

引用格式:徐志浩,周召发,徐梓皓,等.高精度捷联惯导姿态算法的性能分析[J].电光与控制,2019,26(7):25-28. XU Z H, ZHOU Z F, XU Z H, et al. Performance analysis of high-precision strapdown inertial navigation attitude algorithms[J]. Electronics Optics & Control, 2019, 26(7):25-28.

高精度捷联惯导姿态算法的性能分析

徐志浩¹, 周召发¹, 徐梓皓¹, 常振军¹, 郭琦²

(1. 火箭军工程大学, 西安 710025; 2. 中国人民解放军96902部队, 北京 100015)

摘要:针对不可交换性误差一般采用多子样旋转矢量法对其进行补偿,但传统多子样旋转矢量法在大半锥角或者其他更为复杂的角运动条件下,性能会有所退化,新出现的多子样四元数算法和方向余弦算法没有显式地考虑不可交换性误差,直接求解姿态微分方程。为了综合比较这些算法的性能,在圆锥运动和大角度机动条件下对其进行仿真分析,采用理想和理想非理想采样两种数据条件,同时变换不同的采样频率,并比较了算法的计算负担。结果表明,在理想条件下,新算法的周期性误差小于旋转矢量法,且子样数的增加使新算法精度明显提高;对比理想与非理想采样两种情况,算法精度相差4~5个数量级。3种算法各有优缺点,需要对惯性器件数据进行充分补偿才能完全发挥算法的精度潜力。

关键词:捷联惯导; 姿态更新算法; 圆锥运动; 大角度机动; 量化误差

中图分类号: TJ765.1 **文献标志码:** A **doi:**10.3969/j.issn.1671-637X.2019.07.005

Performance Analysis of High-Precision Strapdown Inertial Navigation Attitude Algorithms

XU Zhi-hao¹, ZHOU Zhao-fa¹, XU Zi-hao¹, CHANG Zhen-jun¹, GUO Qi²

(1. Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025, China; 2. No. 96902 Unit of PLA, Beijing 100015, China)

Abstract: The non-commutativity error is generally compensated by the multi-subsample rotation vector method, but the performance of the traditional multi-subsample rotation vector method is degraded under the condition of large half cone angle or other more complicated angular motion. The new multi-subsample quaternion algorithm and the direction cosine algorithm do not directly consider the non-commutativity error, and the two algorithms directly solve the attitude differential equation. In order to comprehensively compare the performance of these algorithms, a simulation analysis is carried out under conical motion and large angle maneuvering conditions. Two data conditions, ideal and non-ideal sampling, are used to transform different sampling frequencies, and comparison is made to the computational burden of the algorithms. The results show that under ideal conditions, the periodic error of the new algorithm is smaller than that of the rotation vector method, and the accuracy of the new algorithm is improved significantly with the increase of the number of subsamples. By comparing ideal sampling with non-ideal sampling, it can be seen that the accuracy of the algorithm differs by 4~5 orders of magnitude. Each of the three algorithms has its own advantages and disadvantages. Only by fully compensating the inertial device data can the accuracy potential of the algorithm be fully realized.

Key words: strapdown inertial navigation; attitude updating algorithm; conical motion; large angle dsneuver; quantization error

0 引言

姿态算法是捷联惯导系统的关键技术之一,提高

姿态矩阵的计算精度是捷联惯性导航系统研究的重要内容^[1-3]。等效旋转矢量法有时采用高子样算法的精度反而不如低子样的精度^[4-5],即使保留 Bortz 方程的高阶近似或采用文献[6]基于前周期优化的算法,也依然存在原理性误差,且使推导过程变得非常复杂^[7]。新的算法不断出现,有必要针对其性能进行分析。由于惯性器件的量化误差对姿态角参量影响很小,故长

收稿日期:2019-03-04

修回日期:2019-03-25

基金项目:国家自然科学基金(41174162)

作者简介:徐志浩(1994—),男,山东威海人,硕士生,研究方向为组合导航、多元信息融合。

期以来很少有学者研究量化误差对姿态算法精度的影响^[8]。但随着惯性技术的发展,惯性器件的一些主要误差源已得到了有效的抑制,所以有必要针对量化误差对姿态算法精度的影响进行研究。因此,在圆锥运动和大角度机动条件下,分理想采样和非理想采样2种情况对3种姿态算法的性能进行了仿真分析,其中包括一种新的四元数法和一种新的方向余弦法。

1 旋转矢量算法

等效旋转矢量法在利用角增量计算等效旋转矢量时,对不可交换性误差做了适当补偿。

三子样旋转矢量法的微分方程为

$$\dot{\Phi} = \omega_{nb}^b + \frac{1}{2}\Phi \times \omega_{nb}^b + \frac{1}{12}\Phi \times (\Phi \times \omega_{nb}^b) \quad (1)$$

载体的角速率用抛物线拟合,即

$$\omega_{nb}^b(t_k + \tau) = a + 2b\tau + 3c\tau^2 \quad (2)$$

对等效旋转矢量 Φ 做泰勒展开,即

$$\begin{aligned} \Phi(h) &= \Phi(0) + h\dot{\Phi}(0) + \frac{h^2}{2!}\ddot{\Phi}(0) + \\ &\frac{h^3}{3!}\ddot{\Phi}(0) + \frac{h^4}{4!}\Phi^{(4)}(0) + \dots \quad (3) \end{aligned}$$

采用文献[1]中求解旋转矢量的推导过程,得到等效旋转矢量的求解结果为

$$\begin{aligned} \Phi(h) &= \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 + \frac{33}{80}\Delta\theta_1 \times \Delta\theta_3 + \\ &\frac{57}{80}\Delta\theta_2 \times (\Delta\theta_3 - \Delta\theta_1) \quad (4) \end{aligned}$$

式中: $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3$ 分别是 $[t_k, t_k + \frac{h}{3}]$, $[t_k + \frac{h}{3}, t_k + \frac{2h}{3}]$, $[t_k + \frac{2h}{3}, t_{k+1}]$ 3个时间段内的角增量。

2 多子样四元数算法

传统的四元数算法在精度上不如三子样旋转矢量法^[9],其主要采用毕卡法来解算四元数微分方程,而毕卡法的实质是单子样旋转矢量法。以三子样为例,下文给出三子样四元数法的推导过程。

四元数微分方程为

$$\dot{Q} = \frac{1}{2}M'(\omega_{nb}^b)Q \quad (5)$$

记

$$M(x) = \frac{1}{2}M'(\omega_{nb}^b) \quad (6)$$

设 Q 和 $M(x)$ n 阶可导,得到四元数微分方程的第 n 阶导数算式为

$$\begin{aligned} Q^{(n)} &= C_{n-1}^0 M(x) Q^{(n-1)} + C_{n-1}^1 \dot{M}(x) Q^{(n-2)} + \dots + \\ &C_{n-1}^i M^{(i)}(x) Q^{(n-1-i)} + \dots + \end{aligned}$$

$$C_{n-1}^{n-1} M^{(n-1)}(x) Q \quad n \geq 3 \quad (7)$$

对 $Q(t_{k+1})$ 做泰勒展开,即

$$\begin{aligned} Q(t_{k+1}) &= Q(t_k) + h\dot{Q}(t_k) + \frac{h^2}{2!}\ddot{Q}(t_k) + \\ &\frac{h^3}{3!}\ddot{Q}(t_k) + \frac{h^4}{4!}Q^{(4)}(t_k) + \dots \quad (8) \end{aligned}$$

运载体的角速度用抛物线来表示,即

$$\omega_{nb}^b(t_k + \tau) = a + 2b\tau + 3c\tau^2 \quad (9)$$

对式(7)化简后,可写出三子样四元数微分方程各阶导数的通式,从而对式(8)进行求解。文献[10]给出详细推导过程,在仿真过程中泰勒展开式保留到十阶。

3 多子样方向余弦法

传统方向余弦法中,采用四阶龙格库塔算法解算姿态矩阵微分方程,计算量大,实时计算困难,工程上并不实用。以三子样为例,下文给出三子样方向余弦法的推导过程。

姿态矩阵微分方程为

$$\dot{C}_b^n = C_b^n \omega_{nb}^{bk} \quad (10)$$

姿态矩阵微分方程的第 n 阶导数的算式为

$$\begin{aligned} C_b^{(n)} &= C_{n-1}^0 \Omega C_b^{(n-1)} + C_{n-1}^1 \dot{\Omega} C_b^{(n-2)} + \dots + \\ &C_{n-1}^i \Omega^{(i)} C_b^{(n-1-i)} + \dots + C_{n-1}^{n-1} \Omega^{(n-1)} C_b^n \quad n \geq 3 \quad (11) \end{aligned}$$

对 $C_b^n(t_{k+1})$ 做泰勒展开,即

$$\begin{aligned} C_b^n(t_{k+1}) &= C_b^n(t_k) + h\dot{C}_b^n(t_k) + \frac{h^2}{2!}\ddot{C}_b^n(t_k) + \\ &\frac{h^3}{3!}\ddot{C}_b^n(t_k) + \frac{h^4}{4!}C_b^{(4)}(t_k) + \dots \quad (12) \end{aligned}$$

角速度用抛物线拟合,将式(12)简化得到三子样方向余弦微分方程各阶导数的通式,即

$$\begin{aligned} C_b^{(n)} &= C_{n-1}^0 [a \times] C_b^{(n-1)} + C_{n-1}^1 [b \times] C_b^{(n-2)} + \\ &C_{n-1}^2 [c \times] C_b^{(n-3)} \quad (13) \end{aligned}$$

通过式(13)可以很方便地写出姿态矩阵微分方程的各阶导数,文献[11]给出了详细的推导过程, $C_b^n(t_{k+1})$ 泰勒展开的阶数应根据实际的精度需求和计算能力,保留适当阶数,这里保留十阶。

4 仿真结果

4.1 典型圆锥运动下的仿真结果

为了比较3种算法在解算载体姿态角上的精度差异,设计如下仿真实验。

设载体运动轨迹为典型的圆锥运动,半锥角为 $\alpha = 5^\circ$,角速度为 $\omega = 4\pi$ rad/s,量化因子取 $1''$,采样频率变化范围为 $100 \sim 10000$ Hz,仿真时间为 60 s。角速度方程为

$$\omega(t) = \begin{pmatrix} \omega \sin \alpha \cos \omega t \\ -\omega \sin \alpha \sin \omega t \\ 2\omega \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

4.1.1 理想采样条件下的仿真结果

图1是3种算法在理想采样条件下的俯仰角误差、横滚角误差、偏航角误差的对比仿真结果。可以发现:在圆锥运动、理想采样的条件下,2种新算法的俯仰角误差和横滚角误差比三子样旋转矢量法的精度高2个数量级,而偏航角误差则要比三子样旋转矢量法精度低2个数量级,且3种算法的解算精度均随着采样频率的提高而提高。

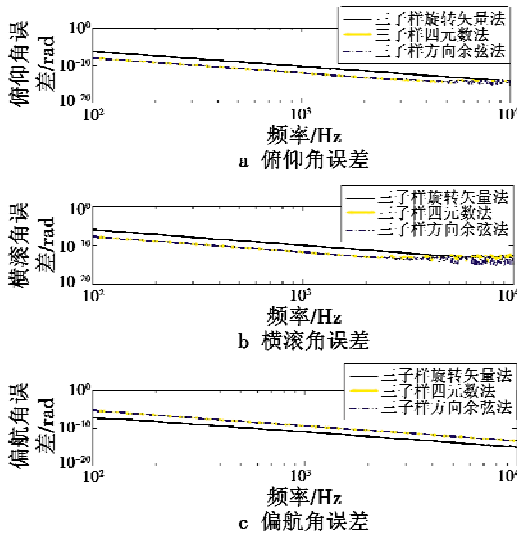


图1 3种算法在理想采样情况下的姿态角误差 Fig.1 The attitude angle error of the three algorithms under ideal sampling conditions

4.1.2 非理想采样条件下的仿真结果

图2是3种算法在非理想采样条件下的姿态角误差的对比仿真结果。

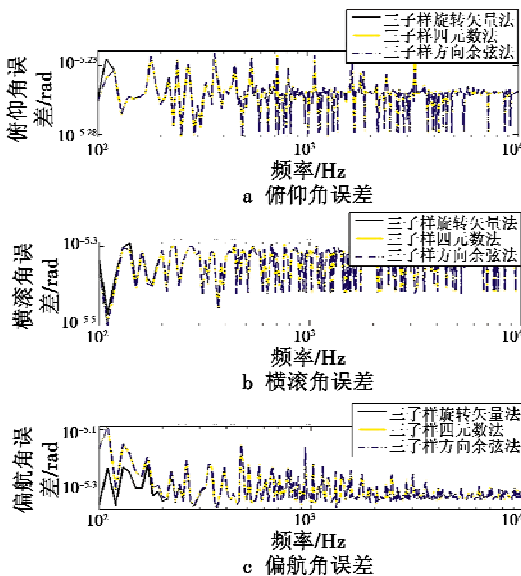


图2 3种算法在非理想采样情况下的姿态角误差 Fig.2 The attitude angle error of the three algorithms in the case of non-ideal sampling

可以发现:在圆锥运动、非理想采样情况下,3种算法的俯仰角和横滚角解算精度差别不大,在采样频率处于100~210 Hz时,旋转矢量法的偏航角精度较高。对比理想和理想非理想采样情况下的误差图可以发现,3种算法在无量化误差时的精度比有量化误差时均提高4~5个数量级,说明量化误差的存在对姿态算法的解算精度具有重要影响,且3种算法的解算精度不能随采样频率的提高而提高。

4.1.3 三子样至六子样的仿真结果

在理想采样条件下对3种算法在采用三子样至六子样的情况下对比解算精度,采样频率范围为100~10000 Hz,仿真时间为60 s。图3是3种算法的姿态误差图。

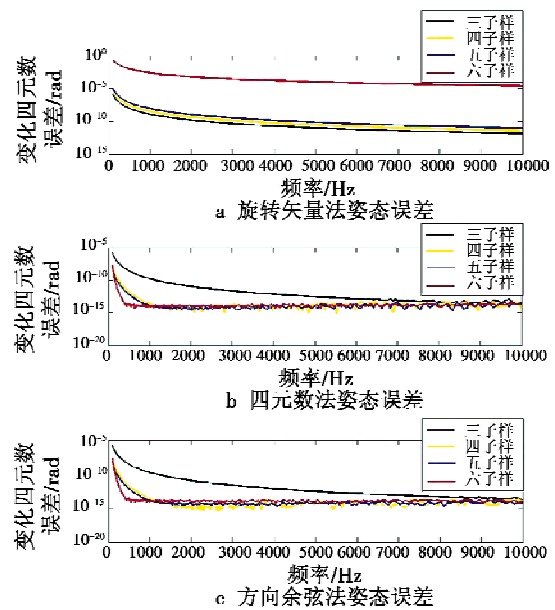


图3 3种算法三至六子样姿态误差

Fig.3 Three to six subsample attitude error of three algorithms

可以发现,旋转矢量法从三子样到六子样,其计算精度逐渐降低,表明其具有明显的退化特性;而在采样频率低于1000 Hz、采用较高子样数时,2种新算法的精度明显提高,并优于旋转矢量法。

4.2 大角度机动输入下的仿真结果

将Savage提出的大角度机动情况下角增量作为陀螺仪输出[12]。3种算法采用10^3 Hz的采样频率,标准姿态角则由单子样四元数法采用10^6 Hz的采样频率得到,仿真时间1.2 s,仿真结果如图4所示。结果表明在大角度机动输入、理想采样的情况下采用三子样算法,2种新算法的精度比旋转矢量法高大约2个数量级,而在非理想采样情况下3种算法精度一致。对比加入量化误差前后姿态角误差大小可以发现,3种算法在理想采样条件下姿态角的解算精度比在非理

理想采样条件下的解算精度高4~6个数量级,也表明量化误差对算法解算精度具有重大影响。

大角度机动条件下角增量表达式为

$$\begin{cases} \alpha_x = -1.1\tau + 0.45\tau^2 - 0.6\tau^3 + 1.1\tau^4 - 0.1\tau^5 + \\ \quad 0.2\sin 2.6\pi\tau + 0.3(1 - \cos 2.6\pi\tau) \\ \alpha_y = -0.5\tau + 1.0\tau^2 - 0.3\tau^3 + 0.7\tau^4 - 0.2\tau^5 - \\ \quad 0.5\sin 2.6\pi\tau + 0.6(1 - \cos 2.6\pi\tau) \\ \alpha_z = 0.3\tau - 1.2\tau^2 + 2.0\tau^3 - 0.9\tau^4 + 0.4\tau^5 + \\ \quad 0.8\sin 2.6\pi\tau - 0.9(1 - \cos 2.6\pi\tau) \end{cases} \quad (15)$$

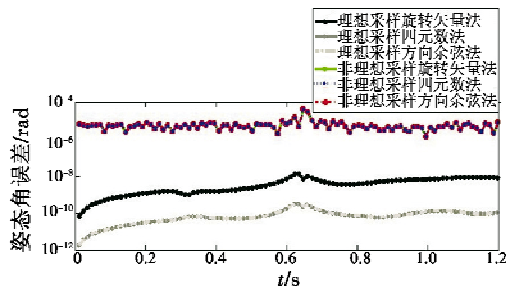


图 4 3 种算法在理想与非理想采样条件下的姿态角误差

Fig. 4 Error of attitude angle of three algorithms under ideal and non-ideal sampling

4.3 运算量的比较

以三子样算法为例,对姿态运算周期内得到姿态阵过程的运算量(次数)进行比较,结果如表 1 所示。

表 1 3 种算法得到姿态阵的运算量

Table 1 Comparison of calculation amount of attitude updating algorithm

运算	三子样旋转矢量法	三子样四元数法	三子样方向余弦法
三角函数	2	0	0
平方根	1	0	0
乘法	70	2043	920
除法	4	0	0
加法	32	507	270
减法	18	18	9

采用相同子样数时,运算量最小的是三子样旋转矢量法,其次是多子样方向余弦法。在有量化误差的情况下,3 种算法精度相似,旋转矢量法运算量更小,更具优势;在没有量化误差、采用三子样以上算法时,多子样方向余弦法和多子样四元数法相比于旋转矢量法具有更高的精度优势,从运算量来看,多子样方向余弦法又要优于多子样四元数法。

5 结束语

从工程应用的角度出发,在圆锥运动和大角度机条件下,对多子样四元数算法、方向余弦算法以及旋转

矢量法,分理想采样和非理想采样两种情况进行仿真分析,对比了它们的运算量,得到 3 种算法的性能差异,为惯性导航姿态算法的研究提供了参考,说明了惯性器件量化误差对算法解算精度具有重大影响,要想完全发挥算法的精度潜力,需要对惯性器件的数据进行充分补偿。

参考文献

- [1] 秦永元. 惯性导航[M]. 北京:科学出版社,2006.
- [2] WANG M S, WU W Q, WANG J L, et al. High-order attitude compensation in coning and rotation coexisting environment [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2015, 51(2):1178-1190.
- [3] SONG M, WU W Q, PAN X F. Approach to recovering maneuver accuracy in classical coning algorithms[J]. Journal of Guidance, Control & Dynamics, 2013, 36(6):1872-1880.
- [4] 严恭敏,严卫生,徐德民. 经典圆锥误差补偿算法中剩余误差估计的局限性研究[J]. 中国惯性技术学报, 2008,16(4):379-385.
- [5] 严恭敏,翁浚,杨小康,等. 基于毕卡迭代的捷联姿态更新精确数值解法[J]. 宇航学报,2017,38(12):1308-1313.
- [6] 李荣柞,周召发,徐梓皓. 基于前周期优化子样数的姿态算法[J]. 压电与声光,2016,38(2):333-336.
- [7] 严恭敏,杨小康,翁俊,等. 一种无误差的捷联惯导数值更新新算法[J]. 宇航定位学报,2018,6(2):20-22.
- [8] 顾冬晴,秦永元. 捷联惯导量化误差建模研究[J]. 中国惯性技术学报,2004,12(6):13-17.
- [9] 王小峰,董正芳. 捷联惯导系统航姿算法的比较及仿真分析[J]. 现代导航,2016,7(2):103-106.
- [10] 周召发,胡文,张志利,等. 一种新的捷联惯性导航系统姿态四元数方程求解方法[J]. 兵工学报,2018,39(3):511-518.
- [11] XU Z H, XIE J, ZHOU Z F, et al. Accurate direct strapdown direction cosine algorithm[J/OL]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2018. [2019-03-04]. http://www.onacademic.com/detail//journal_1000041625345199.html. doi: 10.1109/TAES.2018.2881353.
- [12] SAVAGE P G. A unified mathematical framework for strapdown algorithm design [J]. Journal of Guidance, Control & Dynamics, 2006, 29(2):237-249.