

引用格式:严强强,盛守照,周俊,等.一种改进奇异值分解降噪方法研究[J].电光与控制,2018,25(9):22-25,41. YAN Q Q, SHENG S Z, ZHOU J, et al. A noise reduction method based on improved singular value decomposition[J]. Electronics Optics & Control, 2018, 25(9):22-25, 41.

一种改进奇异值分解降噪方法研究

严强强, 盛守照, 周俊, 林群馥
(南京航空航天大学自动化学院, 南京 210016)

摘要:针对奇异值分解降噪过程中采用一般方法构造重构矩阵信号完整度不高的问题,提出一种基于循环矩阵方法来构造重构矩阵的新方法。该方法利用循环矩阵在构造重构矩阵时能够较好地保留原始信号信息的特性,对循环矩阵奇异值分解,进而有效确定矩阵的有效重构阶次,达到降噪目的。仿真结果表明,该方法相比于其他方法具有较高的降噪精度和抗噪声能力,提高了算法的实用性。

关键词:奇异值分解; 降噪; 信号完整度; 循环矩阵

中图分类号: TH165.3 **文献标志码:** A **doi:**10.3969/j.issn.1671-637X.2018.09.005

A Noise Reduction Method Based on Improved Singular Value Decomposition

YAN Qiang-qiang, SHENG Shou-zhao, ZHOU Jun, LIN Qun-fu

(College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: In view of the problem of low Signal Integrity Degree(SID) using the general method to construct the reconstructed matrix in the process of noise reduction in singular value decomposition, a new method is proposed by using cyclic matrix to construct the reconstructed matrix. The method can preserve the characteristics of the original signal information when constructing the reconstructed matrix by using the cyclic matrix. Then, the singular values of the cyclic matrix are decomposed, and the effective reconstruction order of the matrix is determined. Therefore, the purpose of noise reduction is achieved. Simulation results show that the proposed method has higher noise reduction accuracy and noise immunity than other methods, and the new method improves the practicability of the algorithm.

Key words: singular value decomposition; noise reduction; signal integrity degree; cyclic matrix

0 引言

信号降噪一直是故障诊断和信号处理中一个非常重要的步骤。奇异值分解(Singular Value Decomposition, SVD)作为有效降噪方法之一,已应用于许多工程领域。其基本原理为:奇异值的大小与该信号分量的信息量大小相对应^[1],噪声对应的信号分量体现为较小的奇异值,通过保留前 K 个较大的奇异值既可以获得原始信号的 F 范数意义的最佳逼近,又可以滤除噪声的影响。该方法的关键技术主要有两个:一是如何用原始信号构造出重构矩阵;二是如何确定重构矩阵

的有效阶次。

现有的构造重构矩阵的方法一般为连续截断法和Hankel矩阵法两种,这两种方法的设计自由度均体现为重构矩阵的行数是可以设计的。文献[1]研究了Hankel矩阵行数对滤波效果的影响,得出了最优重构矩阵行数;文献[2]采用奇异值分解方法对实测铣削力信号进行处理,发现连续截断法具有更好的频率分辨能力,Hankel矩阵法具有更好的消噪能力。对于确定重构矩阵有效阶次的问题,现有文献提出了较多的确定方法:文献[3]提出了基于结构风险最小化原则的奇异值分解降噪方法;文献[4]采用主分量分析的方法,根据奇异值的大小来确定有效阶次;确定有效阶次的方法还有动态聚类法^[5];根据滤波信号极点个数情况对有效阶次进行判断的方法^[6]、奇异熵法^[7]等。

本文主要研究对重构矩阵构造方法的改进。通过对现有矩阵构造方法特征的分析,提出了一种改进的

收稿日期:2017-10-09

修回日期:2018-08-16

基金项目:航空科学基金(2016ZC52018);中央高校基本科研业务费专项资金(NZ2016003)

作者简介:严强强(1993—),男,江苏淮安人,硕士生,研究方向为先导飞行控制技术。

重构矩阵设计方法,并通过仿真实验对比分析不同方法的效果差异。

1 SVD 降噪基本理论与方法

SVD 降噪的基本原理主要依据信号的信息量与重构矩阵的奇异值之间的对应关系。一般而言,较大的奇异值对应信息量大的信号分量,较小的奇异值对应信息量小的信号分量;当有用信号未被噪声淹没时,噪声信号分量对应的奇异值数值较小,只会淹没掉原信号中信息量小的分量。所以通过适当地舍弃小奇异值对应的信号分量,用大奇异值进行信号还原,既可以消除噪声的影响,又能保留原始信号的主要信息,实现对原信号较好的估计,从而得到降噪信号^[2]。

SVD 降噪的基本步骤为:1)构造重构矩阵 A ;2)对 A 进行奇异值分解;3)确定有效阶次;4)信号还原。

对于给定的实矩阵 X 属于 $\mathbf{R}^{m \times n}$,如果其秩为 r ,那么奇异值分解

$$X = U \begin{bmatrix} \Sigma_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{m \times n} V^T \quad (1)$$

式中: $U_{m \times n}$ 和 $V_{m \times n}$ 分别为正交矩阵; $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$, $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_r > 0$,且对角线元素按递减排列。

首先给出一个引理,该引理是 SVD 滤波的一个理论依据。

引理 1 (矩阵的降秩逼近) 设 $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $m \times n = N$, $\text{rank}(A) = r$, A 的 SVD 分解为

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} V^T \quad (2)$$

则在 F 范数意义下,在空间 $\mathbf{R}_s^{m \times n}$ 中 A 的一个最佳逼近为

$$A_s = U \begin{bmatrix} \Sigma_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} V^T \quad (3)$$

式中, $\Sigma_s = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s)$, 即 $\|A - A_s\|_F = \min\{\|A - B\|_F \mid B \in \mathbf{R}_s^{m \times n}\}$ 。

引理 1 给出矩阵降秩逼近的计算方法,该方法是用较大奇异值进行矩阵重构而实现的。当信号滤波时,也是通过使用较大奇异值进行信号重构,因而 SVD 滤波方法既滤除了噪声,又可以保证对原始信号的逼近性能。

已有的重构矩阵的构造方法一般分为两种,其具体构造方法如下所述。

1) 连续截断法。

连续截断法将原始信号截成若干等长连续信号段,然后将各段按行构成重构矩阵。其原理为

$$A = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \dots & y(m) \\ y(m+1) & y(m+2) & \dots & y(2m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y((n-1)m) & y((n-1)m+1) & \dots & y(N) \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中: $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $m \times n = N$; $y(k)$, $k = 1, \dots, N$, 为测量信号序列。

2) Hankel 矩阵法。

Hankel 矩阵法通过将原始信号序列构造为左上角为 $y(1)$ 、右下角为 $y(N)$ 的 Hankel 矩阵,从而得到构造矩阵,即

$$A = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \dots & y(N-L+1) \\ y(2) & y(3) & \dots & y(N-L+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(L) & y(L+1) & \dots & y(N) \end{bmatrix} \quad (5)$$

这两种构造方法均可以调整矩阵行数,具有一定的设计自由度。相比之下,连续阶段法的可选行数只能取为信号长度的因数,而 Hankel 矩阵法的可选行数为 $L = 2, \dots, N-1$,设计自由度很大。

确定有效阶次的方法较多,本文考虑采用谱分析的方法来确定重构有效阶次。设重构矩阵的奇异值为 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$, 且 $\sigma_i \geq \sigma_j$, $\forall 1 \leq i < j \leq r$, 则可以得到奇异谱为

$$\Delta_i = \sigma_i - \sigma_{i+1} \quad i = 1, \dots, r-1 \quad (6)$$

则有效阶次为

$$p = \max_{\Delta_k > \theta} \{k\} \quad (7)$$

式中, θ 为阈值。

2 改进型构造矩阵设计方法

2.1 重构矩阵对滤波效果的影响

为了定量地描述和定性理解重构矩阵的结构对滤波效果的影响,引入信号完整度(SID)。首先定义行信号完整度(RSID)和列信号完整度(CSID),即

$$S_{\text{RSID}} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m r_k \quad (8)$$

$$S_{\text{CSID}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k \quad (9)$$

式中: m, n 分别为矩阵 A 的行数和列数; r_k 为 A 的第 k 行有效信号的长度与总信号长度的比值(如果某行由多个不连续的信号片段构成,则取最长的信号段作为该行的有效信号); c_k 为 A 的第 k 列有效信号的长度与总信号长度的比值。

重构矩阵 A 的信号完整度定义为

$$S_{\text{SID}} = \frac{S_{\text{RSID}} \times m + S_{\text{CSID}} \times n}{m + n} \quad (10)$$

该定义描述了重构矩阵在行和列上对原信号的完整度

保存情况。在该定义下如果采用连续截断法,则有

$$S_{SID} = \frac{m \times \frac{1}{n} + n \times \frac{1}{N}}{m + n};$$

如果采用 Hankel 矩阵法,则有

$$S_{SID} = \frac{L \times \frac{N-L+1}{N} + (N-L+1) \times \frac{L}{N}}{N}。$$

2.2 设计循环矩阵方法

针对奇异值分解降噪方法,一般的研究中多采用分段截断或者 Hankel 矩阵法,但是这些设计方法得到的重构矩阵 A 所具有的信号完整度不够高,所以从提高重构矩阵 A 的信号完整度的角度,本文提出了一种改进型的重构矩阵设计方法,将其设计为循环矩阵,其中 A 的设计如下

$$A = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \cdots & y(N) \\ y(2) & y(3) & \cdots & y(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(N) & y(1) & \cdots & y(N-1) \end{bmatrix} \quad (11)$$

如果采用循环矩阵法,则有

$$S_{SID} = \begin{cases} \frac{(\sum_{i=N}^{N+1} i + \sum_{i=N/2}^{N-1} i) \times \frac{1}{N} + (\sum_{i=N}^{N+1} i + \sum_{i=N/2}^{N-1} i) \times \frac{1}{N}}{N + N} = \frac{3}{4} & N = 2k \\ \frac{(2 \sum_{i=N}^{k+1} i + k + 1) \times \frac{1}{N} + (2 \sum_{i=N}^{k+1} i + k + 1)}{N + N} = \frac{3(k^2 + k) + 1}{4(k^2 + k) + 1} \approx \frac{3}{4} & N = 2k + 1 \end{cases} \quad (12)$$

式中, $k \in \mathbb{N}$, 在这种定义下 A 会尽可能多地包含原始信号的信息,其 SID 比一般的重构矩阵高。

3 仿真计算与讨论

3.1 滤波效果仿真计算分析

降噪效果一般用均方误差 (MSE) 和信噪比 (SNR) 来衡量,其定义分别为

$$E_{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x(k) - \hat{x}(k))^2 \quad (13)$$

$$R_{s,N} = 10 \lg \frac{\sum_{k=1}^N x^2(k)}{\sum_{k=1}^N (x(k) - \hat{x}(k))^2}。 \quad (14)$$

下面针对同一含噪声信号,分别采用连续截断法、Hankel 矩阵法和循环矩阵法进行滤波处理,来对比其滤波效果。仿真选取如下信号源: $s = \sin 3\pi t \cdot \cos 10\pi t + \sin(20\pi t + \sin 30\pi t) + a(n)$, $a(n)$ 是方差为 0.72、均值为 0 的高斯白噪声,采样时间为 0.001 s。当高斯白噪声的方差为 0.72 时,经计算可知,原系统均方误差为 0.3330,信噪比为 3.5261,在此情况下,对比改进型信号矩阵构造方法与已有的各种构造方法之间的降噪

效果差异,如表 1 所示。

表 1 各方法滤波效果对比

Table 1 Filtering effect of each method

方法	均方误差	信噪比/dB	SID 值
连续截断法(25 行)	0.0524	11.5547	0.0095
连续截断法(40 行)	0.0511	11.6701	0.0111
Hankel 矩阵法(N/4 行)	0.0070	20.3136	0.32
Hankel 矩阵法(N/2 行)	0.0064	20.6816	0.5
循环矩阵法	0.0027	24.4364	0.75

由表 1 可以看出,采用循环矩阵法的滤波效果无论是信噪比还是 SID 值都要优于连续截断法和 Hankel 矩阵法。图 1~图 3 所示为采用 3 种方法进行滤波处理的仿真波形图。

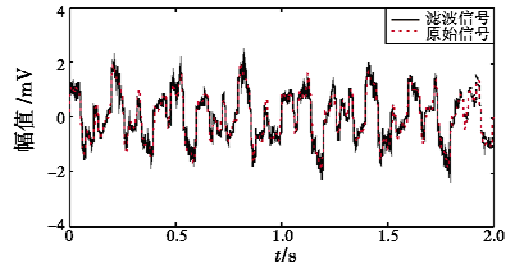


图 1 连续截断法信号波形图

Fig. 1 Signal curve based on matrix truncation

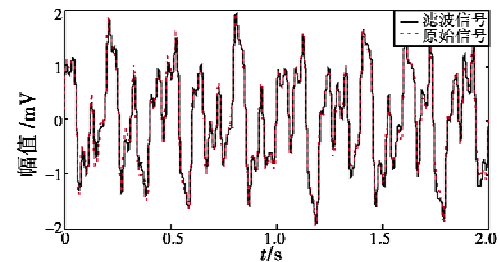


图 2 Hankel 矩阵法信号波形图

Fig. 2 Signal curve based on Hankel matrix

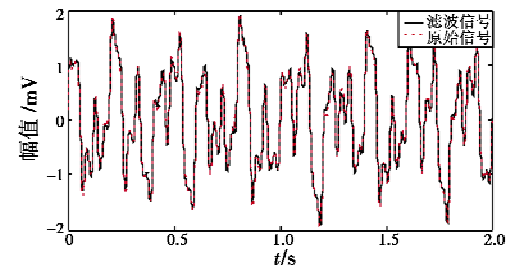


图 3 循环矩阵法信号波形图

Fig. 3 Signal curve based on cyclic matrix

分析图 1~图 3 可知:1) 总体而言,Hankel 矩阵法得到的滤波效果要比连续截断法的好;2) 对于连续截断法和 Hankel 矩阵法,当所设计的矩阵的 SID 值较大时,所得滤波效果较好,实验结果表明 SID 值可以反映出重构矩阵的优劣;3) 循环矩阵法得到的滤波效果优于一般的连续截断法和 Hankel 矩阵法。

由上述结论可知,Hankel 矩阵法的降噪效果总体上好于连续截断法,而且根据实验可知,当 Hankel 矩阵法在行数为 $N/2$ 左右时降噪效果最好,故而下面进行 $N/2$ 行的 Hankel 矩阵法与循环矩阵法在不同强度噪声情况下的滤波效果对比,如图 4~图 5 所示。

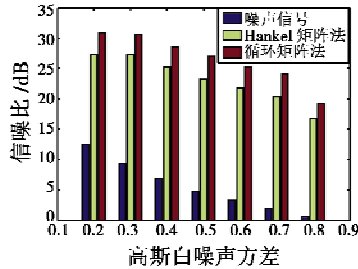


图 4 两种方法在不同噪声强度下信噪比对比图

Fig.4 SNR contrast of two methods at different noise intensities

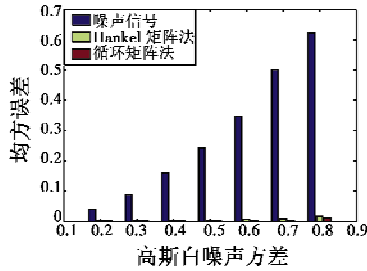


图 5 两种方法在不同噪声强度下均方误差对比图

Fig.5 Mean square errors of two methods at different noise intensities

从图 4 中可以看出,在不同的噪声强度下,循环矩阵法的信噪比优于 Hankel 矩阵法,说明循环矩阵法的降噪效果比 Hankel 矩阵法的好。从图 5 可以看出,不同噪声强度下,不同方法滤波后的均方误差都很小,但还可以看出,循环矩阵法的均方误差更小。

通过仿真结果可以看出:1)两种方法对噪声信号均具有不错的降噪能力;2)循环矩阵法所得到的降噪效果总体上好于 Hankel 矩阵法,通过计算两种方法的信噪比提高数值可知,循环矩阵法的信噪比提高量比 Hankel 矩阵法平均高 3.338 dB。

3.2 实测信号降噪处理分析

为了进一步检验该改进算法在实际应用中的效果,针对某电机的振动测试信号进行了降噪分析,采样频率为 10 kHz,并对降噪前后的信号进行频谱分析,具体如图 6、图 7 所示。

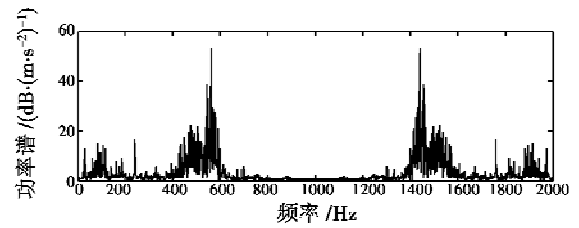
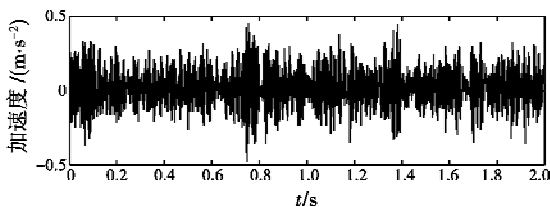


图 6 电机振动原始信号及频谱图

Fig.6 Original vibration signal and spectrum of motor

从降噪前后信号的频谱图可以清楚看出,采用循环矩阵法降噪后的信号较好地保留了主要振动成分,滤除了杂波干扰。实测信号仿真验证了此改进算法在实际应用中有效可靠。

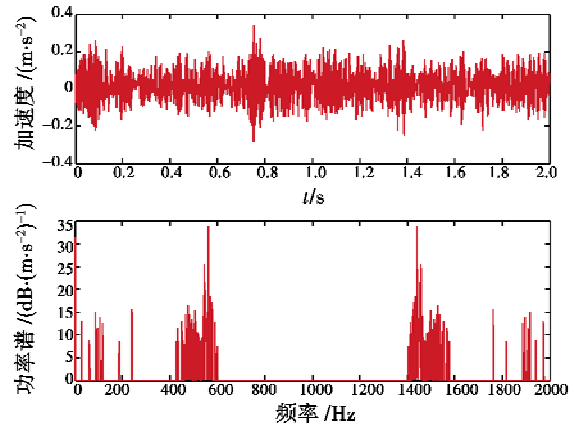


图 7 降噪处理后信号及频谱图

Fig.7 Signal and spectrum after noise reduction

4 总结

本文主要针对奇异值分解降噪过程中采用一般方法构造重构矩阵信号完整度不高的问题,提出一种改进的奇异值分解降噪方法。通过对重构矩阵的改进,创新性地提出采用循环矩阵法代替连续截断法和 Hankel 矩阵法构造重构矩阵,提高信号完整度,从而提高降噪效果。通过数值仿真实验验证了本改进算法能显著提高信噪比,提升降噪能力。实际应用表明,该方法可以获得较高的信噪比,同时也较好地保留了原信号的特征波形。仿真验证表明本改进算法具有一定的实用性。

参考文献

[1] 钱征文,程礼,李应红.利用奇异值分解的信号降噪方法[J].振动、测试与诊断,2011,31(4):459-463.
 [2] 赵学智,叶邦彦.分量形成方式对奇异值分解信号处理效果的影响[J].上海交通大学学报:自然版,2011,45(3):368-374.

(下转第 41 页)

单一尺度的形态学滤波与本文算法都能较好地检测出目标并且保持较低的虚警率;但是当温度分别降为 $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ 和 $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时,探测器成像质量较差,红外探测器的噪声较大,从图5及表2的统计中可以看到,单一形态学滤波的虚警率已经达到了49%,在图6及表3中单一形态学算法不仅检出概率低,而且虚警率也很高。低温条件下,本文算法在保证较高检出概率的同时,依然能较好地抑制虚警的产生,提高了目标检出结果的置信度。

表3 低温下检出结果统计($-40\text{ }^{\circ}\text{C}$)

Table 3 The statistical result at low temperature ($-40\text{ }^{\circ}\text{C}$)

总帧数	无多帧关联		单一形态学算法		本文算法	
200 帧	检出概率	虚警率	检出概率	虚警率	检出概率	虚警率
	89%	78%	31.5%	45%	85%	0%

3 结束语

本文充分利用红外弱小目标与噪点、背景的差异性,利用邻域内像素的相关性等信息,可以有效地改善图像的质量,采用改进的阈值计算方法,可以稳定准确地判断出最优的分割门限。相比传统的序列检测算法,本文算法能有效地区分真实目标点与随机固定坏元的干扰,检出准确率高,虚警率低。另外,在算法实现的过程中,包括各种滤波算子以及门限系数的选择更多的是要依据经验值,因此更好地获取先验知识显得尤为重要,而且算法的可适用性也需要更多的验证。

参考文献

- [1] YANG L, YANG J, YANG K. Adaptive detection for infrared small target under sea-sky complex background [J]. Electronics Letters, 2004, 40(17):1083-1085.
- [2] ZHANG B Y, ZHANG T X, CAO Z G, et al. Fast new small target detection algorithm based on a modified partial differential equation in infrared clutter[J]. Optical Engineering, 2007, 46(10):106401-1-6.
- [3] CHEN C L P, LI H, WEI Y T, et al. A local contrast method for small infrared target detection [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2014, 52(1):574-581.
- [4] ZHANG Y, XIONG M T, WU Q Z. Evaluation of dim target detection and tracking algorithms [C]//The 4th International Symposium on Advanced Optical Manufacturing and Testing Technologies: Optical Test and Measurement Technology and Equipment, 2009:7283.7283W1-7283W6.
- [5] BARNETT J. Statistical analysis of median subtraction filtering with application to point target detection in infrared backgrounds [J]. Proc. SPIE, 1989. doi:10.1117/12.951425.
- [6] GONZALEZ R C, WOOD R E. Digital image processing [M]. 3rd ed. 阮秋琦, 阮宇智, 译. 北京:电子工业出版社, 2013.
- [7] 汪洋, 郑亲波, 张钧屏. 基于数学形态学的红外图像小目标检测[J]. 红外与激光工程, 2003, 32(1):28-31.
- [8] SHECHTMAN E, IRANI M. Matching local self-similarities across images and videos [C]//IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2007:1-8.
- [9] KHAN J F, ALAM M S. Target detection in cluttered FLIR imagery using probabilistic neural network [C]//Proc. SPIE, 2005:55-66.
- [10] LIU L, HUANG Z J. Infrared dim target detection technology based on background estimate [J]. Infrared Physics & Technology, 2014, 62(2):59-64.
- [1] YANG L, YANG J, YANG K. Adaptive detection for infrared small target under sea-sky complex background [J].
- (上接第25页)
- [3] 曾作钦. 基于奇异值分解的信号处理方法及其在机械故障诊断中的应用[D]. 广州:华南理工大学, 2011.
- [4] 康春玉, 章新华. 一种基于奇异值分解的自适应降噪方法[J]. 声学技术, 2008, 27(3):455-458.
- [5] 王维, 张英堂, 徐章遂. 基于动态聚类的奇异值分解降噪方法研究[J]. 振动工程学报, 2008, 21(3):304-308.
- [6] 丛华, 吴广平, 饶国强, 等. 计算阶次分析中避免阶次混叠的滤波定阶方法及其应用[J]. 振动与冲击, 2012, 31(12):42-44.
- [7] 张文斌. 奇异值能量差分谱在信号降噪中的应用[J]. 工矿自动化, 2014, 40(10):25-28.