

引用格式:韩吉霞,马飞越,佃松宜,等.基于非线性干扰观测器不确定系统的终端滑模控制[J].电光与控制,2020,27(2):29-34. HAN J X, MA F Y, DIAN S Y, et al. Terminal sliding mode control for uncertain systems based on nonlinear disturbance observer[J]. Electronics Optics & Control, 2020, 27(2):29-34.

## 基于非线性干扰观测器不确定系统的终端滑模控制

韩吉霞<sup>1</sup>, 马飞越<sup>2</sup>, 佃松宜<sup>1</sup>, 罗连杰<sup>1</sup>, 胡怡<sup>1</sup>

(1. 四川大学电气信息学院, 成都 610065; 2. 国网宁夏电力公司电力科学研究院, 银川 750011)

**摘要:**针对一类存在非匹配干扰和建模误差的高阶非线性系统,结合滤波反步控制方法,设计一种基于非线性干扰观测器的自适应反步非奇异终端滑模控制方案。首先,设计一种有限时间稳定的非线性干扰观测器,以此对非匹配干扰进行估计和补偿。采用反步控制处理高阶不确定非线性系统,结合动态面控制设计虚拟控制律,避免传统反步设计中存在的“微分爆炸”问题;第 $n$ 步结合自适应控制和非线性干扰观测器,设计非奇异终端滑模控制律,消除建模误差和非匹配干扰对系统的影响。基于Lyapunov理论证明跟踪误差一致最终有界。仿真结果验证了所设计控制方案的有效性。

**关键词:**非线性系统;非匹配干扰;滤波反步法;非线性干扰观测器;自适应控制;非奇异终端滑模控制

**中图分类号:** TP273 **文献标志码:** A **doi:**10.3969/j.issn.1671-637X.2020.02.007

## Terminal Sliding Mode Control for Uncertain Systems Based on Nonlinear Disturbance Observer

HAN Jixia<sup>1</sup>, MA Feiyue<sup>2</sup>, DIAN Songyi<sup>1</sup>, LUO Lianjie<sup>1</sup>, HU Yi<sup>1</sup>

(1. School of Electrical Engineering and Information, Sichuan University, Chengdu 610065, China;

2. Ningxia Electric Power Company, State Grid Corporation of China, Yinchuan 750011, China)

**Abstract:** For the class of high-order nonlinear systems with unmatched disturbances and modeling error, an Adaptive Backstepping Non-singular Terminal Sliding Mode Control (ABNTSMC) scheme based on Nonlinear Disturbance Observer (NDO) is proposed combined with filtered backstepping method. Firstly, a finite-time stable nonlinear disturbance observer is designed to estimate and compensate for the unmatched disturbances. The backstepping method is employed to deal with high-order uncertain nonlinear systems. To avoid the explosion of differentiation in traditional backstepping control, the dynamic surface control method is used to design the virtual controller. In the  $n$ th step, a non-singular terminal sliding mode controller is designed based on the adaptive control and NDO to eliminate the effects of unmatched disturbances and modeling error on the systems. It is proved that the tracking error is guaranteed to be uniformly and ultimately bounded by using Lyapunov theorem. Finally, the simulation results prove the efficacy of the proposed method.

**Key words:** nonlinear system; unmatched disturbance; filtered backstepping method; nonlinear disturbance observer; adaptive control; non-singular terminal sliding mode control

### 0 引言

近几十年,非线性不确定系统的控制问题得到广泛关注,其中滑模控制是解决非线性不确定系统控制问题行之有效的方法之一<sup>[1-3]</sup>。对于匹配不确定系

统,滑模控制因具有“不变性”<sup>[4]</sup>而有良好的鲁棒性;对于非匹配不确定系统,滑模控制因不再具有“不变性”而丧失强鲁棒性,而反步控制是处理非匹配不确定性问题的一个较为成功的策略<sup>[5-7]</sup>。将反步控制与滑模控制两者结合,可有效解决高阶非匹配不确定非线性系统的控制问题,同时大大提高系统鲁棒性。文献[8]提出的自适应反演滑模控制策略,通过自适应律估计非匹配不确定参数,然后在反步设计的最后一步应用非奇异终端滑模控制,加快收敛速度并提高控制精度。但是,此种方法一方面将不确定性参数化,另一

收稿日期:2019-03-20 修回日期:2019-12-09

基金项目:国家自然科学基金(6170329)

作者简介:韩吉霞(1995—),女,黑龙江肇东人,硕士生,研究方向为滑模控制。

方面没有考虑反步设计中每一阶的“微分爆炸”问题。文献[9]利用连续可导函数  $\tanh(\mu s)$  替换符号函数  $\text{sgn}(s)$ , 通过设计反步滑模控制器, 实现基于半严格反馈型不确定非线性系统的鲁棒跟踪。文献[10]在反步设计过程中采用模糊自适应逼近系统非匹配不确定项, 同时与动态面控制结合, 设计虚拟控制律, 消除未知非匹配的影响并解决反步设计中出现的“微分爆炸”问题。文献[11]设计非线性干扰观测器(Nonlinear Disturbance Observer, NDO)对非匹配干扰进行观测补偿, 提出一种基于 NDO 的自适应反步滑模控制方法, 使系统对非匹配干扰和建模误差同时具有鲁棒性, 但未解决反步设计中存在的“微分爆炸”问题。文献[12]将反步滑模控制方法应用于高超速飞行器鲁棒控制器设计, 设计有限时间稳定的 NDO 精确估计和补偿模型不确定项, 提高了系统的稳态跟踪精度。受文献[11-13]的启发, 本文将基于改进滑模微分器设计有限时间稳定 NDO 用于高阶非匹配不确定非线性系统。针对一类同时含有非匹配外界干扰和建模误差的高阶非线性系统, 设计一种基于 NDO 的自适应反步非奇异终端滑模控制(Adaptive Backstepping Non-singular Terminal Sliding Mode Control, ABNTSMC)方法。系统控制的前  $n-1$  步采用滤波反步法处理高阶非匹配不确定系统, 利用有限时间稳定的 NDO 估计非匹配干扰, 并在虚拟控制律中进行相应补偿, 消除非匹配干扰对系统的影响; 第  $n$  步, 利用第  $n$  个状态跟踪误差的积分构造非奇异终端滑模面, 设计非奇异终端滑模控制律和建模误差自适应律, 使第  $n$  个状态跟踪误差有限时间收敛, 从而抑制匹配干扰和建模误差对系统的影响。基于 Lyapunov 理论证明了系统跟踪误差和系统状态一致最终有界。

## 1 问题描述

考虑如下存在建模误差和未知扰动的高阶不确定非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}) + g_i(\mathbf{x})x_{i+1} + d_i(t) & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = f_n(\mathbf{x}) + g_n(\mathbf{x})u + F(\mathbf{x}) + d_n(t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{x}_1 \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$  为可测系统状态向量;  $f_i(\mathbf{x})$  和  $g_i(\mathbf{x})$  为已知非线性函数且满足  $\forall x$ , 函数  $g_i(\mathbf{x})^{-1}$  存在;  $u \in \mathbf{R}^1$  和  $y \in \mathbf{R}^1$  分别为系统输入与输出;  $F = \Delta f_n(\mathbf{x}) + \Delta g_n(\mathbf{x})u$  为系统建模误差函数, 其中,  $\Delta f_n(\mathbf{x})$  为状态建模误差函数,  $\Delta g_n(\mathbf{x})$  为控制输入建模误差函数;  $d_i(t)$  为外界非匹配未知干扰。不失一般性, 式(1)系统有如下假设。

**假设 1**  $d_i(t) (i = 1, 2, \dots, n)$  连续并满足一阶导数有界, 即

$$|\dot{d}_i(t)| \leq L_i \quad (2)$$

式中,  $L_i$  为未知正数。

**假设 2**  $F$  连续可导, 且有  $\dot{F} \approx 0$ 。

**假设 3** 参考轨迹  $x_d$  与其一阶导数  $\dot{x}_d$ 、二阶导数  $\ddot{x}_d$  均有界。

本文在文献[11]的  $n$  阶不确定非线性系统模型基础上, 引入  $f_i(\mathbf{x})$  和  $g_i(\mathbf{x})$ , 因而更具广泛性。现有文献中, 通常假设  $\dot{d}_i(t) \approx 0$  即  $d_i(t)$  为慢变干扰, 这在很多情况下并不满足。因而本文建立的假设 1 更具普遍性。

本文的控制目标是: 针对式(1)所述的一类同时含有非匹配外界干扰和建模误差的高阶非线性系统, 在满足假设 1 ~ 假设 3 的条件下, 设计有限时间稳定的 NDO 和 ABNTSMC 控制器, 消除建模误差和非匹配干扰对系统的影响, 使得系统输出  $y$  精确跟踪给定参考轨迹  $x_d$ 。

## 2 控制方案设计

### 2.1 NDO 设计

针对 LEVANT<sup>[14-16]</sup> 提出的高阶滑模微分器存在输出抖振、参数选取困难等不足, 文献[17]通过引入 Terminal 吸引子函数有效避免了输出抖振, 放宽了参数选择范围, 进而提出了一种改进滑模微分器。文献[12]基于改进滑模微分器设计一种有限时间稳定的 NDO。对于如下一般系统

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{f} + \mathbf{g}u + \mathbf{d} \quad (3)$$

式中:  $\mathbf{x}$  为系统状态量;  $\mathbf{f}$  和  $\mathbf{g}$  已知;  $u$  和  $\mathbf{d}$  分别为控制量和不确定项。

将 NDO 设计为<sup>[12]</sup>

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{f} + \mathbf{g}u + \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\lambda_0 |\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|^{1/2} \text{sgn}(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) + \hat{\mathbf{d}} \\ \dot{\hat{\mathbf{d}}} = -\lambda_1 |\hat{\mathbf{d}} - \mathbf{v}|^{a/b} \text{sgn}(\hat{\mathbf{d}} - \mathbf{v}) \end{cases} \quad (4)$$

式中:  $\hat{\mathbf{x}}$  为  $\mathbf{x}$  估计值,  $\hat{\mathbf{d}}$  为  $\mathbf{d}$  的估计值;  $\lambda_0, \lambda_1$  为滑模微分器设计参数;  $\mathbf{v}$  是 NDO 的内部辅助变量;  $a, b$  为正奇数, 且满足  $1 < \frac{a}{b} < 2$ 。

定义估计误差  $e_1 = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, e_2 = \hat{\mathbf{d}} - \mathbf{d}$ , 则由式(4)可得

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -\lambda_0 |e_1|^{1/2} \text{sgn} e_1 + e_2 \\ \dot{e}_2 = -\lambda_1 |e_2 - \dot{e}_1|^{a/b} \text{sgn}(e_2 - \dot{e}_1) - \dot{\mathbf{d}} \end{cases} \quad (5)$$

由文献[12]中的定理 1 可得如下定理。

**定理 1** 式(5)误差系统是在有限时间稳定的。若  $d$  为快变干扰, 误差  $e_1, e_2$  将会在有限时间内收敛至包含原点的闭球内, 通过选取合适的参数  $\lambda_0, \lambda_1$ , 可使闭球半径足够小; 若  $d$  为慢变干扰, 近似  $\dot{d} \approx 0$ , 误差  $e_1, e_2$  将在有限时间内收敛至原点。

根据式(1), 则第  $i$  个通道的 NDO 可设计为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i = f_1(\mathbf{x}) + g_1(\mathbf{x})x_{i+1} + \nu_i \\ \nu_i = -\lambda_{i0} |\hat{x}_i - x_i|^{1/2} \operatorname{sgn}(|\hat{x}_i - x_i|) + \hat{d}_i \\ \dot{\hat{d}}_i = -\lambda_{i1} |\hat{d}_i - \nu_i|^{a/b} \operatorname{sgn}(\hat{d}_i - \nu_i) \\ \dot{\hat{x}}_n = f_n(\mathbf{x}) + g_n(\mathbf{x})u + F + \nu_n \\ \nu_n = -\lambda_{n0} |\hat{x}_n - x_n|^{1/2} \operatorname{sgn}(|\hat{x}_n - x_n|) + \hat{d}_n \\ \dot{\hat{d}}_n = -\lambda_{n1} |\hat{d}_n - \nu_n|^{a/b} \operatorname{sgn}(\hat{d}_n - \nu_n) \end{cases} \quad (6)$$

式中:  $\hat{x}_i, \hat{d}_i (i=1, \dots, n-1)$  分别为  $x_i$  和  $d_i$  的估计值;  $\lambda_{i0}, \lambda_{i1}$  为待设计滑模微分器参数。

NDO 的设计参数整定规则为  $\lambda_{i0}, \lambda_{i1}$  越大, 估计误差越小。因此, 选择合适参数, 本文的 NDO 可实现在有限时间内对非匹配干扰的精确估计。

## 2.2 ABNTSMC 控制器设计稳定性分析

**引理 1** 对于任意向量  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ , 满足下面的不等式<sup>[7]</sup>:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} \leq \frac{\varepsilon^a}{a} \|\mathbf{x}\|^a + \frac{1}{b\varepsilon^b} \|\mathbf{y}\|^b \quad (7)$$

式中:  $\varepsilon > 0, a > 1, b > 1$ , 并且满足  $(a-1)(b-1) = 1$ , 当  $a=b=2, \varepsilon^2=2$  时, 不等式变为  $\mathbf{x}^T \mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 0.25 \cdot \|\mathbf{y}\|^2$ 。

定义式(1)系统的状态跟踪误差为

$$\begin{cases} e_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_d \\ e_i = \mathbf{x}_i - \alpha_{i-1} \quad i=2, \dots, n \end{cases} \quad (8)$$

式中,  $\alpha_i$  为第  $i$  步期望的虚拟控制。

本文基于 NDO 的自适应反步非奇异终端滑模控制方法在控制的前  $n-1$  步, 利用 NDO 对  $d_i(t)$  进行观测补偿, 结合动态面控制和反步设计方法, 处理非匹配干扰以及反步设计中存在的“微分爆炸”问题; 而在第  $n$  步, 利用 NDO 对  $d_n(t)$  进行观测补偿, 结合自适应控制和非奇异终端滑模控制设计自适应反步非奇异终端滑模控制器, 处理建模误差和匹配干扰。具体设计步骤如下。

### 2.2.1 第 1 阶设计步骤及稳定性分析

**Step 1** 由第 1 阶子系统的状态跟踪误差  $e_1 = x_1 - x_d$ , 求得

$$\dot{e}_1 = f_1(\mathbf{x}) + g_1(\mathbf{x})x_2 + d_1 - \dot{x}_d \quad (9)$$

设计虚拟控制律  $\beta_1$  为

$$\beta_1 = -g_1(\mathbf{x})^{-1}(k_1 e_1 + f_1(\mathbf{x}) + \hat{d}_1 - \dot{x}_d) \quad (10)$$

式中:  $k_1 > 0$  为设计参数;  $\hat{d}_1$  为  $d_1$  的观测值。

为了避免对虚拟控制反复求导带来的“微分爆炸”问题, 采用动态面控制技术<sup>[10]</sup>, 引入一阶低通滤波器 (First Order Low Pass Filter, FOLPF) 对虚拟控制律进行滤波。

FOLPF 的动态方程为

$$\tau_1 \dot{\alpha}_1 + \alpha_1 = \beta_1 \quad \alpha_1(0) = \beta_1(0) \quad (11)$$

式中,  $\tau_1$  为滤波器时间常数。

定义第 1 阶子系统的 FOLPF 滤波误差为

$$\omega_1 = \alpha_1 - \beta_1 \quad (12)$$

将式(10)代入式(9)可得

$$\dot{e}_1 = -k_1 e_1 + g_1(\mathbf{x})(e_2 + \omega_1) - \tilde{d}_1 \quad (13)$$

式中:  $\tilde{d}_1 = \hat{d}_1 - d_1$ 。

由式(10)和式(11)可得  $\dot{\alpha}_1 = -\omega_1/\tau_1$ , 对式(12)求得

$$\dot{\omega}_1 = \frac{-\omega_1}{\tau_1} - \dot{\beta}_1 = \frac{-\omega_1}{\tau_1} + \frac{\partial g_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}^{-1} \dot{\mathbf{x}} (k_1 e_1 +$$

$$f_1(\mathbf{x}) + \hat{d}_1 - \dot{x}_d) + g_1(\mathbf{x})^{-1} (k_1 \dot{e}_1 + \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \dot{\hat{d}}_1 - \ddot{x}_d) \quad (14)$$

由式(14)可得

$$\left| \dot{\omega}_1 + \frac{\omega_1}{\tau_1} \right| \leq \phi_1(e_1, f_1, \hat{d}_1, \dot{\mathbf{x}}, \dot{x}_d, \ddot{x}_d) \quad (15)$$

式中,  $\phi_1(e_1, f_1, \hat{d}_1, \dot{\mathbf{x}}, \dot{x}_d, \ddot{x}_d)$  为连续未知函数。

由式(15)和引理 1 可得

$$\omega_1 \dot{\omega}_1 \leq -\frac{\omega_1^2}{\tau_1} + |\omega_1| |\phi_1| \leq (1 - \frac{1}{\tau_1}) \omega_1^2 + \frac{\phi_1^2}{4} \quad (16)$$

定义第 1 阶子系统的 Lyapunov 函数为

$$V_1 = \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} \omega_1^2 \quad (17)$$

对  $V_1$  求得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= e_1 \dot{e}_1 + \omega_1 \dot{\omega}_1 = -k_1 e_1^2 + e_1 g_1(\mathbf{x}) e_2 + \\ &e_1 g_1(\mathbf{x}) \omega_1 - e_1 \tilde{d}_1 + \omega_1 \dot{\omega}_1 \end{aligned} \quad (18)$$

由引理 1 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -k_1 e_1^2 + e_1 g_1(\mathbf{x}) e_2 + |e_1| |g_1(\mathbf{x}) \omega_1| + |e_1| |\tilde{d}_1| + \\ &(1 - \frac{1}{\tau_1}) \omega_1^2 + \frac{\phi_1^2}{4} \leq -(k_1 - 2) e_1^2 + e_1 g_1(\mathbf{x}) e_2 + \\ &\frac{\tilde{d}_1^2}{4} + (\frac{g_1^2(\mathbf{x})}{4} + 1 - \frac{1}{\tau_1}) \omega_1^2 + \frac{\phi_1^2}{4} \end{aligned} \quad (19)$$

式中,  $k_1 > 2$ 。

### 2.2.2 第 $i$ 阶设计步骤及稳定性分析

**Step  $i (1 \leq i \leq n-1)$**  由第  $i$  阶子系统的状态跟踪误差  $e_i = x_i - \alpha_i$ , 求得

$$\dot{e}_i = f_i(\mathbf{x}) + g_i(\mathbf{x})x_{i+1} + d_i - \dot{\hat{\alpha}}_{i-1} \quad (20)$$

设计虚拟控制律  $\beta_i$  为

$$\beta_i = -g_i(\mathbf{x})^{-1}(k_i e_i + f_i(\mathbf{x}) + g_{i-1}(\mathbf{x})e_{i-1} + \hat{d}_i - \hat{\alpha}_{i-1}) \quad (21)$$

式中:  $\tilde{d}_i = \hat{d}_i - d_i$ 。

$\beta_i$  中含有  $\hat{\alpha}_{i-1}$ , 采用动态面控制技术后, 由 FOLPF 的动态方程可得  $\dot{\hat{\alpha}}_{i-1} = -\omega_{i-1}/\tau_{i-1}$ , 因此, 解决了反步设计中期望虚拟控制反复求导造成的“微分爆炸”问题。

引入 FOLPF, 对  $\beta_i$  进行滤波, FOLPF 动态方程为

$$\tau_i \dot{\alpha}_i + \alpha_i = \beta_i \quad \alpha_i(0) = \beta_i(0) \quad (22)$$

定义第  $i$  阶子系统 FOLPF 边界层误差为

$$\omega_i = \alpha_i - \beta_i \quad (23)$$

类似第 1 阶子系统, 可得

$$\omega_i \dot{\omega}_i \leq (1 - \frac{1}{\tau_i})\omega_i^2 + \frac{\phi_i^2}{4} \quad (24)$$

式中,  $\phi_i(e_i, f_i, \hat{d}_i, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}_d, \ddot{\mathbf{x}}_d)$  为连续函数。

定义第  $i$  阶子系统的 Lyapunov 函数为

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2}e_i^2 + \frac{1}{2}\omega_i^2 = \sum_{j=1}^i (\frac{1}{2}e_j^2 + \frac{1}{2}\omega_j^2) \quad (25)$$

由式(22)及引理 1 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n-1} &\leq e_i g_i(\mathbf{x}) e_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} (k_i - 2)e_i^2 + \\ &\sum_{i=1}^{n-1} [\frac{\tilde{d}_i^2}{4} + (\frac{|g_i(\mathbf{x})|^2}{4} + 1 - \frac{1}{\tau_i})\omega_i^2 + \frac{\phi_i^2}{4}] \quad (26) \end{aligned}$$

式中,  $k_i > 2$ 。

当  $i = n-1$  时, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n-1} &\leq e_{n-1} g_{n-1}(\mathbf{x}) e_n - \sum_{i=1}^{n-1} (k_i - 2)e_i^2 + \\ &\sum_{i=1}^{n-1} [\frac{\tilde{d}_i^2}{4} + (\frac{g_i^2(\mathbf{x})}{4} + 1 - \frac{1}{\tau_i})\omega_i^2 + \frac{\phi_i^2}{4}] \quad (27) \end{aligned}$$

由此可知, 若使  $e_n$  收敛到零, 则

$$\dot{V}_{n-1} \leq -\eta V_{n-1} + \Gamma \quad (28)$$

式中,  $\Gamma$  和  $\eta$  定义为正常数, 即  $\eta = \min_{1 \leq i \leq n-1} \{2(k_i - 2), 2(-\frac{g_i^2(\mathbf{x})}{4} - 1 + \frac{1}{\tau_i})\}$ ,  $\Gamma = \sum_{i=1}^{n-1} (\frac{\tilde{d}_i^2}{4} + \frac{\phi_i^2}{4})$ 。

### 2.2.3 第 $n$ 阶设计步骤及稳定性分析

Step  $n$  为了使  $e_n$  有限时间收敛到零同时避免终端滑模的奇异问题, 设计如下非奇异终端滑模面<sup>[18]</sup>

$$s = \sigma + \gamma \dot{\sigma}^{p/q} \quad (29)$$

式中:  $\sigma = \int_0^t e_n d\tau$ ;  $\gamma > 0$ ;  $p$  和  $q$  为正奇数, 且  $1 < \frac{p}{q} < 2$ 。

假设非奇异终端滑模面  $s$  在  $t_r$  时刻收敛到零, 即  $s(t_r) = 0, t \geq t_r$ , 则由式(29)可知, 误差积分  $\sigma$  和误差积分的导数  $\dot{\sigma}$  将在有限时间内收敛到零, 收敛时刻为

$$t_s = t_r + \gamma^{q/p} \frac{p}{(p-q)} |\sigma(t_r)|^{(p-q)/p} \quad (30)$$

本文设计的基于 NDO 有限时间稳定的 ABNTSMC 方法, 其稳定性如定理 2 所述。

**定理 2** 考虑一类存在非匹配干扰和建模误差的式(1)非线性系统, 设计如式(6)所示的有限时间稳定 NDO, 选取式(29)非奇异终端滑模面, 设计自适应律为

$$\dot{\hat{F}} = s\beta\gamma \frac{p}{q} \dot{\sigma}^{p/q-1} \quad (31)$$

设计控制律为

$$\begin{aligned} u = & -g_n^{-1}(\mathbf{x}) [f_n(\mathbf{x}) + \hat{F} + \hat{d}_n - \dot{\hat{\alpha}}_{n-1} + \frac{q}{\gamma p} \dot{\sigma}^{2-p/q}] - \\ & g_n^{-1}(\mathbf{x}) [\rho_0 \tanh(\mu s) + \rho_1 s] \quad (32) \end{aligned}$$

式中:  $\rho_0 > |\tilde{d}_n|, \rho_1 > 0, \mu > 0$  为设计参数;  $\hat{F}$  为  $F$  的估计值。则  $e_n$  有限时间收敛, 状态跟踪误差  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  一致最终有界, 系统所有状态  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$  均有界。

用连续的双曲正切函数  $\tanh(\mu s)$  替换传统滑模设计中不连续的符号函数  $\text{sgn}(s)$ , 可以保证滑模控制律的平滑、连续切换, 因而可达到削弱控制抖振的效果。当调节系数  $\mu \rightarrow \infty$  时有  $\tanh(\mu s) \rightarrow \text{sgn}(s)$ 。

采用动态面控制, 引入 FOLPF 进行滤波后, 可用  $-\omega_{n-1}/\tau_{n-1}$  替代控制律  $u$  中的  $\dot{\hat{\alpha}}_{n-1}$  项。

证明 设  $F$  的估计误差为  $\tilde{F}$ , 令  $\tilde{F} = F - \hat{F}$ , 进而由

假设 2 得  $\dot{\tilde{F}} \approx -\dot{\hat{F}}$ 。

定义第  $n$  阶子系统 Lyapunov 函数为

$$V_s = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{\beta}\tilde{F}^2 \quad (33)$$

则整个系统的 Lyapunov 函数为

$$V = V_{n-1} + V_s = \sum_{i=1}^{n-1} (\frac{1}{2}e_i^2 + \frac{1}{2}\omega_i^2) + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{\beta}\tilde{F}^2 \quad (34)$$

对  $V_s$  求导得

$$\dot{V}_s = s\dot{s} - \frac{1}{\beta}\tilde{F}\dot{\tilde{F}} = s\gamma \frac{p}{q} \dot{\sigma}^{p/q-1} (\frac{q}{\gamma p} \dot{\sigma}^{2-p/q} + \ddot{\sigma}) - \frac{1}{\beta}\tilde{F}\dot{\tilde{F}} \quad (35)$$

由状态跟踪误差  $e_n = x_n - \alpha_{n-1}$ , 对  $e_n$  求得

$$\dot{e}_n = \dot{x}_n - \dot{\alpha}_{n-1} = f_n(\mathbf{x}) + g_n(\mathbf{x})u + F + d_n - \dot{\hat{\alpha}}_{n-1} \quad (36)$$

由  $\dot{e}_n = \ddot{\sigma}$ , 将式(31) ~ (32) 和式(36)代入式(35)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_s = & \gamma \frac{p}{q} \dot{\sigma}^{p/q-1} (-\rho_0 |s| - \rho_1 s^2 - s\tilde{d}_n) \leq \\ & \gamma \frac{p}{q} \dot{\sigma}^{p/q-1} [-(\rho_0 - |\tilde{d}_n|)|s| - \rho_1 s^2] \quad (37) \end{aligned}$$

式中,  $\tilde{d}_n = \hat{d}_n - d_n, \rho_0 > |\tilde{d}_n|$ 。

当  $\dot{\sigma} \neq 0$  时, 由于  $p, q$  为奇数且  $1 < \frac{p}{q} < 2$ , 满足  $\dot{\sigma}^{p/q-1} > 0$ , 由式(37)可得  $\dot{V}_s = 0$ , 即  $V_s$  有限时间收敛。当  $\dot{\sigma} = 0$ , 而  $s \neq 0$  时,  $\dot{V}_s = 0$ 。但文献[18]已证明  $\dot{\sigma} = 0$  且  $s \neq 0$  不是系统的吸引子, 系统状态将收敛到滑模面  $s = 0$ 。当系统状态到达非奇异终端滑模面  $s$  后,  $\sigma$  和  $\dot{\sigma}$  也将趋近于零, 即  $e_n$  有限时间收敛。

当  $e_n$  收敛到零时, 由式(28)两边同乘  $e^{\eta t}$  可得

$$\frac{d}{dt}(V_{n-1}(t)e^{\eta t}) \leq e^{\eta t} \Gamma \quad (38)$$

积分得

$$V_{n-1}(t) \leq \frac{\Gamma}{\eta} + [V_{n-1}(0) - \frac{\Gamma}{\eta}]e^{-\eta t} \quad (39)$$

由此可知, 状态跟踪误差  $e_i$  一致最终有界, 即系统跟踪误差  $e = y - x_d = x_1 - x_d = e_1$  一致最终有界, 又由  $x_d$  有界, 可得状态  $x_1$  有界。当设计的 NDO 稳定时, 则  $\tilde{d}_i$  在有限时间内收敛, 即  $\tilde{d}_i$  有界, 则由式(10)可知, 虚拟控制律  $\beta_1$  有界, 从而  $\alpha_1$  及  $\dot{\alpha}_1$  有界, 又由  $e_2 = x_2 - \alpha_1$  有界, 则状态  $x_2$  有界。同理可得, 闭环系统所有状态  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$  均有界。

### 3 仿真与分析

为验证本文设计方法的有效性, 考虑如下带有非匹配干扰和建模误差的三阶不确定非线性系统<sup>[11]</sup>

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + d_1 \\ \dot{x}_2 = x_3 + d_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 \sin x_1 + 5u + F + d_3 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (40)$$

式中:  $d_1 = 0.5 \sin 2t + \sin t, d_2 = te^{-0.5t}, d_3 = 0.8 \sin t$ , 建模误差  $F = 0.01x_2 e^{-0.5x_1}$ , 系统跟踪轨迹  $x_d = 0.5[\sin t + \sin 0.5t]$ , 初始状态  $x_0 = [0.5, 0.5, 0.5]^T$ 。NDO 设计参数为  $\lambda_{10} = 5, \lambda_{11} = 20; \lambda_{20} = 10, \lambda_{21} = 30; \lambda_{30} = 30, \lambda_{31} = 60; a = 3, b = 5$ 。滤波器时间常数  $\tau_1 = \tau_2 = 0.01$ , 非奇异终端滑模面设计参数为  $p = 7, q = 5, \gamma = 0.01$ , 控制器设计参数为  $k_1 = 90, k_2 = 5, \beta = 10, \rho_0 = 0.5, \rho_1 = 8, \mu = 500$ , 仿真结果如图1~图6所示。

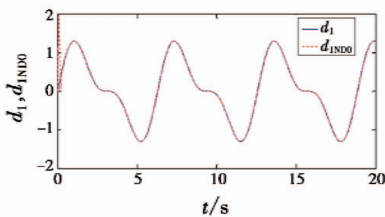


图1 非匹配干扰  $d_1$  及  $d_1$  观测器

Fig.1 Unmatched disturbances of  $d_1$  and the observer of  $d_1$

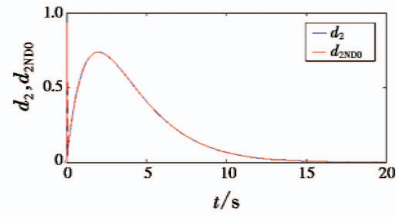


图2 非匹配干扰  $d_2$  及  $d_2$  观测器

Fig.2 Unmatched disturbances of  $d_2$  and the observer of  $d_2$

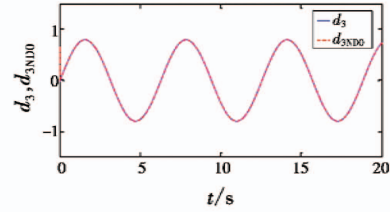


图3 非匹配干扰  $d_3$  及  $d_3$  观测器

Fig.3 Unmatched disturbances of  $d_3$  and the observer of  $d_3$

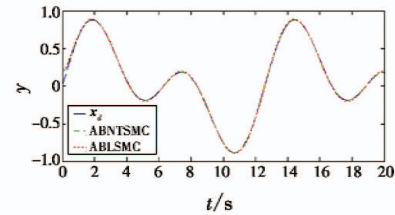


图4 系统跟踪轨迹

Fig.4 System tracking trajectory

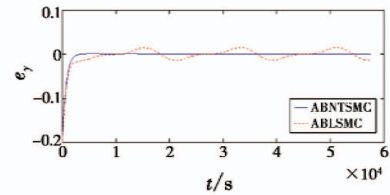


图5 系统跟踪误差

Fig.5 System tracking error

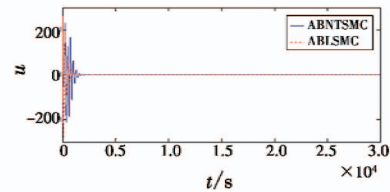


图6 控制输入

Fig.6 Control input

从图1~图3可以看出:设计的 NDO 实现了对外界干扰的精确估计, 选取的 NDO 参数能在满足较高估计精度的同时, 使 NDO 的估计误差在较短时间内收敛。

本文中, 为了验证所设计的 ABNTSMC 的优越性, 将系统跟踪输出  $y$  与系统跟踪误差  $e_y$  与文献[11]中设计的自适应反步线性滑模控制 (Adaptive Backstepping Linear Sliding Mode Control, ABLSMC) 方法进行对比。设计 ABLSMC 方法的滑模面为  $s = 10e_1 + 5e_2 + e_3$ , 其

余相应的设计参数与本文方法保持一致。由图 2 可知,文献[11]的 ABLSMC 方法对系统的外界干扰进行估计和补偿时,控制器的控制误差较大;而相对地,本文在控制速度和精度上都有较大提高。同时,由图 6 可知,用双曲函数替代符号函数后,控制输入基本平滑无抖振。

进一步,定义系统输出稳态误差变化量  $\Delta e = e_{\max} - e_{\min}$ , 控制变化量  $\Delta u = u_{\max} - u_{\min}$ , 控制能耗  $E = \int_0^{10} |u| dt$ <sup>[8]</sup>, 两种方法的控制性能比较如表 1 所示。

表 1 两种方法的控制性能比较

Table 1 Comparison of control performance between two schemes

方法	$\Delta e$	$\Delta u$	$E$
ABNTSMC	0.0153	446.668	34.776
ABLSMC	0.0203	823.536	63.768

由表 1 可以看出,基于 NDO 的 ABNTSMC 方法与文献[11]的基于 NDO 的 ABLSMC 方法相比,本文方法控制精度更高,控制输入信号更加平稳,且降低了控制能耗。

#### 4 结论

本文针对一类存在未知非匹配干扰和建模误差的非线性系统,设计了一种基于 NDO 的 ABNTSMC 方法。反步设计中,利用基于改进滑模微分器设计的 NDO 对非匹配干扰进行精确估计和补偿,消除了非匹配干扰对系统的影响。引入一阶滤波器避免了反步设计中存在的“微分爆炸”问题,设计非奇异终端滑模控制律,提高了系统跟踪误差的收敛速度和控制精度;结合 NDO 和自适应律,使系统对建模误差和匹配干扰也具有鲁棒性;采用双曲正切函数有效抑制控制抖振。仿真结果表明,本文方法能实现系统输出对指定轨迹的稳定跟踪,跟踪误差一致最终有界。通过与无 NDO 的 ABNTSMC 方法和文献[11]基于 NDO 的 ABLSMC 方法进行比较,证明了本文方法的优越性。

#### 参 考 文 献

[1] YANG J, LI S H, SU J Y, et al. Continuous nonsingular terminal sliding mode control for systems with mismatched disturbances[J]. Automatica, 2013, 49(7):2287-2291.

[2] QU S C, XIA X H, ZHANG J F. Dynamics of discrete-time sliding-mode-control uncertain systems with a disturbance compensator[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2014, 61(7):3502-3510.

[3] FANG L Y, LI T S, LI Z F, et al. Adaptive terminal sliding mode control for anti-synchronization of uncertain chaotic

systems[J]. Nonlinear Dynamics, 2013, 74(4):991-1002.

- [4] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法[M]. 北京: 科学出版社, 1996:225-233.
- [5] 李浩, 窦丽华, 苏中. 非匹配不确定系统的自适应反步非奇异快速终端滑模控制[J]. 控制与决策, 2012, 27(10):1584-1587.
- [6] YOUNG D S. Tolerance: an R package for estimating tolerance intervals[J]. Journal of Statistical Software, 2010, 36(5):1-39.
- [7] CHENG C C, OU Y H. Design of adaptive block backstepping controllers for uncertain nonlinear dynamic systems with  $n$  blocks[J]. International Journal of Control, 2013, 86(3):469-477.
- [8] 郑剑飞, 冯勇, 郑雪梅, 等. 不确定非线性系统的自适应反演终端滑模控制[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(4):410-414.
- [9] 王坚浩, 胡剑波. 一类非匹配不确定非线性系统的鲁棒跟踪控制[J]. 控制与决策, 2011, 26(5):727-731, 742.
- [10] 邢晓波, 胡剑波, 王应洋, 等. 一类非线性系统的模糊自适应反推滑模控制[J]. 空军工程大学学报: 自然科学版, 2018, 19(1):104-110.
- [11] 苏磊, 姚宏, 杜军, 等. 基于 NDO 的高阶非线性系统自适应反推滑模控制[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2014, 42(10):47-51.
- [12] 卜祥伟, 吴晓燕, 陈永兴, 等. 基于非线性干扰观测器的高超声速飞行器滑模反演控制[J]. 控制理论与应用, 2014, 31(11):1473-1479.
- [13] 陈阳, 马建伟. 基于非线性干扰观测器的旋转导弹动态逆控制器设计[J]. 火力与指挥控制, 2018, 43(8):156-159.
- [14] LEVANT A. Higher order sliding mode differentiation and output feedback control[J]. International Journal of Control, 2003, 76(9):427-434.
- [15] LEVANT A, LIVNE M. Uncertain disturbances' attenuation by homogeneous multi-input multi-output sliding mode control and its discretisation[J]. Control Theory & Applications, 2015, 9(4):515-525.
- [16] LEVANT A, LIVNE M. Weighted homogeneity and robustness of sliding mode control [J]. Automatica, 2016, 72:186-193.
- [17] 蒲明, 吴庆亮, 姜长生, 等. 高阶滑模微分器的分析与改进[J]. 控制与决策, 2011, 26(8):1136-1140, 1146.
- [18] FENG Y, YU X H, MAN Z H. Non-singular adaptive terminal sliding mode control of rigid manipulators[J]. Automatica, 2002, 38(12):2159-2167.