

引用格式:张宇,严天峰.基于广义二次相关的稀疏傅里叶变换时延估计算法[J].电光与控制,2019,26(3):54-58. ZHANG Y, YAN T F. SFT time delay estimation algorithm based on generalized second cross correlation[J]. Electronics Optics & Control, 2019, 26(3):54-58.

## 基于广义二次相关的稀疏傅里叶变换时延估计算法

张宇<sup>1,2</sup>, 严天峰<sup>1,2,3</sup>

(1. 兰州交通大学电子与信息工程学院,兰州 730070; 2. 甘肃省无线电监测及定位行业技术中心,兰州 730070;  
3. 甘肃省高精度北斗定位技术工程实验室,兰州 730070)

**摘要:**针对无源时差定位中的稀疏傅里叶变换时延估计算法在低信噪比条件下的抗噪性差和估值精度低等问题,提出了广义二次相关稀疏傅里叶时延估计算法。算法在对信号进行稀疏傅里叶变换的基础上,融合利用最小二乘拟合改进的广义二次相关算法,在对信号进行快速处理的同时抑制了噪声的干扰,使得时延估计算法的性能得到提高。仿真实验以及对实测数据的验证均表明改进算法具有较好的抗噪性以及时延估值精度。

**关键词:**稀疏傅里叶变换; 广义二次相关; 最小二乘拟合; 时延估计; 估值精度

**中图分类号:** TN98 **文献标志码:** A **doi:**10.3969/j.issn.1671-637X.2019.03.012

## SFT Time Delay Estimation Algorithm Based on Generalized Second Cross Correlation

ZHANG Yu<sup>1,3</sup>, YAN Tian-feng<sup>1,2,3</sup>

(1. School of Electronic and Information Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;

2. Radio Monitoring and Technology Center of Positioning Industry of Gansu Province, Lanzhou 730070, China;

3. High-Precision Positioning Technology Compass Engineering Laboratory of Gansu Province, Lanzhou 730070, China)

**Abstract:** In order to improve the anti-interference performance and precision of Sparse Fourier Transform (SFT) time delay estimation algorithm under low SNR conditions, a new SFT time delay estimation algorithm is proposed based on Generalized Second Cross Correlation (GSCC). The new algorithm performs the SFT operation on the signal, and then adds the GSCC algorithm improved by least squares fitting. The algorithm rapidly processes the signal while suppressing the interfering noise at the same time. In this way, the performance of the time delay estimation algorithm is improved. Simulation tests and field data verification both indicate that the improved algorithm has satisfying anti-interference performance and estimation precision.

**Key words:** Sparse Fourier Transform (SFT); Generalized Second Cross Correlation (GSCC); least squares fitting; time delay estimation; estimation accuracy

### 0 引言

无源时差定位技术由于其定位稳定性高、实用性强等优点成为近年来热门的研究领域<sup>[1]</sup>,在实际信号源定位(如电子对抗)中具有很明显的抗干扰特性<sup>[2]</sup>。到达时间差(Time Difference of Arrival, TDOA)定位技术是通过检测同一个信号抵达多个监测站的时间差,

换算成恒定的距离差构造双曲线,采用双曲线法定位<sup>[3-5]</sup>,其中互相关算法因可实现性强、稳定性高的特点被广泛使用。文献[6]提出的广义二次互相关时延估计(Generalized Second Cross Correlation, GSCC)算法融合广义互相关算法和二次相关时延估计算法,提高了时延估算精度与抗噪声性能,但在更低的信噪比条件下仍会出现较大的误差。低信噪比条件下相关峰附近出现的非线性波动,采用最小二乘拟合能够提升数据曲线的平滑稳定性。基于稀疏傅里叶变换(Sparse Fourier Transform, SFT)的TDOA时延估计算法利用降采样的方式简化了传统互相关法,计算效率较传统快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, FFT)算法提升10100倍<sup>[7]</sup>,但是

收稿日期:2018-04-09 修回日期:2018-11-29

基金项目:中国铁路总公司科技研究开发计划(2013G010-D);甘肃省自然科学基金(1508RJZA071)

作者简介:张宇(1994—),男,广东揭阳人,硕士生,研究方向为无线电测向技术、无源时差定位技术。

该算法采用的是基本互相关算法,抗噪性能较差。

本文利用最小二乘拟合改进了广义二次相关算法,提出了一种基于改进广义二次相关的稀疏傅里叶变换时延估计算法,该算法具备低时间复杂度与较高的抗噪性,在实测应用中具有较高的时延估值准确度。

## 1 广义二次相关时延估计算法

### 1.1 时差定位信号模型

时差定位信号模型为

$$\begin{cases} x_1(n) = s(n) + n_1(n) \\ x_2(n) = As(n-D) + n_2(n) \end{cases} \quad (1)$$

式中: $s(n)$ 为干扰源信号; $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 为到达接收机端的信号; $A$ 为衰减因子; $D$ 为时间延迟; $n_1(n)$ 和 $n_2(n)$ 为零均值加性高斯噪声,并假定与辐射源信号不相关。

### 1.2 广义互相关时延估计算法

在信噪比低的条件下,为了尽可能抑制噪声,可在传统互相关方法中加入广义加权函数 $\varphi_{12}(\omega)$ 对信号的频域进行平滑滤波,即

$$R_{x_1x_2}(\tau) = \int_0^\pi \varphi_{12}(\omega) G_{x_1x_2}(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega \quad (2)$$

式中: $G_{x_1x_2}(\omega) = E\{X_1(\omega) * X_2(\omega)\}$ 为信号 $x_1(n)$ 和信号 $x_2(n)$ 的互功率谱; $\varphi_{12}(\omega)$ 为广义加权函数,即

$$\varphi_{12}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{G_{x_1x_1}(\omega) \cdot G_{x_2x_2}(\omega)}} \quad (3)$$

式中: $G_{x_1x_1}(\omega)$ 为 $x_1(n)$ 的自功率谱; $G_{x_2x_2}(\omega)$ 为 $x_2(n)$ 的自功率谱。由文献[8]可知,广义加权函数种类较多,此处选取的是SCOT平滑相干变换窗,预白化处理信号噪声,锐化互相关函数谱峰,进而提升信噪比。

### 1.3 二次相关时延估计算法

二次相关算法是在一次相关的基础上再加入一次自相关和互相关,提升信噪比<sup>[9]</sup>。根据式(1)得互相关函数为

$$R_{12}(\tau) = E[x_1(n)x_2(n-\tau)] = AR_{ss}(\tau-D) + R_{sn_2}(\tau) + AR_{sn_1}(\tau-D) + R_{n_1n_2}(\tau) \quad (4)$$

自相关函数为

$$R_{11}(\tau) = E[x_1(n)x_1(n-\tau)] = R_{ss}(\tau) + R_{n_1s}(\tau) + R_{sn_1}(\tau) + R_{n_1n_1}(\tau) \quad (5)$$

此时, $R_{11}(\tau)$ 和 $R_{12}(\tau)$ 依然是关于时间的函数,对二者再做相关可得

$$R_{RR}(\tau) = E[R_{11}(n)R_{12}(n-\tau)] \quad (6)$$

代入式(4)、式(5),忽略噪声和信号的互相关函数,简化为

$$R_{RR}(\tau) = R_{RN}(\tau) + AR_{RS}(\tau-D) \quad (7)$$

式中: $R_{RN}(\tau)$ 表示噪声之间做二次相关; $R_{RS}(\tau)$ 表示信号之间的二次相关。由噪声互不相关的假设可得,

$R_{RN}(\tau) = 0$ ,由相关函数的性质可知, $R_{RR}(\tau)$ 在 $\tau - D = 0$ 时取得最大值,最大值对应的横坐标即时延的估计值<sup>[10]</sup>。

### 1.4 最小二乘拟合原理及引入

最小二乘拟合方法利用若干个数据点来拟合函数曲线,从而使得拟合得到的曲线与原始点之间的偏差最小。根据给定的数据点,得到近似曲线 $y = \varphi(x)$ ,并使其与原函数分布 $y = f(x)$ 的偏差最小。近似曲线在点 $x_i$ 处的偏差 $\delta_i = \varphi(x_i) - y_i, i = 1, 2, \dots, m$ 。偏差平方和曲线拟合算式为

$$\min_{\varphi} \sum_{i=1}^m \delta_i^2 = \sum_{i=1}^m (\varphi(x_i) - y_i)^2 \quad (8)$$

按照上述原则并利用二项式方程求出拟合曲线的方法称最小二乘法,这也是Matlab多项式拟合的最优标准。数学上已证明,最小二乘逼近问题的解总是可确定的<sup>[11]</sup>。

通过最小二次原理拟合得到的曲线能对偏离趋势的离散点进行预测,并且对趋势内的点进行精确计算。最小二乘拟合次数一般为3,否则互相关峰会呈现伪峰值和伪拐点。

### 1.5 广义二次相关时延估计算法

GSCC算法流程如图1所示。

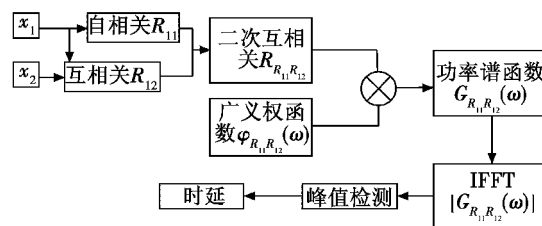


图1 GSCC算法流程

Fig. 1 Flow chart of GSCC algorithm

改进GSCC算法流程如图2所示。

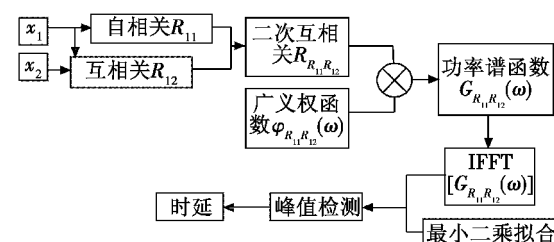


图2 改进GSCC算法流程

Fig. 2 Flow chart of the improved GSCC algorithm

改进GSCC算法的计算流程为:

- 1) 对信号 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 做互相关,得互相关函数 $R_{12}(\tau)$ ,对 $x_1(n)$ 做自相关,得自相关函数 $R_{11}(\tau)$ ;
- 2) 对 $R_{11}(\tau)$ 和 $R_{12}(\tau)$ 做互相关,得到二次互相关函数 $R_{R_{11}R_{12}}(\tau)$ ;
- 3) 加权处理二次互相关,函数 $R_{R_{11}R_{12}}(\tau)$ 后得到功率谱函数 $G_{R_{11}R_{12}}(\omega)$ ;
- 4) 对 $G_{R_{11}R_{12}}(\omega)$ 逆傅里叶变换,得广义二次互相

关时域函数;

5) 对时域函数峰值附近的曲线做最小二乘拟合处理,通过峰值检测得到时延估计值。

## 2 基于 SFT 的时延估计算法

### 2.1 SFT 理论

对于时频具有稀疏特性的信号,稀疏傅里叶变换(SFT)通过分析其特有的稀疏性实现时频的简化<sup>[12]</sup>。理论框架如图3所示。

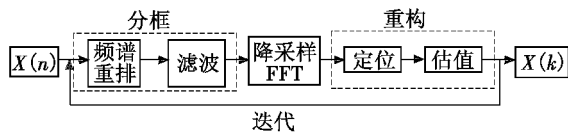


图3 稀疏傅里叶变换理论框架

Fig. 3 Theoretical framework of sparse Fourier transform

经过频谱重排、滤波和降采样后确定频率大值点,移除已知的频率大值点后循环迭代之前的步骤。稀疏傅里叶变换实现的基础在于信号的稀疏特性,该特性同样可以体现在特定变换基作用下的变换域<sup>[13]</sup>。因此,大值点的稀疏性保证了信号变换域的稀疏性,此外,在迭代过程中可以对加入到数值集合的大值数进行纠正。

### 2.2 基于 SFT 的基本互相关算法

基于 SFT 的基本互相关的算法流程如图4所示。

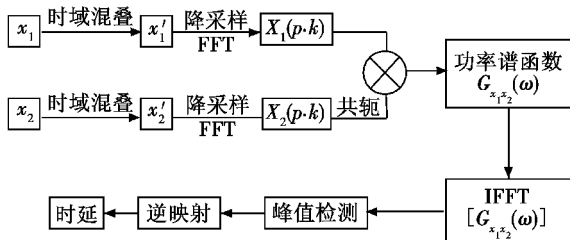


图4 基于 SFT 的时延估计算法流程

Fig. 4 Flow chart of the time delay estimation algorithm based on SFT

接收信号为  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$ , 进行时域混合叠加, 也就是信号时域对  $N/p$  取模同余之后相加, 其中,  $p$  是降采样因子,  $N$  是采样点数, 得到

$$\begin{cases} x_1'(n) = \sum_{m=0}^{p-1} x_1(n + m \cdot (N/p)) \\ x_2'(n) = \sum_{m=0}^{p-1} x_2(n + m \cdot (N/p)) \end{cases} \quad (9)$$

通过广义互相关法计算出两路混叠信号的互功率谱函数  $G_{x_1x_2}(\omega)$ , 为了还原信号需要重新构造逆映射关系, 对谱峰处取得的  $p$  个值逐一代入原函数方程式, 所得谱峰值对应的横坐标即为时延值。

## 3 基于改进 GSCC 的 SFT 时延估计算法

基于改进 GSCC 的 SFT 时延估计算法流程如图5

所示, 步骤如下:

1) 对接收信号  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  进行时域混叠得到信号  $x_1'(n)$  和  $x_2'(n)$ ;

2) 对  $x_1'(n)$  和  $x_2'(n)$  进行二次相关处理, 功率谱函数  $G_{R_{11}, R_{12}}(\omega)$  就是对求得的互功率谱函数进行广义加权所得;

3) 对  $G_{R_{11}, R_{12}}(\omega)$  做逆傅里叶变换可得广义二次互相关时域函数, 并对谱峰附近的曲线进行最小二乘拟合;

4) 通过逆映射求得功率谱最小二乘拟合后的时域函数谱峰对应  $p$  个值, 将这  $p$  个值回代入原相关函数, 所求得的最大值所对应的横坐标即为时延估计值。

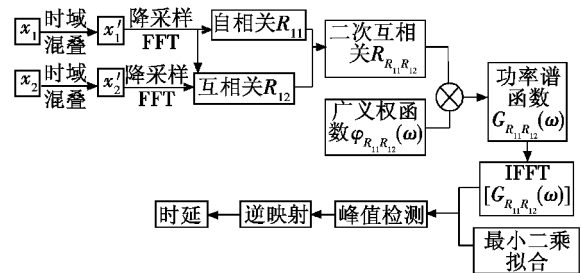


图5 改进的 SFT 时延估计算法流程

Fig. 5 Flow chart of the improved time delay estimation algorithm based on SFT

## 4 实验仿真与分析

### 4.1 仿真条件

实验信号采用的是信号  $S_1$  和  $S_2$ , 假设时差点数  $d$  为 5, 采样频率  $f_s$  为 500 Hz, 采样点数  $N$  为 2048, 两个信号分别为

$$\begin{cases} S_1(n) = 0.5e^{20mi \cdot n/f_s} + e^{60mi \cdot n/f_s} \\ S_2(n) = 0.5e^{20mi \cdot (n+d)/f_s} + e^{60mi \cdot (n+d)/f_s} \end{cases} \quad (10)$$

并对两个信号加入高斯白噪声。

定义时延估计标准差为

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\tau} - \tau)^2} \quad (11)$$

### 4.2 改进 GSCC 算法仿真及分析

#### 4.2.1 改进 GSCC 算法仿真

对广义二次相关算法互相关函数谱峰值及其左右 3 个点进行 3 次曲线拟合, 为了让拟合效果更为直观, 将拟合后的曲线横坐标采取 100 倍插值处理, 得到的横坐标点数为 601。实验以谱峰为中值的 7 个点的基本互相关算法互相关函数、广义二次相关算法拟合前互相关函数以及拟合后的互相关函数做图, 以 SNR 为 -5 dB 为例, 实验结果如图 6 所示。

对信号加入信噪比范围为 -15 ~ 10 dB 的高斯白噪声, 其中, 噪声间隔为 1 dB, 实验次数为 100。图 7 展现

了在该设定条件下3种算法的标准差波动趋势。

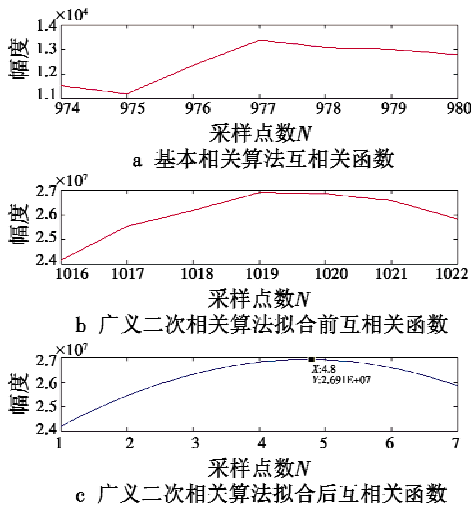


图6 SNR为-5 dB时的实验结果

Fig. 6 Experimental results when SNR is -5 dB

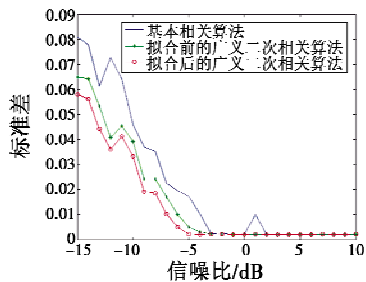


图7 3种算法性能分析比较(SNR为-15~10 dB)

Fig. 7 Performance analysis of the three algorithms when SNR is -15 dB to 10 dB

### 4.2.2 仿真结果分析

由于广义二次相关算法最小二乘拟合之后的曲线进行了100倍插值细化,中值点为400,设图中插值细化后的谱峰对应的横坐标为 $N_1$ ,拟合之前广义二次相关算法互相关函数的谱峰所对应的横坐标为 $N_2$ ,故拟合后曲线的谱峰对应的横坐标 $N_3 = N_2 + (100N_1 - 400)/100$ 。

互相关函数谱峰对应的时延点数 $d = N/2 + 1 - N_0$ , $N_0$ 为当前谱峰对应的横坐标。实验设定的时延为 $5T_s$ 。

如图6所示,当SNR为-5 dB时,由于信噪比低,基本相关算法互相关函数谱峰严重偏离,无法准确计算出时延;广义二次相关拟合前互相关函数所对应的时延为 $6T_s$ ,拟合后的互相关函数所对应的时延为 $5.2T_s$ ,精度提升了16%。

图7表明,高信噪比时3种算法都能很好地估算出时延,但随着信噪比降低,3种算法的时延估计程度偏离程度逐渐增大,与广义二次相关算法相比,基本互相关算法在低信噪比条件下估值性能较差。同等条件

下,利用最小二乘拟合改进的广义二次相关算法时延估算性能整体优于其他2种算法。

### 4.3 基于改进GSCC的SFT时延估计算法的仿真及分析

对信号加入信噪比范围为-10~5 dB的高斯白噪声,其中噪声间隔为1 dB,实验次数为100,图8展现了在该设定条件下3种算法的标准差波动趋势。

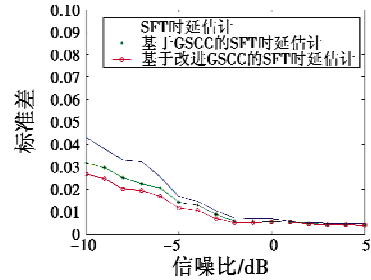


图8 3种算法的性能分析比较(SNR为-10~5 dB)

Fig. 8 Performance analysis of the three algorithms when SNR is -10 dB to 5 dB

从图8可以看出,3种算法的时延估计性能随着信噪比的下降都有所降低,以SNR等于0 dB为界,随着信噪比下降,稀疏傅里叶变换时延估计的估值准确度也随之下降。基于改进GSCC的SFT时延估计总体上具有较好的估值精度和抗噪性能。

### 5 基于改进GSCC的SFT时延估计算法的实际应用

为了验证改进算法的实测效果,本文选取了文献[14]在某地监测取得的实际数据。辐射源、监测站1、监测站2、监测站3以及站点间的距离如图9所示。



图9 辐射源及接收站分布图

Fig. 9 Distribution map of radiation sources and receiving stations

辐射源到达监测站1和监测站3的距离差是718 m,可得时间差为 $2.3933 \mu s$ 。系统采样率为2.5 MHz,每点的时延为 $0.4 \mu s$ ,每包数据有2048点I/Q数据,选取的是170包测试数据,共包含348 160(即 $170 \times$

2048)点 I/Q 数据。降采样因子  $p=8$  时,改进算法的互相关函数以及时延估计结果如图 10 所示。

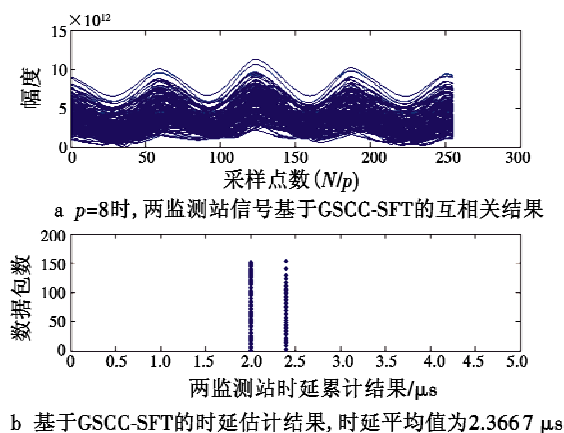


图 10 基于改进 GSCC 的 SFT 的互相关结果和时延估计结果

Fig. 10 Cross-correlation results and time-delay estimation results of SFT based on improved GSCC

改进时延算法提高的计算速度具体表现在 FFT 运算上较传统互相关法的 348 160 点降至 43 520 点。由表 1 可以看出,在时延精度上与真实时间差相比,误差精度比 SFT 以及 GSCC-SFT 时延估计算法小,仅下降了 1.26%。结果表明在实际应用中,本文算法具有明显的性能优势。

表 1 3 种算法的平均估算时延和误差精度

Table 1 Estimation average time delay and error accuracy of the three algorithms

算法	平均估算时延/ $\mu\text{s}$	精度误差/%
SFT	2.2300	6.69
GSCC-SFT	2.3000	3.77
本文算法	2.3667	1.26

## 6 结束语

利用最小二乘拟合改进的广义二次相关算法,进一步提升了广义二次相关算法的估值精度。本文在此基础上提出了基于改进广义二次相关的稀疏傅里叶变换时延估计算法,该算法保持了原有较快的运算速度,并且可在信噪比较低时显著提升抗噪声性能以及时延估值准确度,在工程应用中具有较好的实测效果。

## 参考文献

- [1] 修建娟,汪望松,孙鹏. 双向互选最近邻准则下的多目标 TDOA 无源定位[J]. 宇航学报,2015,36(4):483-488.
- [2] 苏龙. 无源时差定位跟踪技术研究[D]. 西安:西安电子科技大学,2015.
- [3] 叶尚福,孙正波,夏畅雄,等. 卫星干扰源双星定位技术及工程应用[M]. 北京:国防工业出版社,2013.
- [4] MEYER F, TESEI A, WIN M Z. Localization of multiple sources using time-difference of arrival measurements [C]//IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2017;3151-3155.
- [5] ADELIPOUR S, HAMDOLLAHZADEH M, BEHNIA F. Constrained optimization of sensors trajectories for moving source localization using TDOA and FDOA measurements [C]//RSI International Conference on Robotics and Mechatronics, IEEE, 2015;200-204.
- [6] 窦慧晶,王千龙,张雪. 基于二次相关的广义互相关时差估计算法[J]. 北京工业大学学报,2016,42(2):197-202.
- [7] 刘清华,杨桂芹,张妍妮. 基于稀疏快速傅里叶变换的信号压缩处理[J]. 微型机与应用,2016,35(14):61-63,67.
- [8] KNAPP C, CARTER C C. The generalized correlation method for estimation of time delay[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1976, 24(4):320-327.
- [9] 唐娟,行鸿彦. 基于二次相关的时延估计方法[J]. 计算机工程,2007,33(21):265-267.
- [10] 朱颖童,董春曦,刘松杨,等. 存在观测站位置误差的转发式时差无源定位[J]. 航空学报,2016,37(2):706-716.
- [11] 刘卫国. Matlab 程序设计与应用[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社,2006.
- [12] HASSANIEH H, INDYK P, KATABI D, et al. Simple and practical algorithm for sparse Fourier transform [C]//ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2012;1183-1194.
- [13] 任越美,张艳宁,李映. 压缩感知及其图像处理应用研究进展与展望[J]. 自动化学报,2014,40(8):1563-1575.
- [14] 杨建辉,刘玉红,王逸轩. 基于广义互相关和多项式拟合的 TDOA 时延估计方法[J]. 兰州交通大学学报,2016,35(4):40-43,49.