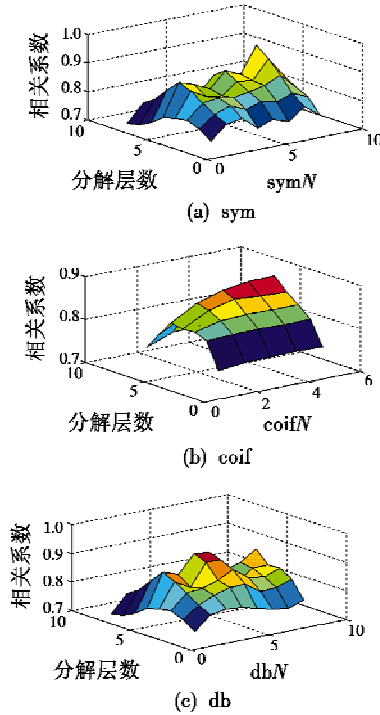
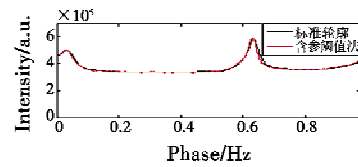
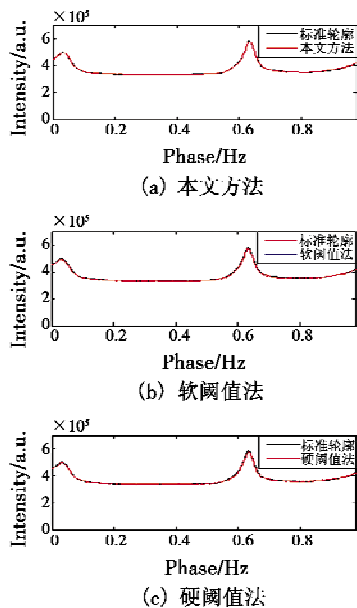


图3 sym,coif,db系列小波在1~8分解层下的相关系数分布图

Fig.3 Correlation coefficient distribution of sym,coif,db series wavelet under 1~8 decomposition layer



(d) 含参阈值法

图4 不同方法下去噪脉冲轮廓图

Fig.4 Denoising profile under different methods

从图4中可以看出,采用软阈值去噪后的信号,由于其小波系数总是与原始信号有一个恒定的阈值差量 T ,因此去噪后的信号轮廓较硬阈值处理后要整体偏下,从而使得峰值误差较大。由于硬阈值函数对小于阈值的小波系数采取“一刀切”的策略,经过硬阈值处理后的信号轮廓不平滑,而且对大于阈值的小波系数不做处理也与实际情况不符,从而引起信噪比改善量较小。对于含参阈值函数,常需要通过诸如蜂群算法、粒子群算法等估计参数,对式(9)中含参阈值函数采用如下粒子群算法的去噪轮廓,即

$$V_{id}^{t+1} = K[V_{id}^t + c_1 * rand() * (P_{id} - X_{id}^t) + c_2 * rand() * (G_{id} - X_{id}^t)] \quad (14)$$

其中,最大迭代次数设置为150,最小适应度值为0.1。其余参数设置如下: $K=4.1$, $\varphi=0.729$, $c_1=1.9$, $c_2=2.2$, $\delta=0.01$, $V_{i1max}=0.02$, $V_{i1min}=0.01$, $V_{i2max}=0.2$, $V_{i2min}=0.1$, $X_{i1max}=10$, $X_{i1min}=0$, $X_{i2max}=10$, $X_{i2min}=0$ 。通过迭代选取最优参数为 $a=1.3$, $b=4.3$ 时的含参阈值函数,去噪后与软、硬阈值函数对比,虽然峰值信噪比要优于硬阈值函数,但峰位误差、信噪比都较软、硬阈值函数要低。

如图4所示,尽管与其他去噪方法同样存在边缘效应的影响,但本文方法无论在波峰段还是平滑段相较于其他方法的去噪效果均有很大改善。

为进一步验证本文方法的去噪性能,选取信噪比(SNR)、峰值信噪比(PSNR)、峰位误差(EPP)作为评价指标,各指标定义式如下

$$R_{s,N} = 10 * \lg\left(\frac{\sum x^2}{\sum (x - \hat{x})^2}\right) \quad (15)$$

$$R_{p,s,N} = 10 * \lg\left(n * \frac{\max(x)^2}{\sum (x - \hat{x})^2}\right) \quad (16)$$

$$E_{EPP} = \sqrt{(P_o - P_d)^2} \quad (17)$$

式中: x 是标准脉冲星信号数据; \hat{x} 是去噪后脉冲星信号数据; n 是数据的长度; P_o 为标准脉冲轮廓脉冲峰的位置; P_d 为消噪后脉冲轮廓脉冲峰的位置。易知, $R_{s,N}$, $R_{p,s,N}$ 越大, E_{EPP} 越小,则去噪效果越好。

实验中,分别从db,coif中选取最大相关系数为0.906

的 db4 和相关系数为 0.875 的 coif5 进行对照实验,此时它们的最佳分解层数均为 5。对这 3 种小波基,在其相应分解层下分别利用本文方法、软阈值、硬阈值及含参阈值去噪方法对含噪脉冲星信号进行消噪,其去噪后的 3 项评价指标列于图 5 的柱状图中。不同去噪方法下的 3 项评价指标如表 1 所示。

从图 5 以及表 1 中可以看出,通过相关系数选取的 sym7 小波基在本文构建的阈值函数下进行 5 层分解,可以得到最佳的去噪效果及最优的性能指标。由于本文构建的阈值函数与分解层相关,噪声的小波系数经过阈值去噪后迅速减小而信号的小波系数占比增大,这种表现在信号峰值处尤为明显,因此经本文方法处理后的信号的峰值信噪比以及峰位误差相较于其他方法明显改善,其中,SNR 普遍提高了 4~8 dB,PSNR 较软、硬阈值函数、含参阈值函数分别提高了 39.11%,26.52%,18.75%,而 EPP 较软、硬阈值函数、含参阈值函数分别提高了 3.15 μ s,1.57 μ s,4.68 μ s,因此本文方法更适合被应用于 B0531+21 蟹状脉冲星信号去噪。

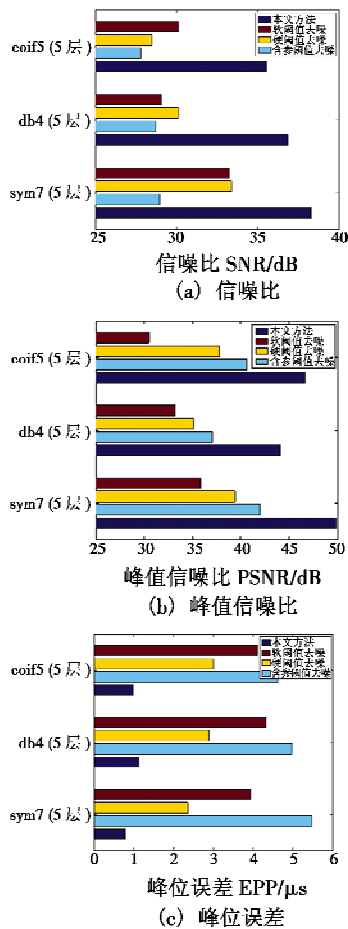


图5 各系列最佳小波基在4种消噪方法下的评价指标柱状图
Fig.5 Evaluation index histogram of each series of the best wavelet basis under 4 denoising methods

表1 不同方法去噪后各项指标的对比

Table 1 Comparison of each indicator after denoising by different methods

评价指标	本文方法	软阈值法	硬阈值法	含参阈值法
信噪比(SNR)/dB	38.31	33.20	33.39	28.97
峰值信噪比(PSNR)/dB	49.92	35.81	39.42	41.98
峰位误差(EPP)/ μ s	0.792	3.941	2.364	5.478

4 结束语

本文创造性地提出利用小波分解系数和原始信号的互相关性来筛选小波基和分解层,通过理论论述和实验验证得出小波分解系数随分解层增加而减小的结论,根据这一结论,构建了一种基于分解层参数的阈值函数。实验结果表明,相较于其他小波基和分解层以及传统阈值函数,本文方法在信噪比、峰值信噪比、峰位误差方面改善显著,可以更好地应用于 B0531+21 蟹状脉冲星信号去噪。由于目前仅可得到 B0531+21 脉冲星光子到达时间的数据,本文方法是否也能更好应用于其他脉冲星信号还有待进一步研究。

参考文献

- [1] RIOUL O, VETTERLI M. Wavelets and signal processing [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1991, 8(4):14-38.
- [2] 盛楠,陈国初.小波阈值去噪的研究及应用[J].科技与创新,2016(20):76-77.
- [3] 卢广森.基于改进阈值函数的小波去噪及其优化研究[D].昆明:昆明理工大学,2017.
- [4] 刘庆,张炳达,李志兴.利用最优小波进行局部放电脉冲的提取和消噪[J].电力系统及其自动化学报,2003,15(3):42-45,52.
- [5] GOKHALE M Y, KHANDUJA D K. Time domain signal analysis using wavelet packet decomposition approach [J]. International Journal of Communications, Network and System Sciences, 2010(3):321-329.
- [6] BRUMFIEL G. Air force had early warning of pulsars[J]. Nature, 2007, 448:974-975.
- [7] 王永凯.基于阈值函数和阈值的小波去噪方法研究[D].秦皇岛:燕山大学,2017.
- [8] BRECHER K, FESEN R A, MARAN S P, et al. Ancient records and the Crab Nebula supernova[J]. The Observatory, 1983, 103:106-113.
- [9] 张仁辉,杜民.小波分析在信号去噪中的应用[J].计算机仿真,2005,22(8):69-72.
- [10] 苏哲,许录平,王勇,等.改进小波空域相关滤波的脉冲星微弱信号降噪[J].系统工程与电子技术,2010,32(12):2500-2505.