

引用格式:欧建军,张安,鄢伟安.广义熵损失函数下维纳过程的贝叶斯估计[J].电光与控制,2019,26(8):24-27. OU J J, ZHANG A, YAN W A. Bayesian estimation of Wiener process based on generalized entropy loss function[J]. Electronics Optics & Control, 2019, 26(8):24-27.

广义熵损失函数下维纳过程的贝叶斯估计

欧建军^{1,2}, 张安¹, 鄢伟安³

(1. 西北工业大学,西安 710072; 2. 空军工程大学,西安 710038; 3. 华东交通大学,南昌 330013)

摘要: 基于广义熵损失函数,分别在无信息先验及共轭先验分布下,获得维纳过程参数及可靠性指标的贝叶斯估计,并将其与极大似然估计、平方损失函数下的贝叶斯估计进行对比讨论。仿真结果表明,广义熵损失函数下的贝叶斯估计均方误差最小,精度最高,同时该估计的表达式比较灵活,能够有效刻画过高估计和过低估计造成风险不同的情形。

关键词: 可靠性分析; 维纳过程; 广义熵损失函数; 贝叶斯估计; 性能退化

中图分类号: E917 **文献标志码:** A **doi:**10.3969/j.issn.1671-637X.2019.08.005

Bayesian Estimation of Wiener Process Based on Generalized Entropy Loss Function

OU Jian-jun^{1,2}, ZHANG An¹, YAN Wei-an³

(1. Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China; 2. Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China; 3. East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: The Bayesian estimation of the parameters and reliability function for Wiener process are obtained based on the generalized entropy loss function by using both non-informative and conjugate prior distribution, and it is compared with the Bayesian estimation under the square loss function and maximum likelihood estimation. The simulation results show that: The Bayesian estimation under the generalized entropy loss function has the smallest mean square error and the highest precision, and the expression of the estimation is flexible, which can effectively describe the situation where the risks are different due to over-estimation and under-estimation.

Key words: reliability analysis; Wiener process; generalized entropy loss function; Bayesian estimation; performance degradation

0 引言

传统的可靠性分析方法以失效数据作为分析对象,但是随着现代科学技术的迅速发展,产品设计、制造技术以及使用材料的不断提高和改善等,产品的可靠性越来越高,寿命越来越长,即使在加速寿命试验条件下,在一定时间内通常也很难获取足够多的失效数据,这就使得传统的可靠性分析方法很难取得满意的结果,同时,对于一些价格昂贵的设备,获取足够的寿命数据的经济成本过高,甚至难以承受^[1-2]。

考虑到很多产品的性能在内外因素的综合作用下会产生变化,当这种变化累积到某种量级时,会导致产

品出现损伤,当这种损伤累积到一定程度时,失效发生(即退化型失效)。如元器件电性能的衰退、机械元件磨损、绝缘材料老化等。产品的退化过程中蕴藏了丰富的可靠性信息。基于性能退化的可靠性建模与分析技术,是解决小子样、高可靠性与长寿命产品可靠性设计、分析、试验与评估等问题的关键技术之一,也是当前可靠性领域的研究重点和热点^[3-4]。

退化模型是性能退化可靠性分析的关键要素之一,由于产品的退化过程往往表现为随机性和动态性特征^[5],许多学者包括 SINGPURWALLA^[6]和 AALEN^[7]等都提倡采用随机过程来描述退化过程,其中维纳过程在性能退化分析中应用广泛^[8-9]。诸多学者针对退化模型为维纳过程的情形进行可靠性分析,其中,贝叶斯方法能够有效融合历史信息,受到很多学者的关注。彭宝华^[10]针对维纳过程性能退化产品提出了一种可靠性评估的 Bayes 方法,并通过实例验证了方法的适

收稿日期:2018-12-19 修回日期:2019-07-19

基金项目:国家自然科学基金(71861011,61703326)

作者简介:欧建军(1974—),男,陕西凤翔人,博士生,讲师,研究方向为作战效能,贝叶斯估计等。

用性。GUAN^[11]针对维纳过程,运用客观贝叶斯方法对参数进行了估计。进行贝叶斯估计涉及一个关键要素即损失函数的选取,目前大多数文献对维纳过程的贝叶斯估计中,都是基于计算简单方便、适合刻画过高估计和过低估计造成风险相等的情形的对称平方损失函数。但是,对于有些产品,过高估计和过低估计造成的风险不对等。比如对火箭系统而言,估计过低只是造成部分研制经费的增加,但估计过高则可能造成火箭在运载过程中箭毁人亡的危险,显然过高估计和过低估计造成的风险有很大差别。考虑到广义熵损失函数能够灵活有效地刻画这种风险不对等情形^[12],本文基于维纳过程模型,引入广义熵损失函数,给出模型参数的贝叶斯估计,然后通过实例分析验证方法的有效性。

1 维纳过程模型

根据文献[13],通常将维纳过程记为 $X(t; \mu, \sigma) = \mu t + \sigma B(t)$,其中: $\mu(t)$ 是退化的平均曲线; σ 是扩散系数; $B(t)$ 为标准布朗运动。当退化量首次达到失效阈值 D 时,产品失效,所对应的时间为产品的寿命,即寿命 T 定义为 $T = \inf\{t; X(t) = D; t \geq 0\}$ 。由文献[13]可知, T 服从逆高斯分布,相应的概率密度函数为

$$f_D(t) = \frac{D}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} \exp\left(-\frac{(D - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right) \quad (1)$$

2 极大似然估计

假设样品个数为 n , 设 X_{ij} 表示受试样品在 t_{ij} 时刻的检测值, $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m_j, m_j$ 是样品 j 的总检测次数, $\Delta X_{ij} = X_{ij} - X_{i, (j-1)}$ 表示在时间区间 $[t_{i, (j-1)}, t_{ij}]$ 上的增量。假设产品退化过程服从线性退化的维纳过程,根据性能退化数据,得似然函数为

$$L = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{m_j} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 \Delta t_{ij}}} \exp\left(-\frac{(\Delta x_{ij} - \mu \Delta t_{ij})^2}{2\sigma^2 \Delta t_{ij}}\right) \quad (2)$$

进而可得参数 μ, σ^2 以及 t 时刻可靠度 $R(t)$ 的点估计分别为

$$\begin{cases} \hat{\mu}_M = \frac{\sum_{i=1}^n X_{im_j}}{\sum_{i=1}^n t_{im_j}} \\ \hat{\sigma}_M^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n m_i} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_j} ((\Delta x_{ij})^2 / \Delta t_{ij}) - \left(\sum_{i=1}^n x_{im_j} \right)^2 / \sum_{i=1}^n t_{im_j} \right] \\ \hat{R}_M(t) = \Phi\left(\frac{D - \hat{\mu}_M t}{\hat{\sigma}_M \sqrt{t}}\right) - \exp\left(\frac{2\hat{\mu}_M D}{\hat{\sigma}_M^2}\right) \Phi\left(\frac{-D - \hat{\mu}_M t}{\hat{\sigma}_M \sqrt{t}}\right) \end{cases} \quad (3)$$

式中, $\Phi(\cdot)$ 是标准正态累积分布函数。

3 广义熵损失函数下的贝叶斯估计

3.1 广义熵损失函数

根据文献[13],广义熵损失函数的定义为

$$L(\theta, \hat{\theta}) \propto (\hat{\theta}/\theta)^q - q \ln(\hat{\theta}/\theta) - 1 \quad (4)$$

当参数的估计 $\hat{\theta} = \theta$ 时,损失函数最小;参数 q 是衡量过高与过低估计的权重。广义熵损失函数能够有效刻画过高估计与过低估计造成的风险。

根据文献[13],基于广义熵损失函数,参数的贝叶斯估计表达式为

$$\hat{\theta}_G = [E(\theta^{-q})]^{-1/q} \quad (5)$$

3.2 无信息先验下的贝叶斯估计

贝叶斯评估方法利用先验信息充分挖掘周围的各种信息使统计推断更为有效。不过对于一些新产品,无任何先验信息可以利用,或者受其他原因的限制,无法获取部件的先验信息,在这种情形下,可以利用无信息先验分布。其中,Jeffreys 先验是使用最为广泛的无信息先验分布之一,下面基于 Jeffreys 先验进行贝叶斯估计。

参数 μ 和 σ^2 的 Jeffreys 先验分布分别为

$$\begin{cases} \pi_1(\mu) \propto 1 \\ \pi_1(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \end{cases} \quad (6)$$

基于贝叶斯理论和 Jeffreys 先验分布,可得参数 μ 和 σ^2 的后验分布为

$$\pi_1(\mu, \sigma^2 | x) \propto \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{B_1+1} \exp\left(-\frac{B_2}{2\sigma^2}\right) \times \frac{1}{\sigma} \exp\left[-\frac{A_1(\mu - B_3)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (7)$$

即后验分布服从逆高斯-正态分布 $IG(B_1, B_2)N(B_3, \sigma^2/A_1)$, 其中, $A_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_j} \Delta t_{ij}, A_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_j} \Delta x_{ij}, A_3 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_j} \frac{\Delta x_{ij}^2}{\Delta t_{ij}}, B_1 = (N + m_0 - 1)/2, B_2 = (A_3 - A_2^2/A_1)/2, B_3 = A_2/A_1$ 。

参数 σ^2 的后验分布为逆高斯分布,即

$$\pi_1(\sigma^2 | x) = \int_0^\infty \pi_1(\mu, \sigma^2 | x) d\mu \sim IG(B_1, B_2) \quad (8)$$

参数 μ 的后验分布是自由度为 $2B_1$ 的 t 分布,即

$$\pi_1(\mu | x) = \int_0^\infty \pi_1(\mu, \sigma^2 | x) d\sigma^2 \sim t(2B_1) \quad (9)$$

所以,基于 Jeffreys 先验分布,在平方损失函数下,参数 μ, σ^2 以及 $R(t)$ 的贝叶斯估计分别为

$$\begin{cases} \hat{\mu}_{SI} = E_1(\mu | x) = B_3 \\ \hat{\sigma}_{SI}^2 = E_1(\sigma^2 | x) = B_2/B_1 \\ \hat{R}_{SI}(t) = E_1(R_D(t) | x) \end{cases} \quad (10)$$

式中, $E_1(\cdot)$ 表示后验分布的期望。

在广义熵损失函数下,参数 μ, σ^2 以及 $R(t)$ 的贝叶斯估计分别为

$$\begin{cases} \hat{\mu}_{G1} = [E_1(\mu^{-q} | x)]^{-1/q} \\ \hat{\sigma}_{G1}^2 = [E_1(\sigma^{-2q} | x)]^{-1/q} \\ \hat{R}_{G1}(t) = [E_1(R_D(t) | x)]^{-1/q} \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \hat{\mu}_{G2} = [E_2(\mu^{-q} | x)]^{-1/q} \\ \hat{\sigma}_{G2}^2 = [E_2(\sigma^{-2q} | x)]^{-1/q} \\ \hat{R}_{G2}(t) = [E_2(R_D(t) | x)]^{-1/q} \end{cases} \quad (17)$$

3.3 共轭先验下的贝叶斯估计

当产品有历史信息可以使用时,可以采用共轭先验分布融合历史信息,对于维纳过程,参数 μ 和 σ^2 的共轭先验分布为逆高斯-正态分布,即

$$\pi_2(\mu, \sigma^2) \propto IG(a, b)N(c, d\sigma^2) \quad (12)$$

根据贝叶斯理论,基于共轭先验分布,可得参数 μ 和 σ^2 的后验分布为

$$\pi_2(\mu, \sigma^2 | x) \sim IG(B'_1, B'_2)N(B'_3, \sigma^2/A'_1) \quad (13)$$

式中: $A'_1 = \frac{1}{d} + A_1$; $A'_2 = \frac{c}{d} + A_1 B_3$; $A'_3 = \frac{c^2}{d} + A_1 B_3^2$; $B'_1 = B_1 + a + 3/2$; $B'_2 = B_2 + b + (A'_3 - A_2^2/A'_1)/2$; $B'_3 = A'_2/A'_1$ 。

因此,参数 σ^2 的边缘分布为

$$\pi_2(\sigma^2 | x) \sim IG(B'_1, B'_2) \quad (14)$$

参数 μ 的边缘分布为

$$\pi_2(\mu | x) = \int_0^\infty \pi_2(\mu, \sigma^2 | x) d\sigma^2 \sim t(2B'_1) \quad (15)$$

在共轭先验分布下,基于平方损失函数,参数 μ , σ^2 以及可靠度函数 $R(t)$ 的贝叶斯估计为

$$\begin{cases} \hat{\mu}_{S2} = E_2(\mu | x) = B'_3 \\ \hat{\sigma}_{S2}^2 = E_2(\sigma^2 | x) = B'_2/B'_1 \\ \hat{R}_{S2}(t) = E_2(R_D(t) | x) \end{cases} \quad (16)$$

式中, $E_2(\cdot)$ 表示后验期望。

在共轭先验分布下,基于广义熵损失函数,参数 μ , σ^2 以及可靠度函数 $R(t)$ 的贝叶斯估计分别为

表1 参数 μ, σ^2 的估计及相应的均方误差 ($\mu = 1.2, \sigma^2 = 0.08$)

Table 1 Estimation and MSE of parameter μ and σ^2 ($\mu = 1.2, \sigma^2 = 0.08$)

权重 q	-4	-2	-0.2	0.2	2	4
$\hat{\mu}_M$	0.9668 (0.0096)	0.9668 (0.0096)	0.9668 (0.0096)	0.9668 (0.0096)	0.9668 (0.0096)	0.9668 (0.0096)
$\hat{\mu}_{S1}$	0.9996 (2.033 1E-3)	0.9996 (2.033 1E-3)	0.9996 (2.033 1E-3)	0.9996 (2.033 1E-3)	0.9996 (2.033 1E-3)	0.9996 (2.033 1E-3)
$\hat{\mu}_{G1}$	1.0156 (1.377 1E-4)	1.0665 (3.876 2E-4)	0.9335 (0.01442)	0.9118 (0.029 11)	0.9095 (0.031 27)	0.8971 (0.033 45)
$\hat{\mu}_{S2}$	1.1038 (1.967 9E-4)	1.1038 (1.967 9E-4)	1.1038 (1.967 9E-4)	1.1038 (1.967 9E-4)	1.1038 (1.967 9E-4)	1.1038 (1.967 9E-4)
$\hat{\mu}_{G2}$	1.1825 (1.067 8E-4)	1.1213 (8.655 2E-4)	1.1002 (0.621 1E-4)	1.0995 (4.348 2E-4)	0.9996 (5.386 2E-3)	0.9871 (0.0098)
$\hat{\sigma}_M^2$	0.0498 (5.621 7E-4)	0.0498 (5.621 7E-4)	0.0498 (5.621 7E-4)	0.0498 (5.621 7E-4)	0.0498 (5.621 7E-4)	0.0498 (5.621 7E-4)
$\hat{\sigma}_{S1}^2$	0.0501 (5.511 2E-4)	0.0501 (5.511 2E-4)	0.0501 (5.511 2E-4)	0.0501 (5.511 2E-4)	0.0501 (5.511 2E-4)	0.0501 (5.511 2E-4)
$\hat{\sigma}_{G1}^2$	0.0697 (1.008 1E-4)	0.0602 (1.071 1E-4)	0.0499 (5.606 8E-4)	0.0487 (8.073 40E-4)	0.0472 (9.511 0E-4)	0.0461 (9.839 4E-5)
$\hat{\sigma}_{S2}^2$	0.0579 (3.116 9E-4)	0.0579 (3.116 9E-4)	0.0579 (3.116 9E-4)	0.0579 (3.116 9E-4)	0.0579 (3.116 9E-4)	0.0579 (3.116 9E-4)
$\hat{\sigma}_{G2}^2$	0.0611 (1.377 1E-4)	0.0599 (6.707 7E-4)	0.0569 (3.125 0E-4)	0.0552 (4.927 5E-4)	0.0550 (5.034 4E-4)	0.0459 (7.377 1E-4)

4 仿真分析

给定阈值 D 、参数 μ 和 σ^2 的真值,运用 Monte Carlo 方法产生容量为 n 且服从维纳过程的样本。利用该组数据给出参数 μ, σ^2 及可靠度函数 $R(t)$ 的估计。重复上述模拟过程 N 次,分别计算各种估计的均方误差。步骤如下:

- 1) 随机产生 n 个整数值 m_1, m_2, \dots, m_n , 分别表示每个产品选取的性能退化数据的个数;
- 2) 给定参数 μ, σ^2 的真值,对第 $i(1 \leq i \leq n)$ 个产品,根据维纳过程,随机产生 m_i 个性能退化数据 $x(t_{ij})$;
- 3) 根据随机退化数据 $x(t_{ij})$ 计算退化增量 $\Delta x(t_{ij})$;
- 4) 结合式(3),可得极大似然估计 $\hat{\mu}_M, \hat{\sigma}_M^2, \hat{R}_M(t)$;
- 5) 结合式(10)与式(11)可得基于无信息先验,平方损失函数下以及广义熵损失函数下的贝叶斯估计 $\hat{\mu}_{S1}, \hat{\sigma}_{S1}^2, \hat{R}_{S1}(t), \hat{\mu}_{G1}, \hat{\sigma}_{G1}^2, \hat{R}_{G1}(t)$;
- 6) 结合式(16)与式(17),可得基于共轭先验分布,平方损失函数下以及广义熵损失函数下的贝叶斯估计 $\hat{\mu}_{S2}, \hat{\sigma}_{S2}^2, \hat{R}_{S2}(t), \hat{\mu}_{G2}, \hat{\sigma}_{G2}^2, \hat{R}_{G2}(t)$;
- 7) 重复上述步骤 $N(N$ 可选取 5000) 次,计算参数和可靠度函数 N 次估计的平均值作为模拟的估计值,同时计算各估计的均方误差 MSE。

表1与表2列出了相应的估计及均方误差,图1给出了相应的可靠度估计曲线。

表 2 参数 μ, σ^2 取不同值时的估计
Table 2 Estimations under different μ and σ^2

参数 (μ, σ^2)	$(\hat{\mu}_M, \hat{\sigma}_M^2)$	$(\hat{\mu}_{S1}, \hat{\sigma}_{S1}^2)$	$(\hat{\mu}_{C1}, \hat{\sigma}_{C1}^2)$	$(\hat{\mu}_{S2}, \hat{\sigma}_{S2}^2)$	$(\hat{\mu}_{C2}, \hat{\sigma}_{C2}^2)$
(0.8, 0.02)	(0.6813, 0.0113)	(0.6947, 0.0115)	(0.7118, 0.0121)	(0.7001, 0.0119)	(0.7233, 0.0135)
(0.8, 0.06)	(0.6111, 0.0433)	(0.6236, 0.0457)	(0.6883, 0.0498)	(0.6687, 0.0504)	(0.7261, 0.0585)
(0.8, 0.10)	(0.6541, 0.0867)	(0.6638, 0.0874)	(0.6851, 0.0881)	(0.6971, 0.0874)	(0.7111, 0.0901)
(1.2, 0.02)	(0.9744, 0.0101)	(1.0020, 0.0127)	(1.0335, 0.0129)	(1.0279, 0.0131)	(1.1058, 0.0187)
(1.2, 0.08)	(0.9976, 0.0669)	(1.0561, 0.0688)	(1.0688, 0.0691)	(1.0775, 0.0694)	(1.1123, 0.0741)
(1.2, 0.14)	(1.0050, 0.1155)	(1.0599, 0.1231)	(1.0647, 0.1258)	(1.0697, 0.1296)	(1.0887, 0.1301)
(1.8, 0.04)	(1.5210, 0.0276)	(1.5678, 0.0297)	(1.5947, 0.0301)	(1.6012, 0.0345)	(1.6789, 0.0351)
(1.8, 0.08)	(1.6011, 0.0696)	(1.6147, 0.0698)	(1.6273, 0.0711)	(1.6512, 0.0713)	(1.6781, 0.0738)
(1.8, 0.16)	(1.6213, 0.1152)	(1.6344, 0.1168)	(1.6579, 0.1337)	(1.6578, 0.1357)	(1.7071, 0.1415)

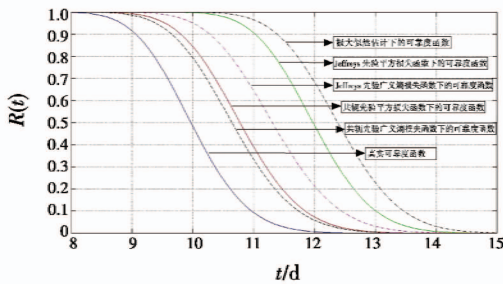


图 1 不同估计下的可靠度函数曲线

Fig. 1 Reliability function curves under different estimations

由表 1、表 2、图 1 可得如下结果。1) 广义熵损失函数的贝叶斯估计比较灵活, $q \rightarrow -1$ 时, 广义熵损失函数下的估计结果向平方损失函数下的估计结果靠近; $q > -1$ 时, 广义熵损失函数下的贝叶斯估计倾向高估; $q < -1$ 时, 广义熵损失函数下的贝叶斯估计倾向低估。2) 共轭先验下的贝叶斯估计精度最高, 无信息先验下的贝叶斯估计整体上与极大似然估计结果相差不大, 因此, 先验信息的充分利用能够有效提高估计的精度。

5 结论

事实上, 非对称损失函数能够有效刻画过高估计和过低估计之间的风险差异, 具有一定的灵活性。本文讨论了传统的极大似然估计、对称平方损失函数以及非对称的广义熵损失函数下的贝叶斯估计, 通过对比研究, 探讨非对称的广义熵损失函数下的贝叶斯估计特点, 验证了广义熵损失函数的灵活性和有效性。因此, 将广义熵损失函数引入性能退化过程进行可靠性估计, 在工程实际中具有一定的应用价值。在未来的研究中, 可进一步考虑广义熵损失函数下贝叶斯估计的相关性质, 通过理论分析, 探讨广义熵损失函数引入到工程分析的应用价值。

参考文献

[1] ZHANG Z X, SI X S, HU C H, et al. Degradation data analysis and remaining useful life estimation: a review on Wiener-process-based methods [J]. European Journal of

Operational Research, 2018, 271(3):775-796.
 [2] WANG W, HUSSIN B. Plant residual time modelling based on observed variables in oil samples [J]. Journal of the Operational Research Society, 2009, 60(6):789-796.
 [3] YE Z S, XIE M. Stochastic modelling and analysis of degradation for highly reliable products [J]. Applied Stochastic Models in Business and Industry, 2015, 31(1):16-32.
 [4] PENG W W, LI Y F, YANG Y J, et al. Bayesian degradation analysis with inverse Gaussian process models under time-varying degradation rates [J]. IEEE Transactions on Reliability, 2017, 66(1):84-96.
 [5] 司小胜, 胡昌华, 周东华. 带测量误差的非线性退化过程建模与剩余寿命估计 [J]. 自动化学报, 2013, 39(5):530-541.
 [6] SINGPURWALLA N D. Survival in dynamic environments [J]. Statistical Science, 1995, 10(1):86-103.
 [7] AALEN O O, BORGAN Ø, GJESSING H K. Survival and event history analysis: a process point of view [M]. New York: Springer, 2008.
 [8] SI X S, WANG W B, HU C H, et al. A Wiener-process-based degradation model with a recursive filter algorithm for remaining useful life estimation [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2013, 35(1/2):219-237.
 [9] 鄢伟安, 宋保维, 段桂林, 等. 基于两阶段维纳退化过程的液力耦合器可靠性评估 [J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(9):1882-1886.
 [10] 彭宝华, 周经伦, 潘正强. Wiener 过程性能退化产品可靠性评估的 Bayes 方法 [J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(3):543-549.
 [11] GUAN Q, TANG Y C, XU A C. Objective Bayesian analysis accelerated degradation test based on Wiener process models [J]. Applied Mathematical Modelling, 2016, 40(4):2743-2755.
 [12] YOUSEFZADEH F. E-Bayesian and hierarchical Bayesian estimations for the system reliability parameter based on asymmetric loss function [J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2017, 46(1):1-8.
 [13] 彭宝华. 基于 Wiener 过程的可靠性建模方法研究 [D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2010.