

引用格式: 刘海亮, 马飞越, 佃松宜, 等. 剥离饱和区域的高效显式模型预测控制算法[J]. 电光与控制, 2019, 26(9): 60-65. LIU H L, MA F Y, DIAN S Y, et al. An efficient explicit model predictive control algorithm based on separating saturated regions[J]. Electronics Optics & Control, 2019, 26(9): 60-65.

## 剥离饱和区域的高效显式模型预测控制算法

刘海亮<sup>1</sup>, 马飞越<sup>2</sup>, 佃松宜<sup>1</sup>, 孔令尧<sup>3</sup>

(1. 四川大学电气信息学院, 成都 610054; 2. 国网宁夏电力公司电力科学研究院, 银川 750011;  
3. 中国人民解放军78618部队, 成都 610100)

**摘要:** 在复杂快速多维度约束系统中, 针对在显式模型预测控制离线计算时, 计算量大、处理缓慢、内存占用过高等问题, 提出了一种基于剥离饱和区域的高效显式模型预测控制算法。结合多面体、分段仿射等相关概念和波利亚定理, 利用显式控制器反馈饱和特性, 去除饱和区域, 保留非饱和和临界区域, 从而达到减少状态分区数量和计算量的目的。根据解耦后四旋翼飞行器的两个状态空间子系统简化模型, 实现了姿态角在扰动后的快速准确调节。数值仿真和半实物仿真实验均验证了该算法在四旋翼飞行器姿态控制上的有效性和优越性。

**关键词:** 四旋翼飞行器; 高效EMPC算法; 显式模型预测控制; 状态分区; 分段仿射; 波利亚阶数

**中图分类号:** TP29 **文献标志码:** A **doi:**10.3969/j.issn.1671-637X.2019.09.014

## An Efficient Explicit Model Predictive Control Algorithm Based on Separating Saturated Regions

LIU Hai-liang<sup>1</sup>, MA Fei-yue<sup>2</sup>, DIAN Song-yi<sup>1</sup>, KONG Ling-yao<sup>3</sup>

(1. College of Electrical and Information, Sichuan University, Chengdu 610054, China; 2. State Grid Corporation of China, Yinchuan 750011, China; 3. No. 78618 Unit of PLA, Chengdu 610100, China)

**Abstract:** Considering that the off-line computation of explicit model predictive control for complex fast multi-dimensional constrained systems has the shortages of large amount of computation, slow processing speed and high memory usage, we proposed an efficient explicit model predictive control algorithm based on separating saturated region. By combining polyhedron, piecewise affine related concepts and Polya theorem and using the feedback saturation characteristic of explicit controllers, the saturated region was removed and the unsaturated critical region was retained, so as to reduce the number of state partitions and computational complexity. Then, based on the state space simplified model of two subsystems of the decoupled quad-rotor aircraft, we realized rapid and accurate adjustment of attitude angles. The effectiveness and superiority of the proposed algorithm in attitude control of the quad-rotor aircraft have been verified by numerical simulation and hardware-in-the-loop simulation experiments.

**Key words:** quad-rotor aircraft; efficient EMPC algorithm; explicit model predictive control; state partition; piecewise affine; Polya order

### 0 引言

作为一种处理多变量约束系统的最优控制问题的先进控制技术, 模型预测控制(Model Predictive Control, MPC)技术已经在诸如化工、石油等工业过程控制

领域得到了普遍应用, 取得了巨大的经济与社会效益<sup>[1-3]</sup>。但是, 现有模型预测控制技术由于科学性、有效性、易用性、非线性等原因, 存在着理论研究与实际应用严重脱节的现象<sup>[4]</sup>。特别因其在线计算量大、计算方法复杂, 面对大规模、快速性控制系统对象, 很难在实际中成功应用。

为解决上述问题, BEMPORAD等提出的显式模型预测控制器(Explicit Model Predictive Control, EMPC)<sup>[5]</sup>将控制优化过程分解为离线计算和在线查找两个部分: 离线计算部分引入多参数二次规划(Multi-Parametric

收稿日期: 2018-10-16

修回日期: 2019-08-23

基金项目: 四川省科技厅应用基础研究项目(2016JY0085)

作者简介: 刘海亮(1988—), 男, 河南洛阳人, 硕士, 助工, 研究方向为先进控制理论在工程中的应用。

Quadratic Programming, MPQP)<sup>[6-8]</sup>, 根据模型、约束参数、最优函数, 通过求解可以计算系统的状态分区以及对应分区的控制律; 在线查找是将控制量求取过程转化为查表过程, 省去了反复优化过程, 只需通过当前时刻状态就可以查找到对应的最优控制量。EMPC 主要具有将隐式系统过渡到显式系统, 工作量转为离线计算、计算量小且应用方便等优点, 解决了 MPC 在大规模、快速性控制系统对象应用层面的部分困境。

然而, 随着控制系统规模的扩大和控制精度的提高, EMPC 离线计算产生的数据也呈指数级别增长<sup>[9]</sup>, 繁重的在线计算量导致其仍然无法满足高速运算的实时性、精确性的要求。在线计算的核心是确定当前状态所在的分区, 因此, 离线阶段对状态空间凸划区域数量的多少直接影响系统的运行速度。通常来说, EMPC 被限定于小状态维数系统控制问题, 此小状态维数系统指小于 6~8 自由度和 8 个参数(状态加参考量)<sup>[5]</sup>, 但是文献[10-11]表明这种限制对于短的预测时限系统来说影响相对较小。有许多学者为了提高在线计算效率、减少离线状态分区做了很多工作, 但用于实时控制常常是十分困难的, 尤其是在考虑具有有限存储空间的控制硬件时。为了将内存占用减少到期望的水平, 经常需要简化给定的 EMPC 控制器。SUARD 等学者利用减少有效约束的方法<sup>[12]</sup>来减少分区数量; KVASNICA 等提出分区裁剪(Clipping-based Complexity Reduction, CCR)和优化区域合并(Optimal Region Merging, ORM)的方法<sup>[13-14]</sup>, 分别利用反馈律的连续性和临界区域的相似性, 减少分区数量。有别于以上两种方法, 本文利用一种新型的区域划分的高效 EMPC 算法, 利用 EMPC 控制器反馈饱和特性, 直接去除掉饱和区域而不是替代, 仅保留非饱和临界区域, 从而大大减少状态分区的数量。

四旋翼飞行器仿真平台作为硬件在环仿真的平台, 通过运动控制卡与计算机相连接, 在计算机上通过运动控制卡实现对四旋翼飞行器中电机的控制<sup>[15]</sup>。硬件在环仿真比数学仿真更加接近实际的系统控制, 能够将控制器的静态特性和动态特性真实反映出来, 对控制理论的研究有着重要的作用<sup>[16]</sup>。本文在高效 EMPC 算法基础上使用四旋翼飞行器仿真平台进行数值仿真和半实物仿真实验, 验证该算法的可行性和优越性。

## 1 控制器设计

### 1.1 设计前提

考虑一类可镇定的线性离散时不变系统

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (1)$$

该系统受限于  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n_x}$  和  $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^{n_u}$  的一个多面体。式中:  $\mathbf{x}_k$  与  $\mathbf{u}_k$  分别表示状态和控制输入;  $\mathbf{x}_{k+1}$  表示基于  $k$  时

刻预测的状态输入;  $n_x$  与  $n_u$  分别表示状态和控制输入矩阵的维度。假设求解如下形式约束有限时间最优控制问题, 即

$$\min_{\mathbf{U}_x} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{Q}_x \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{u}_k^T \mathbf{Q}_u \mathbf{u}_k \quad (2)$$

$$\text{s. t. } \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k, \mathbf{x}_k \in X, \mathbf{u}_k \in U$$

式中, 初始条件  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t)$  (基于  $t$  时刻的计算状态  $\mathbf{x}(t)$ )。假设  $\mathbf{Q}_x$  和  $\mathbf{Q}_u$  为正定矩阵, 同时满足  $\mathbf{Q}_x = \mathbf{Q}_x^T \geq 0, \mathbf{Q}_u = \mathbf{Q}_u^T \geq 0$ , 那么式(2)就是一个严格的凸集 QP 问题。滚动时域模型预测控制(Rolling Horizon Model Predictive Control, RHMPC)反馈就变成了  $\mathbf{u}^* = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \mathbf{U}_N^*$ , 其中,  $\mathbf{U}_N^* = [\mathbf{u}_0^T, \dots, \mathbf{u}_{N-1}^T]^T$  是式(2)的最优解。对于适度规模的问题, 可以将式(2)按照参数二次规划问题求解。

**引理 1**<sup>[5]</sup> 式(2)的解可以通过  $\mathbf{u}^* = \kappa(\mathbf{x})$  来解决, 它的设定如下:

1) 初始条件  $\Omega$  为一个多面体;

2) 函数  $\kappa(\Omega \rightarrow \mathbf{R}^{n_u})$  是  $R(\mathcal{R}_i, i=1, \dots, R)$  个分区的分段仿射(Piecewise Affine, PWA)函数<sup>[5]</sup>, 即

$$\kappa(\mathbf{x}) = \mathbf{K}_i \mathbf{x} + \mathbf{L}_i \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R}_i; \quad (3)$$

3) 区域  $\mathcal{R}_i$  是一个全维多面体;

4)  $\{\mathcal{R}_i\}_{i=1}^R$  是  $\Omega$  的一个分区。

为了使一个完全不同的函数  $\bar{\kappa}$  替换反馈函数式(3),  $\bar{\kappa}$  需满足: 在所有的  $\mathbf{x} \in \Omega$  时和  $\kappa$  是等价的; 比  $\kappa$  更简洁, 包含更少的分区。如果  $\bar{\kappa}$  能被发现, 那么 RHMPC 将会占用更少的内存和计算量。

### 1.2 设计原理

$\bar{\kappa}$  和  $\underline{\kappa}$  分别为多面体  $\Omega = \text{dom}(\kappa)$  的最大值和最小值, 即

$$\begin{cases} \bar{\kappa} = \max \{ \kappa(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \Omega \} \\ \underline{\kappa} = \min \{ \kappa(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \Omega \} \end{cases} \quad (4)$$

每个域  $\Omega = \{\mathcal{R}_i\}_{i=1}^R$  的分区  $\mathcal{R}_i$  可以按照以下规定分类: 如果  $\mathbf{K}_i = 0, \mathbf{L}_i = \bar{\kappa}$ , 那么分区  $\mathcal{R}_i$  在最大值区就是饱和的; 如果  $\mathbf{K}_i = 0, \mathbf{L}_i = \underline{\kappa}$ , 那么分区  $\mathcal{R}_i$  在最小值区就是饱和的; 反之这个分区就是不饱和分区。  $\ell_{\max}$  和  $\ell_{\min}$  分别表示最大和最小饱和区域的索引列表,  $\ell_{\text{unsat}}$  表示不饱和区域的索引列表, 同时让  $\mu = \{\mathcal{R}_i\}_{i \in \ell_{\text{unsat}}}, \bar{\mathcal{R}} = \{\mathcal{R}_i\}_{i \in \ell_{\max}}, \underline{\mathcal{R}} = \{\mathcal{R}_i\}_{i \in \ell_{\min}}$ , 根据这个分类, 式(3)可以改写为

$$\kappa(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{K}_i \mathbf{x} + \mathbf{L}_i & \mathbf{x} \in \mu, i \in \ell_{\text{unsat}} \\ \bar{\kappa} & \mathbf{x} \in \bar{\mathcal{R}} \\ \underline{\kappa} & \mathbf{x} \in \underline{\mathcal{R}} \end{cases} \quad (5)$$

**引理 2**<sup>[17]</sup> 让一个函数  $\xi: \mathbf{R}^{n_x} \in R$  满足

$$\begin{cases} \xi(x) > 0 & \forall x \in \bar{\mathcal{R}} \\ \xi(x) < 0 & \forall x \in \underline{\mathcal{R}} \end{cases} \quad (6)$$

定义

$$\kappa(x) = \begin{cases} K_i x + L_i & x \in \mu, i \in \ell_{\text{unsat}} \\ \bar{\kappa} & x \notin \mu, \xi(x) > 0 \\ \underline{\kappa} & x \notin \mu, \xi(x) < 0 \end{cases} \quad (7)$$

那么对于所有的  $x = \text{dom}(\kappa)$ ,  $\bar{\kappa}(x) = \kappa(x)$ , 如果  $\xi$  被选用为线性函数, 那么它的参数可以用标准支持向量机(SVM)方法计算得到, 然而现实中的实际应用却大多需要得到一个合适的非线性分离器, 困难在于设计一个这样的非线性分离器必须适用满足于  $\bar{\mathcal{R}}$  和  $\underline{\mathcal{R}}$  (一般来说是非凸的集合) 所有的点, 而不是其中的一部分点, 因此 SVM 不能直接用于这些案例。

可以考虑把一个多维空间函数映射到三维空间里, 将坐标轴经过适当的旋转, 从图 1 和图 2 就可以看出, 红色和蓝色数据是可以过一个平面分开的。由此可知, 高维非线性数据就可以通过一个超平面区分开来, 在新的空间线性可分。但同时, 这样处理的结果会造成计算量成倍增大。

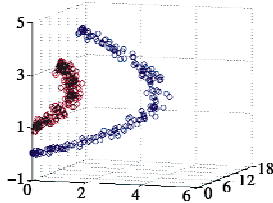


图 1 多维空间函数映射到三维空间

Fig. 1 Multi-dimensional space function projecting to 3D space

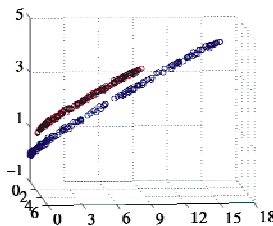


图 2 三维空间旋转后映射到平面上

Fig. 2 The 3D space is rotated and then projected onto the plane

找到一个预指定最大维度  $\delta$  多元多项式的系数可以使  $\xi(x)$  满足式(6), 需要借助数学家波利亚的研究结果, 即

$$\xi(x) := \sum_{i_1 + \dots + i_n = \delta} \alpha_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \quad (8)$$

波利亚定理<sup>[18]</sup>: 设  $\Delta$  为  $n_\lambda$  维的单位单纯形,  $\xi$  为齐次多项式, 即

$$\Delta = \{ \lambda \in \mathbf{R}^{n_\lambda} \mid \lambda \geq 0, \sum_{k=1}^{n_\lambda} \lambda_k = 1 \} \quad (9)$$

$$\tilde{\xi} := \xi(\lambda) \cdot \left( \sum_{k=1}^{n_\lambda} \lambda_k \right)^P \quad (10)$$

当  $\xi(\lambda) > 0$ , 任意一个  $\lambda \in \Delta$  使扩展多项式(10)的所有系数  $\xi(\lambda)$  对于一个足够大的波利亚阶数  $P$  都是正的。

波利亚定理是多项式在单纯形上正的充分条件, 优点在于多项式  $\xi$  的系数可以通过线性规划问题来求出。由于多面体  $\mathcal{R}_i$  在  $0 \in \mathcal{R}_i$  时不是单位单纯形, 为了解决这个问题, 需要用一个带顶点的凸包来表示每一个多面体, 即

$$\mathcal{R}_i = \{ x \mid x = \sum_{k=1}^{|\nu_i|} \lambda_k [\nu_i]_k, \lambda \in \Delta_i \} \quad (11)$$

引理 3 对于每个  $i \in \ell_{\text{max}} \cup \ell_{\text{min}}$ ,  $\xi_i(\lambda)$  通过  $x = \sum_k \lambda_k [\nu_i]_k$  替换到式(8)中求解。如果存在任一参数  $\alpha$  使得

$$\begin{cases} \xi_i(\lambda) > 0 & \forall \lambda \in \Delta_i, \forall i \in \ell_{\text{max}} \\ -\xi_i(\lambda) > 0 & \forall \lambda \in \Delta_i, \forall i \in \ell_{\text{min}} \end{cases} \quad (12)$$

那么式(8)中的  $\xi$  就满足了式(6)。多项式系数是根据每个多面体不同的顶点  $\nu_i$  和参数  $\alpha$  而定的。由于  $\nu_i$  是已知的, 所以系数将会是一个关于  $\alpha$  的线性函数。

引理 4 若多面体的集合  $\bar{\mathcal{R}}$  和  $\underline{\mathcal{R}}$  已知, 那么可以得到多面体  $\bar{\mathcal{R}}$  和  $\underline{\mathcal{R}}$  的顶点  $\nu_i$ 。用  $x = \sum_k \lambda_k [\nu_i]_k$  替换式(8)构造多项式  $\xi_i(\lambda)$ , 通过每个单项乘以  $\sum_{k=1}^{|\nu_i|} \lambda_k$  使每个  $\xi_i(\lambda)$  都有相同的阶数。选择一个波利亚阶数  $P$ , 创造一个关于式(10)扩展多项式  $\tilde{\xi}_i$ 。用  $\text{coeffs}(\tilde{\xi}_i)$  表示  $\tilde{\xi}_i$  的系数, 如果线性规划是可行的, 那么  $\xi$  就是式(8)的解, 严格分离了  $\bar{\mathcal{R}}$  和  $\underline{\mathcal{R}}$ , 即

$$\begin{aligned} & \min \| \alpha \|_1 \quad (13) \\ & \text{s. t. } \text{coeffs}(\tilde{\xi}_i) > 0, \quad \forall i \in \ell_{\text{max}} \\ & \quad \text{coeffs}(-\tilde{\xi}_i) > 0, \quad \forall i \in \ell_{\text{min}} \end{aligned}$$

依据离线预处理, 从波利亚定理中找到一个多项式分离器需要两步: 首先, 需要计算出多面体  $\bar{\mathcal{R}}$  和  $\underline{\mathcal{R}}$  的顶点; 其次, 分离器的系数需要通过求解式(13)得到。

依据在线计算, 从式(7)中定点  $x$  得到  $\bar{\kappa}(x)$  需要首先评估是否  $x \in \mu$ 。顺序搜索不饱和区域可以解决这个问题, 其步骤如下:

- 1) 检测当前时刻的系统状态  $x$ ;
- 2) 依次查找第  $i (i = 1, 2, 3, \dots, N)$  个分区, 若满足第  $i$  个分区的分区表达式  $x \in \mathcal{R}_i$ , 则属于第  $i$  个分区, 进

入下一步,否则查找下一个分区;

3) 计算第*i*个分区对应的控制率  $\kappa(x) = K_i x + L_i$ 。

对所需的在线储存进行量化,储存原始函数  $\kappa$  需要  $\sum_{i=1}^{\infty} c_i(n_x + 1)$  的内存,其中,  $c_i$  代表第*i*个分区的对应参数,  $n_x$  代表状态分区的数量。而式(7)中更简单的函数  $\bar{\kappa}$  储存更简单的分离器和不饱和区域仅仅需要  $\delta(\xi) + \sum_{i \in I_{\text{unsat}}} c_i(n_x + 1)$  的内存,其中,  $\delta(\xi)$  指分离器的大小,只储存了单内点  $x_0$ ,相比于原始函数需要的内存更小。

## 2 四旋翼飞行器模型

本文研究的对象是某四旋翼飞行仿真器。该平台是一个四输入三输出的对象,系统输入是4个电机的输入电压  $u_1, u_2, u_3, u_4$ ,输出为其3个姿态角(俯仰角  $p$ 、滚动角  $r$ 、偏航角  $y$ )。

受力坐标系如图3所示。

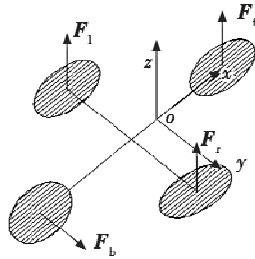


图3 力学坐标系

Fig.3 Mechanical coordinate system

假设每个电机产生的升力  $F_1, F_2, F_3, F_4$  的大小与电机的电压成正比,线性化其运动方程<sup>[15]</sup>

$$\begin{cases} \dot{p} = \dot{p} \\ \ddot{p} = \frac{-K_{fc} l_f u_f - K_{fc} l_c u_1 - K_{fc} l_c u_2}{J_p} \\ \dot{r} = \dot{r} \\ \ddot{r} = \frac{K_{fc} l_a u_1 - K_{fc} l_a u_2}{J_r} \\ \dot{y} = \dot{y} \\ \ddot{y} = \frac{K_{fc} l_b u_b}{J_y} \end{cases} \quad (14)$$

可得一个六状态空间模型<sup>[19]</sup>。式中:  $J_p, J_r, J_y$  分别为俯仰角、滚动角、偏航角的转动惯量;  $K_{fc}$  为升压比;  $l_f$  为前电机到  $y$  轴的距离;  $l_b = l_f$  为后电机到  $y$  轴的距离;  $l_c = 1/(2l_f)$  为左右两电机到  $x$  轴的距离;  $l_a = \sqrt{3}/(2l_f)$  为左右两电机到  $y$  轴的距离。

但是模型过于复杂,可能会使算法难以应用于四旋翼飞行仿真器。由于滚动角与俯仰角存在耦合,而偏航角与俯仰角、滚动角无耦合关系,因此考虑文献[20]中

的做法,将六状态空间模型解耦为如下两个系统。

1) 偏航角状态空间模型(系统1)。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases} \quad (15)$$

$$\text{式中: } A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5.741 \end{bmatrix}; C_1 = [1 \quad 0].$$

2) 俯仰角、滚动角的状态空间模型(系统2)。

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 \end{cases} \quad (16)$$

$$\text{式中: } A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -8.23 & -4.115 & -4.115 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16.6037 & -16.6037 \end{bmatrix};$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

## 3 数值仿真和半实物仿真实验

### 3.1 离线计算

通过对四旋翼飞行器各物理量测量与分析,可以得到各角度的约束范围以及电机电压最大值<sup>[21]</sup>。

对于系统1,选取采样时间为0.1 s,设计输入约束为  $-6.4^\circ \leq u_1 \leq 6.4^\circ$ ,状态约束为  $[-180 \quad -30]^\top \leq x_1 \leq [180 \quad 30]^\top$ ,状态加权矩阵为  $\text{diag}[1 \quad 0.4]$ ,控制量加权矩阵为单位矩阵,设置预测步长为5,高效EMPC算法和EMPC算法对偏航角的控制分区情况如图4所示,其中不同颜色代表不同的状态分区。

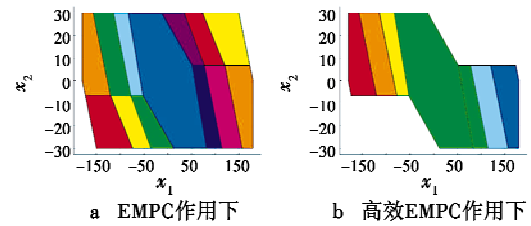


图4 系统1的控制分区图

Fig.4 Control partition of System 1

对于系统2,选取采样时间为0.1 s,设计输入约束为  $[-6.7^\circ \quad -7^\circ \quad -7^\circ]^\top \leq u_2 \leq [6.7^\circ \quad 7^\circ \quad 7^\circ]^\top$ ,状态约束为  $[-15 \quad -30 \quad -15 \quad -30]^\top \leq x_2 \leq [15 \quad 30 \quad 15 \quad 30]^\top$ ,状态加权矩阵为  $\text{diag}[1 \quad 0.1 \quad 1 \quad 0.1]$ ,控制率加权矩阵为单位矩阵,设定预测步长为2,高效EMPC算法与EMPC算法对俯仰角和滚动角的控制分区情况如图5所示,其中,  $\theta_1 \sim \theta_3$  分别代表系统2的状态输入三维空间。

通过图4、图5的比较可以发现,高效EMPC算法在剥离了饱和区域后,大大地减少了状态分区的数量,从而缩短了离线预处理时间和在线计算时间。尤其是对于系统2这种状态空间大于2的小状态维度系统,状态分区数量减少了86.5%,这对于一些快速控制系

统来说是很大的优势。

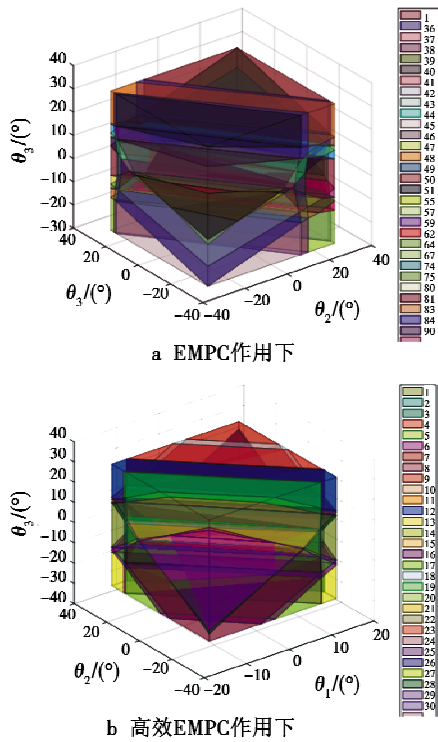


图 5 系统 2 的控制分区图

Fig. 5 Control partition of System 2

在操作系统为 Windows10, CPU 为 AMD Ryzen 5 1400 (3.49 GHz), 内存为 8 GiB 的相同电脑环境下, 经过 136 次计算, 根据求得的显式控制器, 在线算法采用顺序搜索算法<sup>[19]</sup>, 其中, 误差指高效 EMPC 算法与 EMPC 算法相比分区出错的情况, 两种算法比较如表 1 所示。

表 1 高效 EMPC 算法与 EMPC 算法主要参数比较

Table 1 Parametric comparison of the efficient EMPC algorithm with the EMPC algorithm

系统 1	EMPC	高效 EMPC	系统 2	EMPC	高效 EMPC
控制分区数量	13	7	控制分区数量	511	69
平均离线预处理时间/s	0.045	0.032	平均离线预处理时间/s	9.813	1.679
在线计算时间/ms	1.326	0.986	在线计算时间/ms	46.165	11.722
平均误差率/%		2.7	平均误差率/%		0.83
最大误差率/%		11	最大误差率/%		3.1

由表 1 可以看出, 高效 EMPC 算法在处理系统 2 时, 相较于 EMPC 算法, 牺牲了可以相较忽略不计的误差, 减少了 442 个状态分区数量, 平均离线预处理时间和在线计算时间分别是 EMPC 算法的 17.1%, 25.3%。

高效 EMPC 算法在系统 1 中由于最大误差过大, 处理时间上相差无几, 因此优势不大。

### 3.2 半实物硬件仿真实验

经过数值仿真比较后, 由于系统 1 最大误差率过大, 处理时间缩短的较少, 因此采用 EMPC 算法, 而系统 2 采用高效 EMPC 算法, 进行半实物仿真实验。初始条件: 俯仰角为 7°, 滚动角为 -6°, 偏航角为 -5°, 达到稳定后, 在 12 s 时, 分别给 3 个姿态角添加扰动: 俯仰角添加 10° 的扰动, 滚动角添加 -28° 的扰动, 偏航角添加 2° 的扰动。

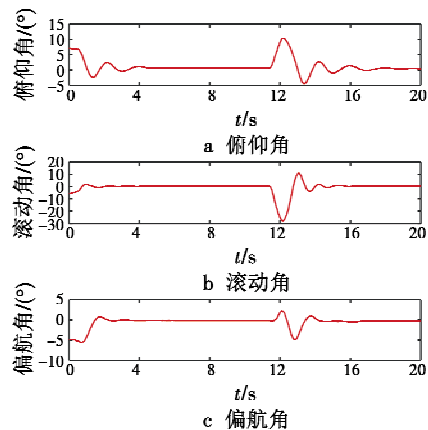


图 6 姿态角加入扰动后的变化曲线

Fig. 6 The change curve of attitude angle after disturbance is added

由图 6 可以看到, 系统初始各个角度能平稳地调节到稳定状态, 并未超出约束范围。其中, 滚动角和偏航角都能在 2 s 时快速调节到稳定状态, 俯仰角也能在 4 s 后达到稳定状态。在 12 s 时添加扰动后, 各个角度也能在 4 s 左右稳定地恢复到平衡状态。

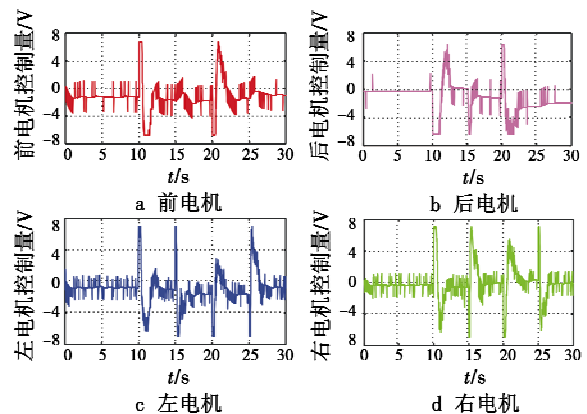


图 7 系统输入(电机控制量)曲线

Fig. 7 System input (motor control quantity) curve

由图 7 可以看出, 输入状态下 4 个电机的电压初始值都能在约束范围之内, 在 12 s 时添加扰动后, 电压有一定的波动, 但都未超过约束范围, 各电机经过近

10 s 的调节电压趋于稳定。

#### 4 结论

本文将高效 EMPC 算法应用于四旋翼飞行仿真平台,验证了算法在理论上的可行性,但在实际中可行与否还需进一步实物验证。另外,该算法由于空间复杂度和预测步长耦合交杂,在高维度空间状态分区投影出错的几率会进一步增大,使得该算法应用有一定局限性。下一步会通过有效集线性规划方法,将状态分区数集进行更有效的区分和精简,以便降低问题复杂度,减少出错几率,扩大该算法的应用范围。

#### 参考文献

- [1] KEVICZKY T, BALAS G J. Receding horizon control of an F-16 aircraft: a comparative study [J]. *Control Engineering Practice*, 2006, 14(9): 1023-1033.
- [2] WANG W L, RIVERA D E, KEMPF K G. Model predictive control strategies for supply chain management in semiconductor manufacturing [J]. *International Journal of Production Economics*, 2007, 107(1): 56-77.
- [3] TARTAGLIONE G, D'AMATO E, ARIOLA M, et al. Model predictive control for a multi-body slung-load system [J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2017, 92: 1-11.
- [4] 席裕庚, 李德伟, 林姝. 模型预测控制—现状与挑战 [J]. *自动化学报*, 2013, 39(3): 222-236.
- [5] BEMPORAD A, MORARI M, DUA V, et al. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems [J]. *Automatica*, 2002, 38(1): 3-20.
- [6] MOTEE N, JADBABAIE A. Distributed multi-parametric quadratic programming [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(10): 2279-2289.
- [7] KOURAMAS K I, FAISCA N P, PANOS C, et al. Explicit/multi-parametric model predictive control of linear discrete-time systems by dynamic and multi-parametric programming [J]. *Automatica*, 2011, 47(8): 1638-1645.
- [8] AHMADI-MOSHKENANI P, JOHANSEN T A, OLARU S. Combinatorial approach toward multiparametric quadratic programming based on characterizing adjacent critical regions [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(10): 3221-3231.
- [9] 张聚, 马燕芳, 何雪华. 显式模型预测控制的多胞体近似算法研究 [C]//第32届国际控制会议, 2013: 4093-4098.
- [10] FELLER C, JOHANSEN T A. Explicit MPC of higher-order linear processes via combinatorial multi-parametric quadratic programming [C]//European Control Conference (ECC), 2013: 536-541.
- [11] GUPTA A, BHARTIYA S, NATARAJ P, et al. A novel approach to multiparametric quadratic programming [J]. *Automatica*, 2011, 47(9): 2112-2117.
- [12] SUARD R, LÖBERG J, GRIEDER P, et al. Efficient computation of controller partitions in multi-parametric programming [C]//The 40th IEEE Conference on Decision and Control, 2001: 3643-3648.
- [13] KVASNICA M, FIKAR M. Clipping-based complexity reduction in explicit MPC [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(7): 1878-1883.
- [14] KVASNICA M, HOLAZA J, TAKACS B, et al. Design and verification of low-complexity explicit MPC controllers in MPT3 [C]//European Control Conference (ECC), 2015: 2595-2600.
- [15] 曾小勇, 彭辉, 吴军. 四旋翼飞行器的建模与姿态控制 [J]. *中南大学学报: 自然科学版*, 2013, 44(9): 3693-3700.
- [16] 黄建强, 鞠建波. 半实物仿真技术研究现状及发展趋势 [J]. *舰船电子工程*, 2011, 31(7): 5-7.
- [17] KVASNICA M, HLEDIK J, RAUOVA I, et al. Complexity reduction of explicit model predictive control via separation [J]. *Automatica*, 2013, 49(6): 1776-1781.
- [18] 王泽群, 燕敦彦. 迭代的哈代-李特伍德极大函数 [J]. *中国科学院大学学报*, 2018, 35(4): 433-437.
- [19] 杨帆. 显式模型预测控制及其应用研究 [D]. 成都: 四川大学, 2017.
- [20] 王仑, 苏敏, 杨帆, 等. 四旋翼飞行器姿态的显式模型预测控制 [J]. *电光与控制*, 2017, 24(11): 53-57.
- [21] 魏吉敏. 四旋翼飞行器的建模及预测控制研究 [D]. 长沙: 中南大学, 2013.