

引用格式:邢丽娟,杨世忠.最大控制律的多面体不变集鲁棒模型预测控制[J].电光与控制,2019,26(12):34-38. XING L J, YANG S Z. Robust model predictive control based on polyhedral invariant sets with maximum control laws[J]. Electronics Optics & Control, 2019, 26(12):34-38.

最大控制律的多面体不变集鲁棒模型预测控制

邢丽娟, 杨世忠

(青岛理工大学信息与控制工程学院, 山东 青岛 266520)

摘要:为实现线性变参数系统的快速稳定控制,提出一种最大控制律的多面体不变集鲁棒模型预测控制算法。离线时,通过设定一组渐近趋向于稳定点的给定值,按照状态变量到稳定点距离大致相同的原则,构建一系列状态变量值集合,通过优化得到每个集合中较大的控制律,然后采用反推的方式优化得到一系列最大的控制律,并结合系统的输入输出约束得到离线多面体不变集。在线时,根据每个采样周期状态变量在多面体不变集中的位置,通过线性插值优化得到系统的实际控制律。给出离线在线算法的详细步骤和系统的闭环稳定性证明。通过仿真比较验证所提算法的有效性,表明所提算法使系统响应更为快速和稳定。

关键词:最大控制律;多面体不变集;鲁棒模型预测控制;线性变参数系统;优化

中图分类号: TP273 文献标志码: A doi:10.3969/j.issn.1671-637X.2019.12.007

Robust Model Predictive Control Based on Polyhedral Invariant Sets with Maximum Control Laws

XING Li-juan, YANG Shi-zhong

(School of Information and Control Engineering, Qingdao University of Technology, Qingdao 266520, China)

Abstract: In order to realize fast and stable control of the linear variable parameter system, a robust model predictive control algorithm based on polyhedral invariant sets with maximum control laws is proposed. When offline, by setting a group of progressive values approaching the stable point, according to the principle that the distance from the state variable to the stable point is roughly the same, a sequence of state variable sets is constructed, and the larger control law in each set is obtained through optimization. The laws are then optimized in a backstepping way to obtain a series of maximum control laws, and are combined with the input and output constraints of the system to obtain the offline polyhedral invariant sets. When online, the actual control law of the system is obtained by linear interpolation optimization according to the position of state variables of each sampling period in the polyhedron invariant sets. The detailed steps of the offline and online algorithms and the closed-loop stability proof of the system are given. The simulation results prove the effectiveness of the proposed algorithm, and indicate that the proposed algorithm makes the closed-loop response of the system more rapid and stable.

Key words: maximum control laws; polyhedral invariant sets; robust model predictive control; linear variable parameter system; optimization

0 引言

鲁棒模型预测控制(Robust Model Predictive Control, RMPC)采用多胞体形式表示系统的模型不确定性,可以显式描述系统的输入输出约束,实现系统控制的稳

定性,因此被越来越多地应用在各种系统控制中^[1-5]。文献[6]采用线性矩阵不等式优化的形式实现了系统的鲁棒模型预测控制的在线控制,但由于在线运算量较大,影响了系统控制的快速性。文献[7]通过离线优化得出的一系列椭圆不变集和对应的控制律,在线时根据状态变量在椭圆不变集中的位置,优化得到系统的实际控制律。文献[8]针对线性变参数系统,利用二次有界技术,提出修正估计误差界的在线方法,建立存储离线优化控制律的查找表和相应的吸引区域。

收稿日期:2019-01-10 修回日期:2019-04-23

基金项目:国家自然科学基金(61703224)

作者简介:邢丽娟(1973—),女,内蒙古包头人,硕士,副教授,研究方向为控制理论与控制工程、计算机控制技术、测控仪表。

文献[9]将目标函数分解为两部分,通过求解线性矩阵不等式,离线构造了一个收缩椭圆不变集,增大了相应的控制律。由于系统输入约束和输出约束一般是以线性不等式的形式给出的,鲁棒模型预测控制采用椭圆不变集处理约束时,减小了控制器的初始可行域,造成了系统控制的保守性。采用多面体不变集的约束形式可以增大系统的初始可行域,减少算法的保守性^[10]。文献[11-12]在离线算法中优化得到多面体不变集,扩展了系统的初始可行域。在线算法首先确定状态变量值在多面体不变集中的位置,然后采用对应的控制律实现系统的稳定控制。文献[13]提出了一种切换离线多模型预测控制方法,采用间隙度量来表征线性模型之间的动态差异,建立线性模型库来逼近非线性系统。文献[14-15]根据在线时当前的状态变量在多面体不变集中的位置,通过线性插值的方法得到系统的实际控制律。

本设计的目的是寻求最大的离线控制律,以实现系统在线控制的快速性:1) 离线时首先选择一系列逐渐趋向于稳定点的数值,通过优化得到系统的较大控制律,再用反演的方式重新优化得到最大控制律,并以此为基础构建多面体不变集;2) 在线运算时,根据每个采样周期得到系统状态变量在多面体不变集中的位置,采用线性插值优化的方法得到系统的实际控制律。通过与常规多面体不变集鲁棒预测控制的仿真比较,验证了本文算法的有效性。

1 问题描述

一个线性变参数系统的离散状态方程为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n$ 表示系统的状态变量; $u(k) \in \mathbf{R}^m$ 表示系统控制输入量; $\mathbf{y}(k) \in \mathbf{R}^n$ 表示系统的输出变量。

由于式(1)系统的状态空间模型是通过近似得到的,因此系数矩阵依赖于不确定参数的不确定矩阵。多胞体模型是一种典型的不确定性系统模型,便于描述状态空间系数矩阵的不确定性。因此,式(1)系统采用多胞体约束较为方便,可表示为

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \sum_{j=1}^N \alpha_j [\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j] \quad (2)$$

式中, $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, 0 \leq \alpha_j \leq 1$ 。

式(2)满足多胞体约束: $[\mathbf{A} \ \mathbf{B}] \in \Omega, \Omega = Co\{[\mathbf{A}_1 \ \mathbf{B}_1], [\mathbf{A}_2 \ \mathbf{B}_2], \dots, [\mathbf{A}_N \ \mathbf{B}_N]\}$ 。

式(1)系统的输入、输出约束分别为

$$|u_i(k)| \leq \hat{u}_i \quad i=1, \dots, m \quad (3)$$

$$|y_i(k)| \leq \hat{y}_i \quad i=1, \dots, n_y \quad (4)$$

设系统的控制律为 F , 则系统的控制输入量为

$$u(k) = Fx(k) \quad (5)$$

采用最小最大的优化方式,令 $F = YQ^{-1}$, 式(1)系统的鲁棒预测控制可以转化为线性矩阵不等式的优化问题

$$\min_{\gamma, Q, Y, X, Z} \gamma \quad (6)$$

s. t.

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}(k)^T \\ \mathbf{x}(k) & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} Q & Q\mathbf{A}_j^T + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}_j^T & Q\mathbf{Q}_1^{1/2} & \mathbf{Y}^T \mathbf{R}^{1/2} \\ \mathbf{A}_j Q + \mathbf{B}_j \mathbf{Y} & Q & 0 & 0 \\ \mathbf{Q}_1^{1/2} Q & 0 & \gamma \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{Y} & 0 & 0 & \gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \quad j=1, \dots, N \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} X & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}^T & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad X_{ii} \leq \hat{u}_i^2, \quad i=1, \dots, m \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} Z & \mathbf{C}(\mathbf{A}_j Q + \mathbf{B}_j \mathbf{Y}) \\ (\mathbf{A}_j Q + \mathbf{B}_j \mathbf{Y})^T \mathbf{C}^T & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad j=1, \dots, N, \quad Z_{ii} \leq \hat{y}_i^2, \quad i=1, \dots, n_y \quad (10)$$

其中:式(6)是目标函数;式(7)是系统状态变量的不变椭圆集;式(8)保证系统李雅普诺夫稳定;式(9)和式(10)对应式(3)和式(4),是系统的输入和输出约束。

2 鲁棒模型预测控制离线算法

鲁棒模型预测控制离线算法一般采用多面体不变集,需要利用椭圆不变集优化得到控制律,然后利用输入和输出约束,通过优化算法得到系统的一系列多面体不变集。不同状态变量的选择会优化得到不同的控制律,所以,离线时状态变量的选择对系统的控制过程非常重要。本文设计的目的是获得一系列最大的离线控制律,因此,在离线时选择离稳定点的距离逐渐减小的状态变量设定值,并在每一次给出的状态变量设定值集合中寻找较大的控制律。

算法1 对于式(1)系统和输入输出约束式(3)、式(4),设离线给定的一系列逐渐趋向于稳定点的数值为 $X = (X_1, X_2, \dots, X_L), i=1$ 。

1) 设离线各维子空间的最大值为 $x_{set} = X(i)$ 。

2) 设 $j=1$; 令状态变量第 j 维的 x_{Axis_j} 轴的值为 x_{set} , 其他轴分别取值 $0, X_L, 2 * X_L, \dots, N * X_L$, 这里 $N * X_L$ 不大于 x_{set} , 得到 $[0; \dots; 0; x_{set}; 0; \dots; 0] \sim [N * X_L; \dots; N * X_L; x_{set}; N * X_L; \dots; N * X_L]$ 的给定状态变量集合。将集合中每个状态变量设定值采用式(6)~式(10)进行优化求解,得出相应的控制律。

3) $j=j+1$, 若 $j \leq n$, 返回 2); 若 $j > n$, 转到算法 4)。

4) 比较由2)和3)得到的各个控制律,得到其中一个较大的控制律 F_i ,并存储对应的离线状态变量 x_i 和相应的优化值 γ_i, Y_i 。

5) $i = i + 1$,若 $i \leq L$,返回1);若 $i > L$,算法结束。

由算法1可知,对于每个状态变量设定值集合都可得到相应的较大控制律 $F_1 \sim F_L$ 。

由于式(6)~式(10)的优化采用线性矩阵不等式的内点法求解,所以得到较大控制律的结果并不唯一,因此,设计中采用反推的方法得到最大控制律。

算法2 对于式(1)系统和输入输出约束式(3)、式(4),根据算法1得到较大的控制律 F_i 、相应的离线状态变量 x_i 和相应的优化值 γ_i, Y_i 。根据 $F = YQ^{-1}$,在优化时固定 γ_i, Y_i ,优化寻求最小的 Q 。

将优化目标式(6)改为

$$\min_{Q, X, Z} Q \quad (11)$$

设 $i = 1$ 。

1) 将 x_i, γ_i, Y_i 代入式(7)~式(10)。

2) 优化计算式(7)~式(11),得到更小的 $Q_{\min, i}$ 。

3) 由 $F = YQ^{-1}$ 计算得到最大控制律 $F_{\max, i}$ 。

4) $i = i + 1$,若 $i \leq L$,返回1);若 $i > L$,算法结束。

由算法2得到一系列最大控制律 $F_{\max, i}$ 序列,便于实现系统的快速稳定控制。系统的多面体不变集优化由算法3实现。

算法3 对于式(1)系统和输入输出约束式(3)、式(4),由算法1和算法2得到 L 个相应的最大控制律 $F_{\max, i}$ 和相应的 x_i 。

1) 令 $i = 1, m = 1$ 。根据式(3)、式(4),设对于每个 x_i 和 F_i ,对应的多面体不变集为 $S_i = \{x \mid M_i x \leq d_i\}$,其中: $M_i = [C^T, -C^T, K_i^T, -K_i^T]^T$, $d_i = [y_{\max}^T, -y_{\min}^T, u_{\max}^T, -u_{\min}^T]^T$ 。

2) 取 (M_i, d_i) 的 m 行,根据式(2)对多胞体的每个顶点进行优化求解

$$\begin{aligned} & \max_x W_{i, m} \quad (12) \\ \text{s. t. } & W_{i, m} = M_{i, m} (A_j + B_j F_i) x - d_{i, m} \\ & M_i x \leq d_i \end{aligned}$$

若 $W_{i, m} > 0$,则原不变集需要添加约束 $M_{i, m} (A_j + B_j F_i) x \leq d_{i, m}$,即 $M_i = [M_i^T, (M_{i, m} (A_j + B_j F_i))^T]^T$, $d_i = [d_i^T, d_{i, m}^T]^T$ 。

3) 令 $m = m + 1$,若 m 不大于 M_i 的行数,返回2)。

4) 令 $i = i + 1$,若 $i \leq L$,返回1);若 $i > L$,算法结束。

3 鲁棒模型预测控制在线算法

在线算法是在离线算法的基础上,根据系统状态变量的实际值在多面体不变集中具体位置,确定状态变量所处的最小多面体集,采用线性插值优化方式得

到系统的实际控制律。

算法4 对于式(1)系统和输入输出约束式(3)、式(4),由离线算法得到 L 个多面体不变集和对应的最大控制律。

1) 由当前状态变量 $x(k)$,确定其所处的最小多面体不变集 S_i 。

2) 若 $i < L$,进行优化求解

$$\min_{\lambda, \varepsilon} \lambda \quad (13)$$

s. t. $M_{i+1} (A_j x(k) + B_j (\lambda F_{\max, i} + (1-\lambda) F_{\max, i+1})) x(k) \leq d_{i+1}$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & x(k)^T \\ x(k) & Q_{\min, i} \end{bmatrix} \geq 0$$

$$u_{\min} \leq (\lambda F_{\max, i} + (1-\lambda) F_{\max, i+1}) x(k) \leq u_{\max}$$

式中: $0 \leq \lambda \leq 1; 0 \leq \varepsilon \leq 1$ 。

通过式(13)优化得到系统的实际控制律

$$F_{\text{real}} = \lambda F_{\max, i} + (1-\lambda) F_{\max, i+1}$$

3) 若 $i = L$,则系统的实际控制律 $F_{\text{real}} = F_{\max, L}$ 。

4) 根据式(5)得到系统的控制量 $u(k)$,实现系统的快速稳定控制。

定理1 对于式(1)线性变参数系统和式(3)、式(4)输入输出约束,设系统初始状态变量 x_1 ,如果 $x_1 \in S$,则算法4可以保证闭环系统的渐近稳定。

证明 对于 $x_1 \in S$,不失一般性,设在 k 时刻系统的状态变量 $x(k) \in S_i$,分两种情况讨论。

1) 当状态变量 $x(k)$ 所处的多面体不变集 S_i 满足 $i < L$,采用控制输入 $u(k)$ 实现式(1)系统的闭环控制, $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ 。由算法4可知, $x(k+1) \in S_{i+1}$ 。选择李雅普诺夫函数 $V(x) = x^T P x, P > 0$ 。由式(8)可知 $V_i(x(k+1)) < V_i(x(k))$;由于 $S_{i+1} \subset S_i$,有 $V_{i+1}(x(k+1)) < V_i(x(k+1))$ 。可得 $V_{i+1}(x(k+1)) < V_i(x(k))$,即 $V(k+1) < V(k)$ 。

2) 当状态变量 $x(k)$ 所处的多面体不变集 S_i 满足 $i = L$,系统的控制律为 $F_{\max, L}$,构成式(1)系统的闭环控制, $x(k+1) = (A + B F_N) x(k)$ 。由式(8)可知, $V_i(x(k+1)) \leq V_i(x(k))$,即 $V(k+1) \leq V(k)$ 。

由此可知,算法4可以保证闭环系统的渐近稳定。

本文的4个算法在应用中是按顺序进行的,其中,算法1~算法3是离线算法,算法4是在线算法。在离线时,首先用算法1得到一系列较大的控制律。由于离线优化的结果并不唯一,所以算法2采用反推的方法重新优化得到最大控制律。算法3在最大控制律的基础上结合系统约束优化得到系统的离线多面体不变集。在线时,采用算法4优化得到系统的实际控制律。

4 仿真

线性变参数系统的离散状态方程为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1-0.1\alpha(k) \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0787 \end{bmatrix} u(k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)u(k) \\ y(k) = [1 \ 0]\mathbf{x}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (14)$$

系统的输入约束为 $|u(k)| \leq 2$ 。参数变化范围为 $0.1 \leq \alpha \leq 10, \mathbf{A} \in \Omega = \text{Co}\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2\}$, 其中: $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 0.09 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

系统初始值为 $\mathbf{x}(0) = [0.05; 0]$ 。在仿真时由于不能确定系统参数的实际变化,采取的方式是让系数矩阵 \mathbf{A} 中的可变参数 $\alpha(k)$ 初始值为 0.1,在每个采样周期增加 0.5 一直到 10。这样,在仿真时系统的参数矩阵是变化的,并以此来模拟实际运行时系统可能的变化。

由于椭圆不变集的保守性,现在多采用多面体不变集对系统的状态变量进行约束。本文采用最大控制律的多面体不变集和常规多面体不变集的鲁棒模型预测控制进行仿真比较,用以说明本文算法的可行性和优势。

设离线给定的一系列逐渐趋向于稳定点的数值 $X = (1.0, 0.8, 0.4, 0.2, 0.1)$, 根据算法 1, 得到系统的较大控制律和相应的状态变量, 然后采用算法 2 得到系统的最大控制律, 如表 1 所示。

表 1 状态变量、较大控制律和最大控制律
Table 1 State variables, larger control laws and maximum control laws

状态变量 x_i	较大控制律 F_i	最大控制律 $F_{\max, i}$
[0; 1.0]	[-4.0347 -1.4007]	[-4.0385 -1.4014]
[0; 0.8]	[-6.1747 -1.8958]	[-6.1787 -1.8966]
[0; 0.4]	[-21.1150 -4.5274]	[-21.1571 -4.5329]
[0; 0.2]	[-56.7722 -9.9503]	[-56.8521 -9.9545]
[0; 0.1]	[-86.3105 -14.9194]	[-86.3153 -14.9198]

根据最大控制律, 结合系统的输入约束, 采用算法 3 得到系统的离线多面体不变集, 如图 1 所示。

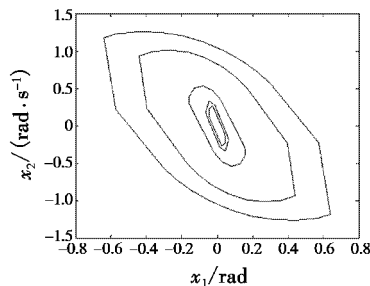


图 1 离线多面体不变集

Fig. 1 Offline polyhedral invariant sets

对式(14)系统进行控制仿真, 比较算法 4 与文献 [14] 中常规多面体不变集鲁棒模型预测控制算法的控制效果。两种算法得出的控制仿真分别如图 2、图 3 所示。

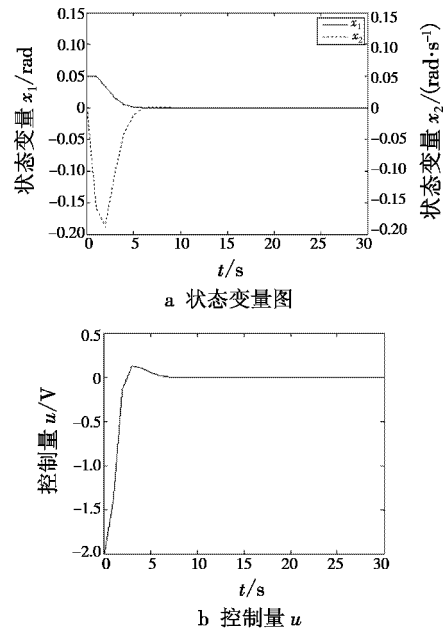


图 2 最大控制律 RMPC

Fig. 2 Maximum control law RMPC

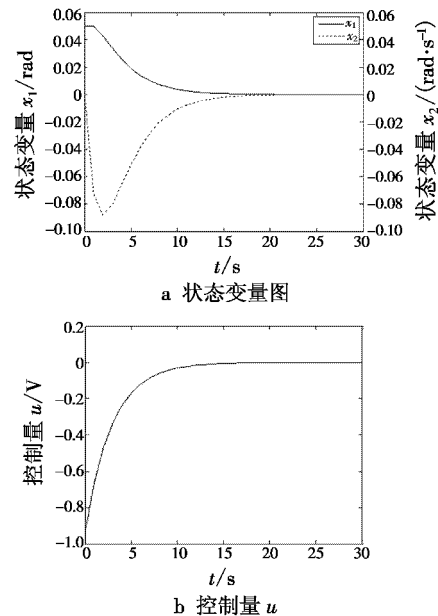


图 3 常规 RMPC

Fig. 3 Conventional RMPC

由图 2、图 3 可知, 采用基于最大控制律的鲁棒预测控制算法时, 状态变量可以较快地趋于稳定点, 在第 9 个采样周期达到稳态点; 而采用常规鲁棒预测控制算法, 状态变量在第 21 个采样周期才趋于稳定。采用基于最大控制律的鲁棒预测控制算法时, 系统的控制输入量较大, 控制作用强, 在第 8 个采样周期达到稳态

点;而采用常规鲁棒预测控制算法的控制量较小,对系统的控制作用也较弱,在第 17 个采样周期时趋于稳定。仿真比较表明,采用基于最大控制律的鲁棒预测控制算法时,由于系统的控制律较大,使得系统的控制输入量较大,系统的状态变量在较短的时间内趋于稳定点,实现了系统的快速稳定控制。

5 结束语

本文针对一类线性变参数系统,提出最大控制律的多面体鲁棒预测控制算法。在离线算法中得到最大控制律,并建立离线多面体不变集。在线算法通过线性插值的方式优化得到实际控制律。从仿真比较可以看到,最大控制律的多面体鲁棒预测控制使状态变量较快地趋于稳定点,系统控制效果好,为线性变参数系统提供了一种可行的鲁棒预测控制方法。

参 考 文 献

- [1] ABBAS H S, HANEMA J, TOTH R, et al. An improved robust model predictive control for linear parameter-varying input-output models [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, 28(10):1-39.
- [2] 刘宝林,周少雄,曾智基,等. 基于鲁棒模型预测控制的智慧社区分层级多时间尺度协调优化调度[J]. *可再生能源*, 2018, 36(11):1677-1683.
- [3] 李嘉琦. 基于椭圆管的鲁棒模型预测控制算法[J]. *电子设计工程*, 2018, 26(19):152-156.
- [4] 王仑,苏敏,杨帆,等. 四旋翼飞行器姿态的显式模型预测控制[J]. *电光与控制*, 2017, 24(11):53-57.
- [5] 周绍磊,周超,陈洁. 基于预测控制方法的 UAV 视觉编队飞行控制律设计[J]. *电光与控制*, 2013, 20(1):9-13.
- [6] KOTHARE M V, BALAKRISHNAN V, MORARI M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities [J]. *Automatica*, 1996, 32(10):1361-1379.
- [7] WAN Z Y, KOTHARE M V. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities[J]. *Automatica*, 2003, 39(5):837-846.
- [8] PING X B. Output feedback robust MPC based on off-line observer for LPV systems via quadratic boundedness[J]. *Asian Journal of Control*, 2017, 19(4):1641-1653.
- [9] ZHANG L G, YAN Y. Robust shrinking ellipsoid model predictive control for linear parameter varying system [J]. *PLoS One*, 2017, 12(6):1-13.
- [10] XI Y G, ZHU H L, LI D W. Synthesizing off-line robust model predictive control based on polyhedron invariant set[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(2):187-190.
- [11] BUMROONGSRI P, KHEAWHOM S. An off-line robust MPC algorithm for uncertain polytopic discrete-time systems using polyhedral invariant sets [J]. *Journal of Process Control*, 2012, 22(6):975-983.
- [12] BUMROONGSRI P, KHEAWHOM S. An interpolation-based robust MPC algorithm using polyhedral invariant sets [C]//*European Control Conference*, 2013:3161-3166.
- [13] LI D W, TAO X Y, LI N, et al. Switched offline multiple model predictive control with polyhedral invariant sets [J]. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2017, 56(34):9629-9637.
- [14] KHEAWHOM S, BUMROONGSRI P. Robust MPC based on polyhedral invariant sets for LPV systems[J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 2013, 46(32):355-360.
- [15] THOMAS J. Robust model predictive controller for uncertain piecewise affine systems[J]. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 2014, 39(10):7421-7432.